Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 517.958

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. Г. Романов

Аннотация. Рассматривается интегродифференциальная система уравнений электродинамики, которая соответствует немагнитной среде, обладающей дисперсией. Для этой системы изучается задача об определении пространственной части ядра, входящего в интегральный член уравнения. Это соответствует отысканию той части диэлектрической проницаемости, которая нелинейно зависит от частоты электромагнитной волны. Предполагается, что носитель диэлектрической проницаемости содержится в некоторой компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Для отыскания ее внутри Ω задается информация о решении соответствующей прямой задачи для системы уравнений электродинамики на всей границе области Ω для некоторого конечного временного интервала. В предположении, что временной интервал достаточно велик, установлена оценка условной устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: уравнения электродинамики, обратная задача, устойчивость, единственность.

§ 1. Постановка задачи, формулировка основных результатов

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0(x)E(x,t)+\int\limits_{-\infty}^{t}\varepsilon(x,t-s)E(x,s)\,ds\right)-\operatorname{rot}H(x,t)+j(x,t)=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)+\operatorname{rot}E(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^4, \tag{1.1}$$

при нулевых начальных условиях

$$(E,H)_{t<0}=0. \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) описывают процесс распространения волн в дисперсной среде. В этой статье мы принимаем, что $\varepsilon_0(x)\in\mathbf{C}^{10}(\mathbb{R}^3)$ является заданной положительной функцией, $\varepsilon_0(x)\geq\varepsilon_{00}>0$, а функция $\varepsilon(x,t)$ представима в виде

$$\varepsilon(x,t)=k(t)p(x), \tag{1.3}$$

в котором $k(t)\in\mathbf{C}^4[0,\infty)$ является заданной функцией такой, что $k(0)=1$, а $p(x)$ — неизвестной функцией класса $\mathbf{C}^8(\mathbb{R}^3)$, носитель которой содержится в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00105–а), Минобрнауки РФ (ГК № 14.740.11.0350) и Сибирского отделения РАН (проект СО РАН, выполняемый со сторонними организациями, 2009–№ 93).

открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$. В качестве стороннего тока $j(x,t)$ возьмем функцию $j = j_0\delta(t)\delta(x_1)$, в которой $j_0 = (0,0,1) = \mathbf{e}_3$, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. В дальнейшем $\mathbf{e}_k$ означает единичный орт оси x_k, $k = 1,2,3$. Предположим, что плоскость $x_1 = 0$, на которой локализована дельта-функция $\delta(x_1)$, не принадлежит замыканию области Ω. Для определенности примем, что Ω лежит в полуплоскости $\mathbb{R}^3_d = \{x \mid x_1 \geq d\}$ при некотором $d > 0$. С целью некоторого технического упрощения исследования обратной задачи примем также, что $\varepsilon_0(x) = 1$ вне $\mathbb{R}^3_d$.

Предположим, что риманова метрика $d\tau = \sqrt{\varepsilon_0(x)\big(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\big)}$ имеет неположительную кривизну в $\mathbb{R}^3_d$. Достаточным условием выполнения последнего требования является удовлетворение следующего неравенства:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 \ln \varepsilon_0(x)}{\partial x_i \partial x_j}\nu_i\nu_j \geq 0, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 > 0,\ x \in \mathbb{R}^3_d.$$

При выполнении этого условия метрика является *простой*, т. е. каждая пара точек x и y в $\mathbb{R}^3_d$ может быть соединена единственной геодезической.

Введем в рассмотрение функцию $\tau(x)$ как решение задачи Коши

$$|\nabla\tau(x)|^2 = \varepsilon_0(x), \quad \tau|_{x_1=0} = 0. \tag{1.4}$$

Пусть $G = G(T)$ — цилиндрическая область: $G(T) = \{(x,t) \mid x \in \Omega, \tau(x) < t < T + \tau(x)\}$, где T — некоторое положительное число, $S = S(T) = \{(x,t) \in (\partial\Omega \times \mathbb{R}) \mid \tau(x) < t < T + \tau(x)\}$ — боковая поверхность этой области, а $\Sigma = \Sigma(T)$ — ее нижнее основание: $\Sigma(T) = \{(x,t) \mid x \in \Omega, t = \tau(x) + 0\}$.

Как следует из изложенного ниже (см. лемму 1), функции $E(x,t)$, $H(x,t)$, являющиеся решением задачи (1.1)–(1.3), при некоторых предположениях о коэффициентах уравнения (1.1) представимы в виде суммы некоторых сингулярных функций, имеющих носитель на характеристической поверхности $t = \tau(x)$, и регулярных функций $\overline{E}(x,t)$, $\overline{H}(x,t)$ с носителем, принадлежащим множеству $\{(x,t) \mid t \geq \tau(x)\}$, а именно

$$E(x,t) = \alpha_E(x)\delta(t - \tau(x)) + \overline{E}(x,t), \quad H(x,t) = \alpha_H(x)\delta(t - \tau(x)) + \overline{H}(x,t).$$

Чтобы найти $p(x)$, предполагаем, что для решения задачи (1.1)–(1.3) известны на S следы вектора магнитной напряженности H и его нормальной производной, а также коэффициент при сингулярной части функции $H(x,t)$:

$$H|_S = g(x,t), \quad \left.\frac{\partial H}{\partial n}\right|_S = h(x,t), \quad \alpha_H|_{\partial\Omega} = \alpha'_H(x). \tag{1.5}$$

Требуется по заданным функциям $g(x,t)$, $h(x,t)$ и $\alpha'_H(x)$ найти $p(x)$ в области Ω.

Полученный в этой статье результат связан с оценкой устойчивости решения сформулированной задачи.

Заметим, что обратные задачи об определении ядра интегродифференциального уравнения, несколько отличного от уравнений (1.1), в предположении, аналогичном (1.2), изучались ранее в работах [1, 2]. В них получена гёльдеровская оценка условной устойчивости решения задач. Принципиальная разница в постановках задачи, рассматриваемой в настоящей работе, и задач в упомянутых выше работах состоит в том, что в [1, 2] задаются ненулевые начальные данные, которые равномерно отделены от нуля на всем множестве Ω. Последнее обстоятельство существенно используется в технике исследования обратной задачи. Впервые подобная постановка обратной задачи и метод ее исследования были представлены в [3]. Однако эта постановка обладает очевидным физическим недостатком: не имея возможности проводить измерения внутри области Ω (а именно так обстоит дело в практических приложениях обратных задач), мы не можем измерить и начальное состояние в Ω. В реальной ситуации можно создавать некоторое физическое поле только источниками, носитель которых располагается вне изучаемой области. В статье [4] рассмотрена задача об определении ядра интегродифференциального уравнения вязко-упругости с источниками, носитель которых расположен вне Ω. Эта задача сведена к изучению задачи интегральной геометрии, и для ее решения найдена липшицева оценка устойчивости.

Для фиксированных чисел $q_0 > 0$, $d > 0$ обозначим через $\Lambda(q_0, d)$ множество функций (ε_0, k, p), удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\operatorname{supp} p(x) \subset \Omega$, $\operatorname{supp}(\varepsilon_0(x) - 1) \subset \mathbb{R}^3_d$,

2) $\|p\|_{\mathbf{C}^8(\mathbb{R}^3)} \le q_0$, $\|\varepsilon_0 - 1\|_{\mathbf{C}^{10}(\mathbb{R}^3))} \le q_0$, $\|k - 1\|_{\mathbf{C}^4[0,\infty)} \le q_0$.

