Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.21

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

А. Н. Тихомиров

Аннотация. При выполнении условия Линдеберга доказана сходимость математического ожидания эмпирической спектральной функции распределения произведения двух прямоугольных независимых случайных матриц с независимыми элементами к некоторому распределению в единичном круге комплексной плоскости. Получено явное выражение плотности предельного распределения.

Ключевые слова: случайная матрица, спектральная функция распределения, круговой закон, произведение случайных матриц.

1. Введение и формулировка результата

Пусть для любых целых $n \geq 1$ и $p \geq 1$ случайные величины $X_{ij}^{(1)}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, и $X_{lk}^{(2)}$, $1 \leq l \leq p$, $1 \leq k \leq n$, определены на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega_n, \mathbb{F}_n, \Pr\}$. Будем предполагать, что все случайные величины независимы в совокупности и

$$\mathbf{E}X_{ij}^{(\nu)} = 0, \quad \mathbf{E}\bigl|X_{ij}^{(\nu)}\bigr|^2 = 1 \tag{1.1}$$

для $\nu = 1, 2$ и всех возможных значений i и j. Иногда нам удобно будет использовать обозначения $p_0 = n$, $p_1 = p$, $p_2 = n$. Определим для $\nu = 1, 2$ матрицы

$$\mathbf{X}^{(\nu)} = \frac{1}{\sqrt{p_{\nu-1}}} \begin{pmatrix} X_{11}^{(\nu)} & X_{12}^{(\nu)} & \cdots & X_{1p_\nu}^{(\nu)} \\ X_{21}^{(\nu)} & X_{22}^{(\nu)} & \cdots & X_{2p_\nu}^{(\nu)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{p_{\nu-1}1}^{(\nu)} & X_{p_{\nu-1}2}^{(\nu)} & \cdots & X_{p_{\nu-1}p_\nu}^{(\nu)} \end{pmatrix}.$$

Положим $\mathbf{W} = \mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)}$. Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ собственные числа матрицы $\mathbf{W}$ и определим ее эмпирическую спектральную функцию распределения

$$\mathscr{F}_n(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I\{\operatorname{Re}\lambda_k \leq x, \operatorname{Im}\lambda_k \leq y\},$$

где $I\{B\}$ означает индикатор события B. Нас будет интересовать асимптотическое поведение функции распределения $F_n(x, y) := \mathbf{E}\mathscr{F}_n(x, y)$ при $n \to \infty$ в предположении, что $p = p(n)$ меняется вместе с n так, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p} = q > 0. \tag{1.2}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00310–а) и гранта РФФИ–ННИО № 09–01–91331–а.

Не умаляя общности, будем считать в дальнейшем, что $0 < q \le 1$. В противном случае можно рассмотреть матрицу $\mathbf{W}' = \mathbf{X}^{(2)}\mathbf{X}^{(1)}$. В случае квадратных матриц ($q = 1$) асимптотика спектра произведения произвольного числа матриц найдена в работах [1, 2], где показано, что предельным распределением собственных чисел произведения m независимых квадратных случайных матриц с независимыми элементами является m-я степень равномерного распределения в единичном круге. В случае $m = 1$ этот результат известен как круговой закон для случайных матриц, историю которого можно найти, например, в работах [3] или [4]. Основной результат настоящей заметки представляет следующая

Теорема 1.1. *Пусть для случайных величин* $X_{ij}^{(\nu)}$, $i = 1, \dots, p_{\nu-1}$, $j = 1, \dots, p_\nu$, *выполнены условия* (1.2) *и* (1.1). *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x,y) = G_q(x,y), \tag{1.3}$$

где функция распределения $G_q(x,y)$ *имеет плотность*

$$g_q(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{(1-q)^2 + 4q(x^2+y^2)}} I\{x^2+y^2 \le 1\}.$$

Замечание 1.1. В работе [2] приведено доказательство того, что распределение вещественной и мнимой частей нормированного произведения m независимых случайных квадратных матриц сходится при наличии второго момента у элементов матриц к предельному распределению с плотностью

$$h_m(x,y) = \frac{1}{\pi m (x^2+y^2)^{\frac{m-1}{m}}}.$$

В частности, плотность предельного распределения вещественной и мнимой частей собственных чисел произведения двух независимых случайных матриц определяется равенством

$$h_2(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} I\{x^2+y^2 \le 1\} = g_1(x,y).$$

На рис. 1, 2 приведены результаты моделирования случайных матриц. На рис. 1 даны собственные числа произведения квадратных матриц (слева) и прямоугольных матриц с параметром $q = \frac{1}{2}$ (справа). На рис. 2 даны гистограммы распределения модуля собственных чисел при тех же параметрах. На левом рисунке хорошо видно, что результаты моделирования согласуются с равномерным распределением на отрезке $[0,1]$, которое вытекает из вида $h_2(x,y)$. На правом рисунке видно согласование с плотностью $p(r) = \frac{2r}{\sqrt{(1-q)^2+4r^2q}}$, которая следует из вида плотности $g_q(x,y)$.