Для решения прямой задачи справедлива

Лемма 1. *Для каждого $T_0 > 0$ найдется положительное число $q_0^* = q_0^*(T_0)$ такое, что для любых $(\varepsilon_0, k, p) \in \Lambda(q_0, d)$, $q_0 \le q_0^*$, решение (E, H) задачи* (1.1)–(1.3) *представимо в области $K(T_0) = \{(x,t) \mid \tau(x) \le T_0,\ 0 \le t \le T_0 - \tau(x)\}$ в виде*

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \alpha_E(x)\delta(t - \tau(x)) + \beta_E(x)\theta_0(t - \tau(x)) \\ &\quad + \gamma_E(x)\theta_1(t - \tau(x)) + \widehat{E}(x,t), \\ H(x,t) &= \alpha_H(x)\delta(t - \tau(x)) + \beta_H(x)\theta_0(t - \tau(x)) \\ &\quad + \gamma_H(x)\theta_1(t - \tau(x)) + \widehat{H}(x,t), \end{aligned} \tag{1.6}$$

в котором $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда, т. е. $\theta_0(t) = 1$ для $t \ge 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$, а $\theta_1(t) = t\theta_0(t)$. Коэффициенты α_E, β_E, γ_E и α_H, β_H, γ_H являются гладкими функциями пространственной переменной x и определяются равенствами (2.14), (2.15), (2.18)–(2.21). *При этом $\alpha_E \in \mathbf{C}^8(D(T_0))$, $\beta_E \in \mathbf{C}^6(D(T_0))$, $\gamma_E \in \mathbf{C}^4(D(T_0))$, $D(T_0) = \{x \mid \tau(x) \le T_0\}$, $\alpha_H \in \mathbf{C}^8(D^+(T_0) \cup D^-(T_0))$, $\beta_H \in \mathbf{C}^6(D^+(T_0) \cup D^-(T_0))$, $\gamma_H \in \mathbf{C}^4(D^+(T_0) \cup D^-(T_0))$, $D^+(T_0) = D(T_0) \cap \{x \mid x_1 > 0\}$, $D^-(T_0) = D(T_0) \cap \{x \mid x_1 < 0\}$, а функции $\widehat{E}(x,t)$, $\widehat{H}(x,t)$ вместе с частной производной по переменной t принадлежат классу $\mathbf{H}^3(\Sigma(T_0,t_0))$, $\Sigma(T_0,t_0) = K(T_0) \cap \{(x,t) \mid t = t_0\}$, $t_0 \in (0, T_0]$, и тождественно равны нулю для $t \le \tau(x)$. Кроме того, существует положительная постоянная C такая, что для всех $q_0 \le q_0^*$ справедливы неравенства*

$$\begin{gathered} \left|\alpha_E(x) - \alpha_E^0(x)\right| \le Cq_0, \quad |\beta_E(x)| \le q_0 C, \quad |\gamma_E(x)| \le q_0 C, \quad x \in D(T_0), \\ |\widehat{E}(x,t)| \le q_0 C, \quad |\widehat{E}_t(x,t)| \le q_0 C, \quad (x,t) \in K(T_0); \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} \left|\alpha_H(x) - \alpha_H^0(x)\right| \le Cq_0, \quad |\beta_H(x)| \le q_0 C, \quad |\gamma_H(x)| \le q_0 C, \quad x \in D(T_0), \\ |\widehat{H}(x,t)| \le q_0 C, \quad |\widehat{H}_t(x,t)| \le q_0 C, \quad (x,t) \in K(T_0). \end{gathered} \tag{1.8}$$

В формулах (1.7), (1.8) *$\alpha_E^0(x) = -\mathbf{e}_3/2$ и $\alpha_H^0(x) = (\mathbf{e}_2/2)\operatorname{sign}(x_1)$.*

Доказательство леммы дано в § 2. Основной результат этой статьи составляет следующая теорема устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 1. *Пусть $(\varepsilon_0, k, p_i) \in \Lambda(q_0, d)$, $i = 1, 2$, а $g^i(x,t)$, $h^i(x,t)$, $\alpha^i_H|_{\partial\Omega}(x)$ — данные Коши, соответствующие решению задачи* (1.1)–(1.3) *при $p = p_i(x)$.*

Пусть, кроме того, область Ω содержится в некотором римановом шаре радиуса ρ и выполнено условие

$$T > 4\rho. \tag{1.9}$$

Тогда найдутся положительные числа q_0^*, C такие, что при всех $q_0 \le q_0^*$ выполнено неравенство

$$\|p_1 - p_2\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\big(\|g_t^1 - g_t^2\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|h_t^1 - h_t^2\|^2_{\mathbf{L}^2(S)} + \|\alpha_H^1 - \alpha_H^2\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\beta_H^1 - \beta_H^2\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)}\big). \tag{1.10}$$

В этой формуле $\beta_H^i(x) = g^i(x, \tau(x) + 0)$, $i = 1, 2$.

Доказательство теоремы дано в § 3. Из теоремы 1 в качестве следствия вытекает теорема единственности.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и данные Коши, соответствующие решению задачи (1.1)–(1.3) для $p = p_i$, $i = 1, 2$, совпадают, т. е. $g^1 = g^2$, $h^1 = h^2$, $\alpha_H^1|_{\partial\Omega} = \alpha_H^2|_{\partial\Omega}$. Тогда найдется положительное число q_0^* такое, что при $q_0 \le q_0^*$ в области Ω выполнено равенство $p_1(x) = p_2(x)$.*

§ 2. Доказательство леммы 1

Умножая первое уравнение (1.1) на -1, применяя к нему после этого операцию rot и используя второе равенство (1.1), находим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0(x)H_t(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} k(t-s)[p(x)H_s(x,s) - \nabla p(x) \times E(x,s)]\,ds - \nabla\varepsilon_0(x) \times E(x,t)\right) + \operatorname{rot}\operatorname{rot} H(x,t) - \operatorname{rot} j(x,t) = 0, \quad (x,t) \in K(T_0). \tag{2.1}$$

На решениях задачи (1.1), (1.2) справедливо равенство $\operatorname{div} H(x,t) = 0$. С учетом его запишем равенство (2.1) в виде

$$\varepsilon_0(x)H_{tt}(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} [k''(t-s)p(x)H(x,s) - k'(t-s)\nabla p(x) \times E(x,s)]\,ds + p(x)H_t(x,t) + k'(0)p(x)H(x,t) - \nabla p(x) \times E(x,t) - \nabla\varepsilon_0(x) \times E_t(x,t) - \Delta H(x,t) - \operatorname{rot} j(x,t) = 0, \quad (x,t) \in K(T_0). \tag{2.2}$$

Первое уравнение (1.1) представим в виде

$$\varepsilon_0(x)E_t(x,t) + p(x)E(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} k'(t-s)p(x)E(x,s)\,ds - \operatorname{rot} H(x,t) + j(x,t) = 0 \tag{2.3}$$

и будем в дальнейшем рассматривать в области $K(T_0)$ систему равенств (2.2), (2.3) при нулевых начальных условиях (1.2) вместо системы (1.1), (1.2). Воспользуемся для функций $E(x,t)$, $H(x,t)$ представлениями (1.6) и равенствами

$$E_t(x,t) = \alpha_E(x)\delta'(t-\tau(x)) + \beta_E(x)\delta(t-\tau(x)) + \gamma_E(x)\theta_0(t-\tau(x)) + \widehat{E}_t(x,t),$$
$$H_t(x,t) = \alpha_H(x)\delta'(t-\tau(x)) + \beta_H(x)\delta(t-\tau(x)) + \gamma_H(x)\theta_0(t-\tau(x)) + \widehat{H}_t(x,t),$$

$$\operatorname{rot} H(x,t) = -\nabla\tau(x)\times\alpha_H(x)\delta'(t-\tau(x)) + [\operatorname{rot}\alpha_H(x) - \nabla\tau(x)\times\beta_H(x)]\delta(t-\tau(x))$$
$$+ [\operatorname{rot}\beta_H(x) - \nabla\tau(x)\times\gamma_H(x)]\theta_0(t-\tau(x)) + [\operatorname{rot}\gamma_H(x)]\theta_0(t-\tau(x))$$
$$+ \operatorname{rot}\widehat{H}_t(x,t),$$

$$H_{tt}(x,t) = \alpha_H(x)\delta''(t-\tau(x)) + \beta_H(x)\delta'(t-\tau(x)) + \gamma_H(x)\delta(t-\tau(x)) + \widehat{H}_{tt}(x,t),$$
$$\Delta H(x,t) = \alpha_H(x)|\nabla\tau(x)|^2\delta''(t-\tau(x))$$
$$- [(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x))\alpha_H(x) + \beta_H(x)|\nabla\tau(x)|^2]\delta'(t-\tau(x))$$
$$- [(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x))\beta_H(x) - \Delta\alpha_H(x) + \gamma_H(x)|\nabla\tau(x)|^2]\delta(t-\tau(x))$$
$$- [(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x))\gamma_H(x) - \Delta\beta_H(x)]\theta_0(t-\tau(x))$$
$$+ [\Delta\gamma_H(x)]\theta_1(t-\tau(x)) + \Delta\widehat{H}_t(x,t).$$

Из предыдущих формул следует, что

$$L_1[E,H](x,t) \equiv \varepsilon_0(x)H_{tt}(x,t) - \Delta H(x,t) + p(x)H_t(x,t) + k'(0)p(x)H(x,t)$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{t} [k''(t-s)p(x)H(x,s) - k'(t-s)\nabla p(x)\times E(x,s)]\,ds$$
$$- \nabla p(x)\times E(x,t) - \nabla\varepsilon_0(x)\times E_t(x,t)$$
$$= L_1[\widehat{E},\widehat{H}](x,t) + F^1(x,t)$$
$$+ [(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x))\alpha_H(x) - \nabla\varepsilon_0(x)\times\alpha_E(x)]\delta'(t-\tau(x))$$
$$+ [(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x))\beta_H(x) - \Delta\alpha_H(x)$$
$$+ k'(0)p(x)\alpha_H(x) - \nabla p(x)\times\alpha_E(x) - \nabla\varepsilon_0(x)\times\beta_E(x)]\delta(t-\tau(x))$$
$$+ [(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x))\gamma_H(x) - \Delta\beta_H(x)$$
$$+ k'(0)p(x)\beta_H(x) - \nabla p(x)\times\beta_E(x) - \nabla\varepsilon_0(x)\times\gamma_E(x)$$
$$+ k''(0)p(x)\alpha_H(x) - k'(0)\nabla p(x)\times\alpha_E(x)]\theta_0(t-\tau(x)), \quad (2.4)$$

$$L_2[E,H](x,t) \equiv \varepsilon_0(x)E_t(x,t) + p(x)E(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} k'(t-s)p(x)E(x,s)\,ds - \operatorname{rot} H(x,t)$$
$$= L_2[\widehat{E},\widehat{H}](x,t) + F^2(x,t) + [\varepsilon_0(x)\alpha_E(x) + \nabla\tau(x)\times\alpha_H(x)]\delta'(t-\tau(x))$$
$$+ [\varepsilon_0(x)\beta_E + p(x)\alpha_E(x) + \nabla\tau(x)\times\beta_H(x) - \operatorname{rot}\alpha_H(x)]\delta(t-\tau(x))$$
$$+ [\varepsilon_0(x)\gamma_E + p(x)\beta_E(x) + \nabla\tau(x)\times\gamma_H(x) - \operatorname{rot}\beta_H(x)$$
$$+ k'(0)p(x)\alpha_E(x)]\theta_0(t-\tau(x)). \quad (2.5)$$

В этих формулах

$$F^1(x,t) = [k'(0)p(x)\gamma_H(x) - \nabla p(x)\times\gamma_E(x) - \Delta\gamma_H(x)]\theta_1(t-\tau(x))$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{t} \{p(x)[k'''(t-s)\alpha_H(x)\theta_0(s-\tau(x)) + k''(t-s)(\beta_H(x)\theta_0(s-\tau(x))$$
$$+ \gamma_H(x)\theta_1(s-\tau(x)))] - \nabla p(x)\times[k'(t-s)\alpha_H(x)\theta_0(s-\tau(x))$$
$$+ k'(t-s)(\beta_H(x)\theta_0(s-\tau(x)) + \gamma_H(x)\theta_1(s-\tau(x)))]\}\,ds,$$

$$F^2(x,t) = [p(x)\gamma_E(x) - \operatorname{rot}\gamma_H(x)]\theta_1(t-\tau(x)) + \int\limits_{-\infty}^{t} p(x)\{k''(t-s)\alpha_E(x)\theta_0(t-\tau(x)) + k'(t-s)[\beta_E(x)\theta_0(t-\tau(x)) + \gamma_E(x)\theta_1(t-\tau(x))]\}\,ds.$$

Если $\varepsilon_0(x) = 1$, $p(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$, то решение задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$H(x,t) = \frac{1}{2}\operatorname{rot}(j^0\theta_0(t-|x_1|)) = \alpha_H^0(x)\delta(t-|x_1|), \quad E(x,t) = \alpha_E^0(x)\delta(t-|x_1|),$$

в котором $\alpha_H^0(x)$, $\alpha_E^0(x)$ задаются формулами

$$\alpha_H^0(x) = \frac{1}{2}\mathbf{e}_2\operatorname{sign}(x_1), \quad \alpha_E^0(x) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_3. \tag{2.6}$$

Здесь через $\mathbf{e}_2$ обозначен единичный орт оси x_2. Такой же вид имеет решение задачи (2.2), (2.3), (1.2) в области $\{(x,t) \mid x_1 < d,\ t + x_1 < d\}$. Следовательно, равенства (2.6) определяют коэффициенты представления (1.6) вне $\mathbb{R}^3_d$:

$$\begin{gathered}\alpha_H(x) = \frac{1}{2}\mathbf{e}_2\operatorname{sign}(x_1), \quad \beta_H(x) = \gamma_H(x) = 0,\\ \alpha_E(x) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_3,, \quad \beta_E(x) = \gamma_E(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^3_d.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Определим эти коэффициенты в области $\mathbb{R}^3_d$ как решения уравнений

$$(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x))\alpha_H(x) - \nabla\varepsilon_0(x)\times\alpha_E(x) = 0,$$

$$\begin{aligned}(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x))\beta_H(x) - \Delta\alpha_H(x)\\ + k'(0)p(x)\alpha_H(x) - \nabla p(x)\times\alpha_E(x) - \nabla\varepsilon_0(x)\times\beta_E(x) = 0,\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x))\gamma_H(x) - \Delta\beta_H(x) + k'(0)p(x)\beta_H(x)\\ - \nabla p(x)\times\beta_E(x) - \nabla\varepsilon_0(x)\times\gamma_E(x) + k''(0)p(x)\alpha_H(x) - k'(0)\nabla p(x)\times\alpha_E(x) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_0(x)\alpha_E(x) + \nabla\tau(x)\times\alpha_H(x) = 0,\\ \varepsilon_0(x)\beta_E + p(x)\alpha_E(x) + \nabla\tau(x)\times\beta_H(x) - \operatorname{rot}\alpha_H(x) = 0,\\ \varepsilon_0(x)\gamma_E + p(x)\beta_E(x) + \nabla\tau(x)\times\gamma_H(x) - \operatorname{rot}\beta_H(x) + k'(0)p(x)\alpha_E(x) = 0,\end{gathered} \tag{2.9}$$