Дальнейшее изложение в настоящей заметке посвящено доказательству теоремы 1.1. Метод доказательства основан на идеях, восходящих к работе [5] и развитых в [2, 3]. Будем доказывать сходимость логарифмического потенциала математического ожидания эмпирической спектральной меры

$$U_n(z) = -\frac{1}{n}\mathbf{E}\sum_{j=1}^{n} \log|\lambda_j - z|, \tag{1.4}$$

определенного для всех, за исключением, может быть, конечного числа точек $z \in \mathbb{C}$, к логарифмическому потенциалу предельной меры μ на комплексной

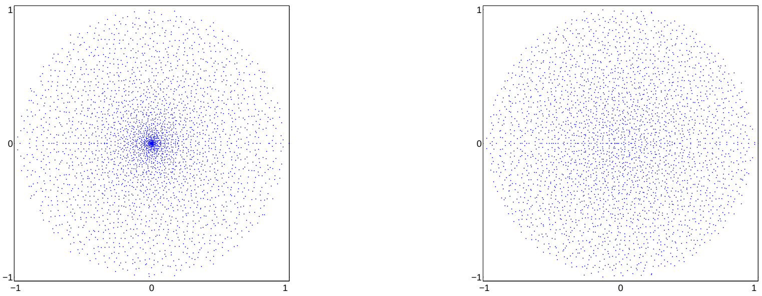

Рис. 1. Собственные числа произведения двух матриц.

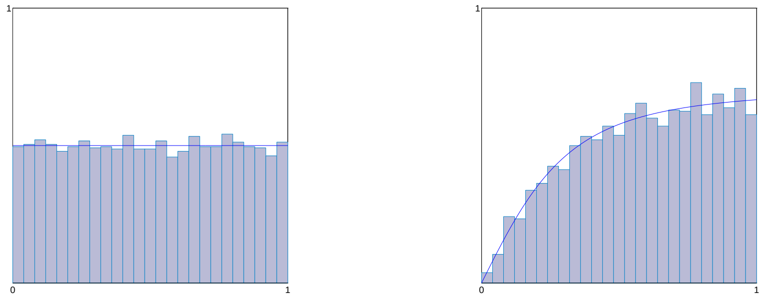

Рис. 2. Гистограмма абсолютных величин собственных чисел произведения двух матриц.

плоскости (которой соответствует функция распределения $G_q(x,y)$), определенному для $z = x + iy$:

$$U_\mu(z) = -\int \log|\zeta - z|\,d\mu(\xi,\eta), \tag{1.5}$$

где $\zeta = \xi + i\eta$. Для любой матрицы $\mathbf{A}$ символом $\mathbf{A}^*$ будем обозначать комплексно сопряженную и транспонированную матрицу $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$). Введем в рассмотрение матрицу $\mathbf{W}(z) = \mathbf{W} - z\mathbf{I}_n$, где $\mathbf{I}_n$ означает единичную матрицу порядка n. Пусть $s_1(z) \geq \dots \geq s_n(z)$ — сингулярные числа матрицы $\mathbf{W}(z)$ ($s_1^2(z),\dots,s_n^2(z)$ — собственные числа матрицы $\mathbf{V}(z) := \mathbf{W}(z)\mathbf{W}^*(z)$). Следуя [5], мы можем представить $U_n(z)$ в виде

$$U_n(z) = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \log s_j(z). \tag{1.6}$$

Пусть далее $\mathscr{H}_n(z,x)$ означает эмпирическую функцию распределения собственных чисел матрицы $\mathbf{V}(z)$ (равномерное распределение на множестве чисел $\{s_1^2(z),\dots,s_n^2(z)\}$) и $H_n(z,x) = \mathbf{E}\mathscr{H}_n(z,x)$. Перепишем представление (1.6) в виде

$$U_n(z) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \log x\,dH_n(z,x). \tag{1.7}$$

Задача изучения асимптотики логарифмического потенциала $U_n(z)$ сводится к изучению асимптотики функции распределения $H_n(z,x)$ и сингулярностей в нуле и на бесконечности в интеграле в правой части (1.7). В разд. 2 приведем анализ асимптотики $H_n(z,x)$.