удовлетворяющие при $x_1 = d$ граничным условиям, обеспечивающим непрерывность этих коэффициентов при переходе через плоскость $x_1 = d$:

$$\alpha_H|_{x_1=d} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_2, \quad \beta_H|_{x_1=d} = \gamma_H|_{x_1=d} = 0. \tag{2.10}$$

Тогда функции $\widehat{H}$, $\widehat{E}$ являются решением следующей задачи Коши:

$$L_1[\widehat{E},\widehat{H}](x,t) + F^1(x,t) = 0, \quad L_2[\widehat{E},\widehat{H}](x,t) + F^2(x,t) = 0, \quad (\widehat{E},\widehat{H})_{t<0} = 0. \tag{2.11}$$

Вычислим коэффициенты разложения (1.6). Исключая из первого уравнения (2.8) функцию $\alpha_E(x)$ и используя известное векторное равенство $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, находим уравнение для определения $\alpha_H(x)$ в виде

$$(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x) - \nabla\ln\varepsilon_0(x)\cdot\nabla\tau(x))\alpha_H(x) + (\nabla\ln\varepsilon_0(x)\cdot\alpha_H(x))\nabla\tau(x) = 0. \tag{2.12}$$

Введем матрицу

$$P(x) = (\nabla \ln \varepsilon_0(x))^* \nabla \tau(x),$$

в которой символ $*$ соответствует транспонированию вектора. Пусть $\Gamma(x)$ — отрезок геодезической в метрике $d\tau = \sqrt{\varepsilon_0(x)}|dx|$, $|dx| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$, проходящей в пространстве переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ через точку x и ортогональной плоскости $\xi_1 = d$, заключенный между этой плоскостью и точкой x. Тогда равенство (2.12) можно записать вдоль геодезической $\Gamma(x)$ в виде

$$2\sqrt{\varepsilon_0^3(x)} \frac{d}{d\tau} \frac{\alpha_H(x)}{\sqrt{\varepsilon_0(x)}} + \alpha_H(x)[(p(x) + \Delta\tau(x))I_3 + P(x)] = 0, \tag{2.13}$$

в котором $I = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$. Интегрируя его, находим формулу для вычисления $\alpha_H(x)$ в виде

$$\alpha_H(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_0(x)}\mathbf{e}_2 \exp\varphi(x), \quad \varphi(x) = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma(x)} \frac{1}{\varepsilon_0(\xi)}[(p(\xi) + \Delta\tau(\xi))I_3 + P(\xi)]\, d\tau. \tag{2.14}$$

В этой формуле ξ — переменная точка интегрирования на $\Gamma(x)$. Для вычисления $\alpha_E(x)$ имеем равенство

$$\alpha_E(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0(x)} \nabla\tau(x) \times \alpha_H(x). \tag{2.15}$$

Аналогично, исключая β_E из второго равенства, находим уравнение для вычисления β_H в виде

$$\begin{aligned}(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x) - \nabla\ln\varepsilon_0(x)\cdot\nabla\tau(x))\beta_H(x) + (\nabla\ln\varepsilon_0(x)\cdot\beta_H(x))\nabla\tau(x)\\ - \Delta\alpha_H(x) + k'(0)p(x)\alpha_H(x) - \nabla p(x)\times\alpha_E(x)\\ + \nabla\ln\varepsilon_0(x)\times[p(x)\alpha_E(x) - \mathrm{rot}\,\alpha_H(x)] = 0.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Это уравнение можно записать в виде, аналогичном (2.13):

$$\begin{aligned}2\sqrt{\varepsilon_0^3(x)} \frac{d}{d\tau} \frac{\beta_H(x)}{\sqrt{\varepsilon_0(x)}} + \beta_H(x)[(p(x) + \Delta\tau(x))I_3 + P(x)]\\ - \Delta\alpha_H(x) + k'(0)p(x)\alpha_H(x) - \nabla p(x)\times\alpha_E(x)\\ + \nabla\ln\varepsilon_0(x)\times[p(x)\alpha_E(x) - \mathrm{rot}\,\alpha_H(x)] = 0.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\begin{aligned}\beta_H(x) &= -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_0(x)} \int\limits_{\Gamma(x)} \bar\beta_H(\xi)\exp(\varphi(x) - \varphi(\xi))\, d\tau,\\ \bar\beta_H(x) &= \frac{1}{\varepsilon_0(x)}[-\Delta\alpha_H(x) + k'(0)p(x)\alpha_H(x) - \nabla p(x)\times\alpha_E(x)]\\ &\quad + \nabla\ln\varepsilon_0(x)\times[p(x)\alpha_E(x) - \mathrm{rot}\,\alpha_H(x)].\end{aligned} \tag{2.18}$$

После этого $\beta_E(x)$ вычисляется по формуле

$$\beta_E = -\frac{1}{\varepsilon_0(x)}[p(x)\alpha_E(x) + \nabla\tau(x)\times\beta_H(x) - \mathrm{rot}\,\alpha_H(x)]. \tag{2.19}$$

Формула для вычисления $\gamma_H(x)$ строится с помощью процедуры, уже использованной выше при построении формулы для $\beta_H(x)$, и имеет вид

$$\gamma_H(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_0(x)} \int\limits_{\Gamma(x)} \bar{\gamma}_H(\ xi) \exp\left(\varphi(x) - \varphi(\xi)\right) d\tau,$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(x) = & \frac{1}{\varepsilon_0(x)}\{-\Delta\beta_H(x) + k'(0)p(x)\beta_H(x) - \nabla p(x) \times \beta_E(x) \\ & + \nabla \ln\varepsilon_0(x) \times [p(x)\beta_E(x) + \nabla\tau(x) \times \gamma_H(x) - \operatorname{rot}\beta_H(x) \\ & + k'(0)p(x)\alpha_E(x)] + k''(0)p(x)\alpha_H(x) - k'(0)\nabla p(x) \times \alpha_E(x)\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Функция $\gamma_E(x)$ вычисляется по формуле

$$\gamma_E = -\frac{1}{\varepsilon_0(x)}[p(x)\beta_E(x) + \nabla\tau(x) \times \gamma_H(x) - \operatorname{rot}\beta_H(x) + k'(0)p(x)\alpha_E(x)]. \tag{2.21}$$

Из выписанных выше формул и априорных предположений о классе рассматриваемых коэффициентов уравнения (1.1) вытекает существование положительных постоянных C и q_0^* таких, что для всех $q_0 \le q_0^*$ и $t_0 \in (0, T_0]$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &\left\|\alpha_H - \alpha_H^0\right\|_{\mathbf{C}^8(D(T_0))} \le Cq_0,\ \|\beta_H\|_{\mathbf{C}^6(D(T_0))} \le Cq_0,\ \|\gamma_H\|_{\mathbf{C}^4(D(T_0))} \le Cq_0, \\ &\left\|\alpha_E - \alpha_E^0\right\|_{\mathbf{C}^8(D(T_0))} \le Cq_0,\ \|\beta_E\|_{\mathbf{C}^6(D(T_0))} \le Cq_0,\ \|\gamma_E\|_{\mathbf{C}^4(D(T_0))} \le Cq_0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Отсюда следует также, что $F^1(x,t)$, $F^2(x,t)$ принадлежат классу $\mathbf{H}^1(K(T_0))$. Более того, в суженной области $K'(T_0) = \{(x,t) \mid \tau(x) < t < T_0 - \tau(x)\}$ они имеют более высокую гладкость, а именно являются функциями класса $\mathbf{H}^2(K'(T_0))$. Для $(x,t) \in K(T_0)$ рассмотрим второе равенство (2.11):

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x)\widehat{E}_t(x,t) + p(x)\widehat{E}(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} k'(t-s)p(x)\widehat{E}(x,s)\,ds \\ - \operatorname{rot}\widehat{H}(x,t) + F^2(x,t) = 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\widehat{E}|_{t<0} = 0.$$

Из него следует, что для $(x,t) \in K(T_0)$ справедливы неравенства

$$|\widehat{E}(x,t)|^2 \le C\int\limits_0^t (|F^2(x,s)|^2 + |\operatorname{rot}\widehat{H}(x,s)|^2)\,ds, \tag{2.24}$$

$$|\widehat{E}_t(x,t)|^2 \le C\left(|F^2(x,t)|^2 + |\operatorname{rot}\widehat{H}(x,t)|^2 + \int\limits_0^t (|F^2(x,s)|^2 + |\operatorname{rot}\widehat{H}(x,s)|^2)\,ds\right),$$

в которых постоянная C зависит от ε_{00}, $\|\varepsilon_0\|_{\mathbf{C}^1(D(T_0))}$, $\|p\|_{\mathbf{C}^1(D(T_0))}$, $\|k-1\|_{\mathbf{C}^1[0,T_0]}$ и от T_0. Аналогичные оценки имеют место для первых производных функций $\widehat{E}$, $\widehat{E}_t$ в области $K(T_0)$, а для вторых производных — в области $K'(T_0)$.

Используя оценки (2.24), аналогичные оценки для первых производных и метод энергетических неравенств, из первого равенства (2.11) нетрудно оценить

$\mathbf{H}^2$-норму функции $\widehat{H}(x,t)$ и ее производной по t на сечениях $\Sigma(T_0,t_0) = K(T_0)\cap \{(x,t)\mid t=t_0\}$, $t_0\in(0,T_0]$. Эти оценки имеют вид

$$\begin{aligned} \|\widehat{H}\|^2_{\mathbf{H}^2(\Sigma(T_0,t_0))} &\le C\big(\|F^1\|^2_{\mathbf{H}^1(K(T_0))} + \|F^2\|^2_{\mathbf{H}^1(K(T_0))}\big),\\ \|\widehat{H}_t\|^2_{\mathbf{H}^2(\Sigma(T_0,t_0))} &\le C\big(\|F^1\|^2_{\mathbf{H}^1(K(T_0))} + \|F^2\|^2_{\mathbf{H}^2(K(T_0))}\big), \quad t_0\in(0,T_0]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

В силу теорем вложения из оценок (2.25) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\widehat{H}\|^2_{\mathbf{C}(\Sigma(T_0,\,t_0))} &\le C\big(\|F^1\|^2_{\mathbf{H}^1(K(T_0))} + \|F^2\|^2_{\mathbf{H}^2(K(T_0))}\big),\\ \|\widehat{H}_t\|^2_{\mathbf{C}(\Sigma(T_0,t_0))} &\le C\big(\|F^1\|^2_{\mathbf{H}^1(K(T_0))} + \|F^2\|^2_{\mathbf{H}^2(K(T_0))}\big), \quad t_0\in(0,T_0]. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Для значений $(x,t)\in K(T_0)$ таких, что $t<|x_1|$, функции $F^1(x,t)$, $F^2(x,t)$ равны нулю. Аналогичное свойство имеют и функции $\widehat{H}$, $\widehat{E}$, т. е. они обращаются в нуль для всех значений $t<|x_1|$.

Используя повышенную гладкость функций $F^1(x,t)$, $F^2(x,t)$ в $K'(T_0)$, нетрудно с помощью приема, описанного в работе [5], установить, что функции $\widehat{H}(x,t)$ и ее производная по t на сечениях $\Sigma'(T_0,t_0) = K'(T_0)\cap\{(x,t)\mid t = t_0\}$ области $K'(T_0)$ являются функциями класса $\mathbf{H}^3(\Sigma(T_0,t_0))$ и, следовательно, класса $\mathbf{C}^1(\Sigma(T_0,t_0))$. Тогда из уравнения (2.25) вытекает, что функции $\widehat{E}$, $\widehat{E}_t$ принадлежат классу $\mathbf{C}(\Sigma(T_0,t_0))$. На самом деле более тщательный анализ показывает, что они являются также функциями того же класса, что и $\widehat{H}$, $\widehat{H}_t$, т. е. принадлежат $\mathbf{C}^1(\Sigma(T_0,t_0))$.

Лемма 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть выполнены условия теоремы. Выберем T_0 настолько большим, что $G(T)\subset K'(T_0)$. Тогда в области $G(T)$ справедливо представление (1.6) и имеют место все свойства функций $\alpha_E(x)$, $\beta_E(x)$, $\gamma_E(x)$, $\alpha_H(x)$, $\beta_H(x)$, $\gamma_H(x)$, $\widehat{E}(x,t)$, $\widehat{H}(x,t)$, указанные в лемме 1. Обозначим решение задачи (1.1)–(1.3), отвечающее $\varepsilon(x,t) = k(t)p_i(x)$, $i=1,2$, через $(E^i(x,t),H^i(x,t))$, а функции $\alpha_E(x)$, $\beta_E(x)$, $\gamma_E(x)$, $\alpha_H(x)$, $\beta_H(x)$, $\gamma_H(x)$, $\widehat{E}(x,t)$, $\widehat{H}(x,t)$ в представлении (1.6) — через $\alpha^i_H(x)$, $\beta^i_H(x)$, $\gamma_H(x)^i$, $\alpha^i_E(x)$, $\beta^i_E(x)$, $\gamma^i_E(x)$, $\widehat{E}^i(x,t)$, $\widehat{H}^i(x,t)$. Следы на S функций $H^i(x,t)$ и их производных по нормали к S обозначим через $g^i(x,t)$, $h^i(x,t)$ соответственно. Заметим, что в области $G(T)$ функции $\widehat{E}^i(x,t)$, $\widehat{H}^i(x,t)$ регулярны и

$$\begin{aligned} H^i(x,t) &= \beta^i_H + \gamma^i_H(t-\tau(x)) + \widehat{H}^i(x,t),\\ E^i(x,t) &= \beta^i_E + \gamma^i_E(t-\tau(x)) + \widehat{E}^i(x,t), \quad i=1,2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Введем разности:

$$\begin{gathered} \widetilde{E} = E^1 - E^2,\ \widetilde{H} = H^1 - H^2,\ \tilde{p} = p_1 - p_2,\ \tilde{g} = g^1 - g^2,\ \tilde{h} = h^1 - h^2,\\ \tilde{\alpha}_H = \alpha^1_H - \alpha^2_H, \quad \tilde{\beta}_H = \beta^1_H - \beta^2_H, \quad \tilde{\gamma}_H = \gamma^1_H - \gamma^2_H,\\ \tilde{\alpha}_E = \alpha^1_E - \alpha^2_E, \quad \tilde{\beta}_E = \beta^1_E - \beta^2_E, \quad \tilde{\gamma}_E = \gamma^1_E - \gamma^2_E. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Запишем равенства (2.2), (2.3) в области $G(T)$ для случая, когда $\varepsilon(x,t) = k(t)p_i(x)$, с учетом введенных выше обозначений и сингулярной структуры решений. Имеем