2. Сходимость функций распределения $H_n(z,x)$

Для доказательства сходимости функций распределения $H_n(z,x)$ будем использовать метод преобразования Стилтьеса, введенный в теорию случайных матриц В. А. Марченко и Л. А. Пастуром в [6].

Определение 2.1. Пусть ξ — вещественная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. *Преобразованием Стилтьеса случайной величины* ξ (функции распределения $F(x)$) называется функция $s(\alpha)$ комплексного аргумента $\alpha = u + iv$, определенная для всех α с $v \neq 0$ равенством

$$s(\alpha) = \mathbf{E}\frac{1}{\xi - \alpha} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-\alpha}\, dF(x). \tag{2.1}$$

Преобразование Стилтьеса $s_n(z,\alpha)$ функции распределения $H_n(z,\cdot)$ легко выразить через резольвентную матрицу

$$\mathbf{R}(z,\alpha) = (\mathbf{V}(z) - \alpha\mathbf{I}_n)^{-1}. \tag{2.2}$$

Именно,

$$s_n(z,\alpha) = \frac{1}{n}\mathbf{E}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_j^2(z) - \alpha} = \frac{1}{n}\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}(z,\alpha). \tag{2.3}$$

2.1. Симметризация. Пусть $\xi \geq 0$ — неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Определим случайную величину $\eta := \varepsilon\sqrt{\xi}$ и обозначим ее функцию распределения через $\widetilde{F}(x)$. Очевидно, что

$$\widetilde{F}(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} x F(x^2)) \tag{2.4}$$

и

$$F(x) = \begin{cases} 2\widetilde{F}(\sqrt{x}) - 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Таким образом, определенное выше преобразование неотрицательных случайных величин устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями распределения неотрицательной случайной величины и функцией распределения преобразованной случайной величины, симметрично распределенной относительно нуля. Применим это преобразование к функции распределения $H_n(z,x)$. Преобразованная функция распределения является математическим ожиданием равномерного распределения на множестве $\{\pm s_1(z), \dots, \pm s_n(z)\}$. В свою очередь, нетрудно видеть, что множество чисел $\{\pm s_1(z), \dots, \pm s_n(z)\}$ представляет собой множество собственных чисел матрицы

$$\mathbf{T}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{W}(z) \\ \mathbf{W}(z)^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{O}$ означает матрицу с нулевыми элементами. Кроме того, имеет место равенство

$$U_n(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \log|x|\, d\widetilde{H}_n(z,x), \tag{2.7}$$

где $\widetilde{H}_n(z,x)$ — симметризация функции распределения $H_n(z,x)$. Вместо функции распределения $H_n(z,x)$ будем рассматривать меру $\widetilde{H}_n(z,x)$, а вместо матрицы $\mathbf{V}(z)$ — матрицу $\mathbf{T}(z)$ и ее резольвенту

$$\widetilde{R}(z,\alpha) := (\mathbf{T}(z) - \alpha \mathbf{I}_{2n})^{-1}. \tag{2.8}$$

Соответственно преобразование Стилтьеса функции распределения $\widetilde{H}_n(z,\cdot)$ может быть представлено в виде

$$\tilde{s}_n(z,\alpha) = \frac{1}{2n}\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,\widetilde{\mathbf{R}}(z,\alpha). \tag{2.9}$$

Чтобы не загромождать обозначения, будем опускать в дальнейшем символы $\widetilde{\cdot}$ и z и вместо $\mathbf{R}(z,\alpha)$ будем писать просто $\mathbf{R}$. Кроме того, введем обозначения

$$t_n(z,\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_{j+n,j}, \quad v_n(z,\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_{j,j+n}. \tag{2.10}$$

2.2. Асимптотика функции распределения $H_n(z,x)$.

Теорема 2.1. *В условиях теоремы* 1.1 *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(z,\alpha) = s(z,\alpha),$$

где преобразование Стилтьеса $s(z,\alpha)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$(w-\alpha)^2 s(z,\alpha) + (w-\alpha) - |z|^2 s(z,\alpha) = 0,$$
$$1 + ws(z,\alpha) + s^2(z,\alpha)(1 - q - qws(z,\alpha)) = 0.$$