$$\varepsilon_0(x)H^i_{tt}(x,t) - \Delta H^i(x,t) + \int\limits_{\tau(x)}^{t} \big[k''(t-s)p_i(x)H^i(x,s) - k'(t-s)\nabla p_i(x)\times E^i(x,s)\big]\,ds$$

$$+ p_i(x)H_t^i(x,t) + k'(0)p_i(x)H^i(x,t) - \nabla p_i(x) \times E^i(x,t) - \nabla\varepsilon_0(x) \times E_t^i(x,t) \\ + k''(t-\tau(x))p(x)\alpha_H^i(x) - k'(t-\tau(x))\nabla p_i(x) \times \alpha_E^i(x) = 0, \quad i = 1,2,$$

$$\varepsilon_0(x)E_t^i(x,t) + p_i(x)E^i(x,t) + \int\limits_{\tau(x)}^{t} k'(t-s)p_i(x)E^i(x,s)\,ds \\ + k'(t-s)p_i(x)\alpha_E^i(x) - \operatorname{rot} H^i(x,t) = 0, \quad i = 1,2.$$

Из этих соотношений следуют равенства для разностей

$$\varepsilon_0(x)\widetilde{H}_{tt}(x,t) - \Delta\widetilde{H}(x,t) + \widetilde{F}^3(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G(T), \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^3(x,t) = p_1(x)\widetilde{H}_t(x,t) + \tilde{p}(x)H_t^2(x,t) - \nabla\varepsilon_0(x) \times \widetilde{E}_t(x,t) \\ + k'(0)[p_1(x)\widetilde{H}(x,t) + \tilde{p}(x)H^2(x,t)] \\ + \int\limits_{\tau(x)}^{t} \{k''(t-s)[p_1(x)\widetilde{H}(x,s) + \tilde{p}(x)H^2(x,s)] \\ - k'(t-s)[\nabla p_1(x) \times \widetilde{E}(x,s) + \nabla\tilde{p}(x) \times E^2(x,s)]\}\,ds \\ - \nabla p_1(x) \times \widetilde{E}(x,t) - \nabla\tilde{p}(x) \times E^2(x,t) \\ + k''(t-\tau(x))\big[p_1(x)(\tilde{\alpha}_H)(x) + \tilde{p}(x)\alpha_H^2(x)\big] \\ - k'(t-\tau(x))\big[\nabla p_1(x) \times \tilde{\alpha}_E(x) + \nabla\tilde{p}(x) \times \alpha_E^2(x)\big], \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_0(x)\widetilde{E}_t(x,t) + \int\limits_{\tau(x)}^{t} k'(t-s)[\tilde{p}(x)E^1(x,s) + p_2(x)\widetilde{E}(x,s)]\,ds \\ + \tilde{p}(x)E^1(x,t) + p_2(x)\widetilde{E}(x,t) + k'(t-\tau(x))\big[\tilde{p}(x)\alpha_E^1(x) + p_2(x)\tilde{\alpha}_E(x)\big] \\ - \operatorname{rot}\widetilde{H}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G(T). \tag{3.5}$$

Обозначим $\widetilde{E}' = \widetilde{E}_t$, $\widetilde{H}' = \widetilde{H}_t$ и выпишем уравнения для этих функций. Дифференцируя равенства (3.3)–(3.5) и используя предельные равенства

$$\widetilde{E}(x,\tau(x)+0) = \tilde{\beta}_E(x), \quad \widetilde{H}(x,\tau(x)+0) = \tilde{\beta}_H(x),$$

находим искомые уравнения:

$$\varepsilon_0(x)\widetilde{H}'_{tt}(x,t) - \Delta\widetilde{H}'(x,t) + \widetilde{F}_t^3(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G(T); \tag{3.6}$$

$$\widetilde{F}_t^3(x,t) = p_1(x)\widetilde{H}'_t(x,t) + \tilde{p}(x)H_{tt}^2(x,t) - \nabla\varepsilon_0(x) \times \widetilde{E}'_t(x,t) \\ + k'(0)\big[p_1(x)\widetilde{H}'(x,t) + \tilde{p}(x)H_t^2(x,t)\big] \\ + \int\limits_{\tau(x)}^{t} \{k'''(t-s)[p_1(x)\widetilde{H}(x,s) + \tilde{p}(x)H^2(x,s)] \\ - k''(t-s)[\nabla p_1(x) \times \widetilde{E}(x,s) + \nabla\tilde{p}(x) \times E^2(x,s)]\}\,ds$$

$$
\begin{aligned}
&+ k''(t-\tau(x))\big[p_1(x)\tilde{\beta}_H(x) + \tilde{p}(x)\beta_H^2(x)\big] \\
&- k'(t-\tau(x))\big[\nabla p_1(x)\times\tilde{\beta}_E(x) + \nabla\tilde{p}(x)\times\beta_E^2(x)\big] \\
&- \nabla p_1(x)\times\widetilde{E}'(x,t) - \nabla\tilde{p}(x)\times E_t^2(x,t) \\
&+ k''(t-\tau(x))\big[p_1(x)(\tilde{\alpha}_H)(x) + \tilde{p}(x)\alpha_H^2(x)\big] \\
&- k'(t-\tau(x))\big[\nabla p_1(x)\times\tilde{\alpha}_E(x) - \nabla\tilde{p}(x)\times\alpha_E^2(x)\big], \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_0(x)\widetilde{E}_t'(x,t) + \int\limits_{\tau(x)}^{t} k''(t-s)[\tilde{p}(x)E_1(x,s) + p_2(x)\widetilde{E}(x,s)]\,ds \\
&+ k'(t-\tau(x))\big[\tilde{p}(x)\beta_E^1(x) + p_2(x)\tilde{\beta}_E(x)\big] + \tilde{p}(x)E_t^1(x,t) + p_2(x)\widetilde{E}'(x,t) \\
&+ k''(t-\tau(x))\big[\tilde{p}(x)\alpha_E^1(x) + p_2(x)\tilde{\alpha}_E(x)\big] - \operatorname{rot}\widetilde{H}'(x,t) = 0, \quad (x,t)\in G(T). \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Из равенства (3.8) вытекает оценка

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{E}_t'\|^2_{\mathbf{L}^2(G(T))} \le Cq_0^2\big[&\|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widetilde{E}'\|^2_{\mathbf{L}^2(G(T))} \\
&+ \|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widetilde{H}'\|^2_{\mathbf{H}^1(G(T))}\big]. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Так как

$$
\widetilde{E}'(x,t) = \tilde{\gamma}_E(x,t) + \int\limits_{\tau(x)}^{t} \widetilde{E}_s'(x,s)\,ds,
$$

из этого равенства и оценки (3.9) следует, что

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{E}'\|^2_{\mathbf{L}^2(G(T))} \le C\big\{&\|\tilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + q_0^2\big[\|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widetilde{E}'\|^2_{\mathbf{L}^2(G(T))} \\
&+ \|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widetilde{H}'\|^2_{\mathbf{H}^1(G(T))}\big]\big\}.
\end{aligned}
$$

Отсюда при выполнении условия $Cq_0^2 < 1$ получаем оценку для $\mathbf{L}^2(G(T))$-нормы функции $\widetilde{E}'(x,t)$, а затем ее производной по переменной t. Эти оценки имеют вид