Доказательство. При доказательстве сходимости математического ожидания эмпирической спектральной функции распределения матрицы $\mathbf{T}$ будем считать, что случайные величины удовлетворяют дополнительному условию

$$\big|X_{jl}^{(\nu)}\big| \le \tau_n\sqrt{n}, \tag{2.11}$$

где последовательность τ_n стремится к 0 так, что $\tau_n\sqrt{n} \to \infty$. Возможность такого предположения показана в приложении (разд. 5.1). (В разд. 5.1 показано, что усечение не меняет предельного распределения в более общих условиях, нежели одинаковая распределенность элементов матрицы.) Для исследования асимптотики $s_n(z,\alpha)$ воспользуемся известным легко проверяемым резольвентным равенством

$$\mathbf{I}_{2n} + \alpha\mathbf{R} = \mathbf{TR}. \tag{2.12}$$

Из него, в частности, следует, что

$$1 + \alpha s_n(\alpha) = \frac{1}{2n}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{TR}. \tag{2.13}$$

Введем в рассмотрение дополнительные матрицы:

$$\mathbf{H}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{O}_{n\times p} \\ \mathbf{O}_{n\times p} & \mathbf{X}^{(2)*} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(2)} & \mathbf{O}_{p\times n} \\ \mathbf{O}_{p\times n} & \mathbf{X}^{(1)*} \end{pmatrix}$$

и

$$\mathbf{J}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{n\times n} & z\,\mathbf{I}_n \\ \bar{z}\,\mathbf{I}_n & \mathbf{O}_{n\times n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}(1).$$

Здесь символом $\mathbf{O}_{k\times m}$ обозначена прямоугольная матрица размера $k\times m$ с нулевыми элементами. Во введенных обозначениях имеем следующее представление для матрицы $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J} - \mathbf{J}(z). \tag{2.14}$$

Используя последнее представление, перепишем равенство (2.13) в виде

$$\begin{aligned} 1 + s_n(\alpha) &= \frac{1}{2n\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}X_{jk}^{(1)}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{kj} \\ &+ \frac{1}{2n\sqrt{p}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}X_{kj}^{(2)}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k+p,j+n} - \frac{z}{2}t_n(\alpha) - \frac{\bar{z}}{2}v_n(\alpha). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Для анализа асимптотики правой части будем использовать подход, предложенный в теории случайных матриц Л. А. Пастуром (см., например, [7]), а в области предельных теорем теории вероятностей восходящий к Стейну [8]. Этот подход основан на простом равенстве, справедливом для стандартной гауссовской величины ξ и любой гладкой функции $f(x)$:

$$\mathbf{E}\xi f(\xi) = \mathbf{E}f'(\xi).$$

В случае, когда ξ негауссовская, но $E|\xi|^3 < \infty$, $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\mathbf{E}|\xi^2| = 1$, имеем

$$\mathbf{E}\xi f(\xi) = \mathbf{E}f'(\xi) + \varepsilon, \tag{2.16}$$

где $\varepsilon = \mathbf{E}(1-\tau)\xi^3 f''(\tau\xi) - \mathbf{E}\xi f''(\tau\xi)$, а τ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ и не зависящая от ξ. Будем применять эту формулу к слагаемым в правой части равенства (2.15), а общую погрешность будем обозначать через $\varepsilon(\alpha)$ и дадим ее оценку в приложении (лемма 5.6), поскольку она носит чисто технический характер.

Введем в рассмотрение векторы $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ — базис пространства $\mathbb{R}^n$ — и векторы $\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_p$ — базис пространства $\mathbf{R}^p$. Из определения матриц $\mathbf{H}^{(\nu)}$ для $\nu = 1,2$ следует, что для $j = 1,\dots,n$ и $k = 1,\dots,p$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial X_{jk}^{(1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{e}_j\mathbf{g}_k^T, \quad \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}}{\partial X_{jk}^{(1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{g}_{k+p}\mathbf{e}_{j+n}^T, \\ &\frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial X_{kj}^{(2)}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\,\mathbf{e}_{j+n}\mathbf{g}_{k+p}^T, \quad \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}}{\partial X_{kj}^{(2)}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\,\mathbf{g}_k\mathbf{e}_j^T. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Используя формулу дифференцирования резольвенты (см., например, [7]), придем к равенствам

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]}{\partial X_{jk}^{(1)}} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{g}_{k+p}\mathbf{e}_{j+n}^T\mathbf{J}\mathbf{R} - \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{e}_j\mathbf{g}_k^T\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R} \\ &- \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{g}_{k+p}\mathbf{e}_{j+n}^T\mathbf{J}\mathbf{R}, \\ \frac{\partial[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]}{\partial X_{jk}^{(2)}} &= \frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{g}_k\mathbf{e}_j^T\mathbf{J}\mathbf{R} - \frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{e}_{j+n}\mathbf{g}_{k+p}^T\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R} \\ &- \frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{g}_k\mathbf{e}_j^T\mathbf{J