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{E}'\|^2_{\mathbf{L}^2(G(T))} &\le C\big\{\|\tilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + q_0^2\big[\|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widetilde{H}'\|^2_{\mathbf{H}^1(G(T))}\big]\big\}, \\
\|\widetilde{E}_t'\|^2_{\mathbf{L}^2(G(T))} &\le Cq_0^2\big[\|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\tilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widetilde{H}'\|^2_{\mathbf{H}^1(G(T))}\big].
\end{aligned} \qquad (3.10)
$$

Из этих оценок и формулы (3.7) находим, что

$$
\begin{aligned}
\big\|\widetilde{F}_t^3\big\|^2_{\mathbf{L}^2(G(T))} \le Cq_0^2\big[&\|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&+ \|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widetilde{H}'\|^2_{\mathbf{H}^1(G(T))}\big]. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Заметим также, что имеют место равенства

$$
\widetilde{H}'|_S = \tilde{g}_t(x,t), \quad \frac{\partial\widetilde{H}'}{\partial n}\bigg|_S = \tilde{h}_t(x,t), \qquad (3.12)
$$

$$
\widetilde{H}'|_{t=\tau(x)} = \tilde{\gamma}_H(x), \quad x\in\Omega. \qquad (3.13)
$$

Воспользуемся для оценки решения задачи Коши (3.6), (3.12) теоремой 1.3 из статьи [6]. Согласно этой теореме при выполнении условий теоремы 1 существует такая постоянная $C>0$, что для решения задачи (3.6), (3.12) выполнено неравенство

$$\|\widetilde{H}'\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma)} + \|\widetilde{H}'\|^2_{\mathbf{H}^1(G(T))} \le C\big(\big\|\widetilde{F}^3_t\big\|^2_{\mathbf{L}^2(G(T))} + \|\tilde g_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde h_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big). \tag{3.14}$$

В силу (3.11) последнее неравенство можно записать в виде

$$\|\widetilde{H}'\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma)} + \|\widetilde{H}'\|^2_{\mathbf{H}^1(G)} \le C\big(q_0^2\big[\|\tilde p\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde\alpha_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$
$$+ \|\tilde\beta_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widetilde{H}'\|^2_{\mathbf{H}^1(G(T))}\big] + \|\tilde g_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde h_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big). \tag{3.15}$$

С учетом равенства (3.13) при $Cq_0^2<1$ отсюда следует, что

$$\|\tilde\gamma_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\big(q_0^2\big[\|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde\alpha_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde\beta_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$
$$+ \|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde p\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\big] + \|\tilde g_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde h_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big). \tag{3.16}$$

Из равенств (2.8), (2.9), записанных для $p=p_i(x)$, $i=1,2$, вытекают соотношения для разностей $\tilde\alpha_H$, $\tilde\beta_H$, $\tilde\gamma_H$, $\tilde\alpha_E$, $\tilde\beta_E$, $\tilde\gamma_E$. Они имеют вид

$$(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p_1(x))\tilde\alpha_H(x) + \tilde p(x)\alpha^2_H(x) - \nabla\varepsilon_0(x)\times\tilde\alpha_E(x) = 0,$$
$$(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p_1(x))\tilde\beta_H(x) + \tilde p(x)\beta^2_H(x) - \Delta\tilde\alpha_H(x)$$
$$+ k'(0)\big[p_1(x)\tilde\alpha_H(x) + \tilde p(x)\alpha^2_H(x)\big] - \nabla p_1(x)\times\tilde\alpha_E(x)$$
$$- \nabla\tilde p(x)\times\alpha^2_E(x) - \nabla\varepsilon_0(x)\times\tilde\beta_E(x) = 0,$$

$$(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p_1(x))\tilde\gamma_H(x) + \tilde p(x)\gamma^2_H(x) - \Delta\tilde\beta_H(x)$$
$$+ k'(0)\big[p_1(x)\tilde\alpha_H(x) + \tilde p(x)\alpha^2_H(x)\big] - \nabla p_1(x)\times\tilde\beta_E(x) - \nabla\tilde p(x)\times\beta^2_E(x)$$
$$- \nabla\varepsilon_0(x)\times\tilde\gamma_E(x) + k''(0)\big[p_1(x)\tilde\alpha_H(x) + \tilde p(x)\alpha^2_H(x)\big]$$
$$- k'(0)\big[\nabla p_1(x)\times\tilde\alpha_E(x) + \nabla\tilde p(x)\times\alpha^2_E(x)\big] = 0, \tag{3.17}$$

$$\varepsilon_0(x)\tilde\alpha_E(x) + \nabla\tau(x)\times\tilde\alpha_H(x) = 0,$$
$$\varepsilon_0(x)\tilde{\beta_E} + p_1(x)\tilde\alpha_E(x) + \tilde p(x)\alpha^2_E(x) + \nabla\tau(x)\times\tilde\beta_H(x) - \operatorname{rot}\tilde\alpha_H(x) = 0,$$

$$\varepsilon_0(x)\tilde\gamma_E + p_1(x)\tilde\beta_E(x) + \tilde p(x)\beta^2_E(x) + \nabla\tau(x)\times\tilde\gamma_H(x) - \operatorname{rot}\tilde\beta_H(x)$$
$$+ k'(0)\big[p_1(x)\tilde\alpha_E(x) + \tilde p(x)\alpha^2_E(x)\big] = 0, \tag{3.18}$$

Из равенств (3.18) находим, что

$$\begin{aligned}
&\|\tilde\alpha_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C\|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\\
&\|\tilde\beta_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C\big(\|\tilde p\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\big),\\
&\|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C\big(\|\tilde p\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde\gamma_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\big).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

С помощью последнего неравенства исключим $\|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ из неравенства (3.16). В результате этого получим, что

$$\|\tilde\gamma_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\big(q_0^2\big[\|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde\alpha_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde\beta_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$
$$+ \|\tilde\gamma_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde p\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\big] + \|\tilde g_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde h_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big); \tag{3.20}$$

При $Cq_0^2 < 1$ отсюда следует оценка

$$\|\tilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\big(q_0^2\big[\|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\big] + \|\tilde{g}_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde{h}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big). \tag{3.21}$$

Из третьего равенства (3.17) находим, что

$$\|\Delta\tilde{\beta}_H(x)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C\big(\|\tilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + q_0^2\big[\|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\big]\big). \tag{3.22}$$

Исключая из этого неравенства $\|\tilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$, $\|\tilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ с помощью формул (3.19), (3.21), приходим к оценке

$$\|\Delta\tilde{\beta}_H(x)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C\big(q_0^2\big[\|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\big] + \|\tilde{g}_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde{h}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big). \tag{3.23}$$

Исключая из неравенства (3.23) $\|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, $\|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, получаем новое неравенство:

$$\|\Delta\tilde{\beta}_H(x)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C\big(q_0^2\big[\|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\big] + \|\tilde{g}_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde{h}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big). \tag{3.24}$$

Оценим, основываясь на последнем неравенстве, $\mathbf{H}^2(\Omega)$-норму функции $\tilde{\beta}_H(x)$. Согласно известному неравенству из книги О. А. Ладыженской [7] (см. (6.14) на с. 121) справедливо соотношение

$$\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le C\Big(\|\Delta\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{|\xi|\le 2}\|D^\xi\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\Big), \tag{3.25}$$

в котором принято обычное обозначение D^ξ для мультииндексной производной, при этом $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $|\xi| = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$. С другой стороны, аналогично работе [5] нетрудно показать, что в предположениях теоремы 1 о рассматриваемом классе функций $\varepsilon_0(x)$, $p(x)$ справедлива оценка

$$\sum_{|\xi|\le 2}\|D^\xi\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)} \le C\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)}. \tag{3.26}$$

Поэтому

$$\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le C\big(\|\Delta\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)}\big). \tag{3.27}$$

Тогда из формул (3.24), (3.27) следует, что

$$\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le C\big(q_0^2\big[\|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\big] + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\tilde{g}_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde{h}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big). \tag{3.28}$$

При достаточно малых значениях q_0 отсюда вытекает неравенство

$$\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le C\big(q_0^2\big[\|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\big] + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\tilde{g}_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde{h}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big). \tag{3.29}$$

Из второго равенства (3.17) следует, что

$$\big\|\Delta\tilde{\alpha}_H(x) + \nabla\tilde{p}(x)\times\alpha_E^2(x)\big\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\big(\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + q_0^2\big[\|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\beta}_E\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\big]\big). \tag{3.30}$$

Исключая из этого неравенства $\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}$ с помощью (3.29) и $\|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$, $\|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ с помощью соотношений (3.18), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}\big\|\Delta\tilde{\alpha}_H(x) + \nabla\tilde{p}(x)\times\alpha_E^2(x)\big\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\big(q_0^2\big[\|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\big] \\ + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\tilde{g}_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde{h}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big).\end{aligned} \tag{3.31}$$

Согласно формуле (2.14) имеем равенство

$$\tilde{\alpha}_H(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_0(x)}\mathbf{e}_2\exp(\varphi_0(x))[\exp\psi_1(x) - \exp\psi_2(x)], \tag{3.32}$$

в котором

$$\varphi_0(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma(x)}\frac{1}{\varepsilon_0(\xi)}(\Delta\tau(\xi)I_3 + P(\xi))\,d\tau, \quad \psi_k(x) = -\int\limits_{\Gamma(x)}\frac{p_k(\xi)}{2\varepsilon_0(\xi)}\,d\tau, \quad k=1,2.$$

Так как $\exp\psi_1(x) - \exp\psi_2(x) = \tilde{\psi}(x)Q(x)$,

$$\tilde{\psi}(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x) = -\int\limits_{\Gamma(x)}\frac{\tilde{p}(\xi)}{2\varepsilon_0(\xi)}\,d\tau,$$

$$Q(x) = \int\limits_0^1 \exp\left[z\psi_1(x) + (1-z)\psi_2(x)\right]dz,$$

то

$$\tilde{\alpha}_H(x) = \tilde{\psi}(x)\mathbf{a}(x), \quad \mathbf{a}(x) = \frac{Q(x)}{2}\sqrt{\varepsilon_0(x)}\mathbf{e}_2\exp(\varphi_0(x)). \tag{3.33}$$

Из полученных выше соотношений следует, что

$$\begin{gathered}\tilde{p}(x) = -2\nabla\tilde{\psi}(x)\cdot\nabla\tau(x), \\ \|\tilde{p}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\|\tilde{\psi}\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)}, \quad \|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le C\|\tilde{\psi}\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)},\end{gathered} \tag{3.34}$$

и оценка (3.31) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\big\|\Delta\tilde{\alpha}_H(x) + \nabla\tilde{p}(x)\times\alpha_E^2(x)\big\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\big(q_0^2\|\tilde{\psi}\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \\ + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\tilde{g}_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde{h}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Оценим теперь $\|\tilde{\psi}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}$ через $\big\|\Delta\tilde{\alpha}_H(x) + \nabla\tilde{p}(x)\times\alpha_E^2(x)\big\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$. Рассмотрим дифференциальный оператор R второго порядка:

$$\begin{aligned}R\tilde{\psi} &\equiv \big(\Delta\tilde{\alpha}_H(x) + \nabla\tilde{p}(x)\times\alpha_E^2(x)\big)\cdot\mathbf{a}(x) \\ &= \big(\Delta(\tilde{\psi}\mathbf{a}(x)) - 2\nabla(\nabla\tilde{\psi}(x)\cdot\nabla\tau(x))\times\alpha_E^2(x)\big)\cdot\mathbf{a}(x) \\ &= |\mathbf{a}(x)|^2\Delta\tilde{\psi} + 2(\nabla\tilde{\psi}\cdot\nabla)\mathbf{a}(x)\cdot\mathbf{a}(x) + \tilde{\psi}(\Delta\mathbf{a}(x)\cdot\nabla\mathbf{a}(x)) \\ &\quad - 2\nabla(\nabla\tilde{\psi}(x)\cdot\nabla\tau(x))\cdot\big(\alpha_E^2(x)\times\mathbf{a}(x)\big).\end{aligned} \tag{3.36}$$

При $\varepsilon_0(x)\equiv 1$, $p_i(x)\equiv 0$, $i=1,2$, находим, что $\nabla\tau(x) = \mathbf{e}_1$, $Q(x)=1$, $\mathbf{a}(x) = -\mathbf{e}_2/2$, $\alpha_E^2(x) = -\mathbf{e}_3/2$, $\alpha_E^2(x)\times\mathbf{a}(x) = \mathbf{e}_1/4$. В этом случае главная часть R_0 дифференциального оператора R является x_1-гиперболическим оператором:

$$R_0\tilde{\psi} = \frac{1}{4}(-\tilde{\psi}_{x_1x_1} + \tilde{\psi}_{x_2x_2} + \tilde{\psi}_{x_3x_3}).$$

Так как в общем случае $(\varepsilon_0, k, p_i) \in \Lambda(q_0, d)$, при достаточно малых значениях параметра q_0 оператор R является также равномерно x_1-гиперболическим оператором. Поэтому имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde\psi\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &\le C\Big(\|R\tilde\psi\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{|\xi|\le 1} \|D^\xi\tilde\psi\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\Big), \\ \|\tilde\psi\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} &\le C\Big(\|R\tilde\psi\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \sum_{|\xi|\le 2} \|D^\xi\tilde\psi\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\Big). \end{aligned} \tag{3.37}$$

В силу формулы (3.33) и принадлежности носителя функции $\tilde p$ области Ω последняя из оценок легко приводится к виду

$$\|\tilde\psi\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le C\big(\|R\tilde\psi\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)}\big). \tag{3.38}$$

В то же время очевидно, что

$$\|R\tilde\psi\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\big\|\Delta\tilde\alpha_H(x) + \nabla\tilde p(x)\times\alpha_E^2(x)\big\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \tag{3.39}$$

Поэтому из формулы (3.35) выводим неравенство

$$\begin{aligned} \|\tilde\psi\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le C\big(q_0^2\|\tilde\psi\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} \\ + \|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\tilde g_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde h_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big). \end{aligned} \tag{3.40}$$

При выполнении условия $Cq_0^2 < 1$ отсюда получаем оценку

$$\|\tilde\psi\|^2_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le C\big(\|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\tilde g_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde h_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big), \tag{3.41}$$

которая с учетом формулы (3.34) приводит к формуле

$$\|\tilde p\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\big(\|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\tilde g_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\tilde h_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big), \tag{3.42}$$

совпадающей с точностью до обозначений с формулой (1.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzi A., Messina F. Romanov V. G.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // Appl. Anal. 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.
2. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Appl. Anal. 2010. V. 89, N 3. P. 377–390.
3. *Бухгейм А. Л., Клибанов М. В.* Единственность в целом одного класса многомерных обратных задач // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 2. С. 269–272.
4. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязко-упругости // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. С. 246–253.
5. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1323–1338.
6. *Романов В. Г.* Оценки решения одного дифференциального неравенства // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 626–635.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 29 марта 2011 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru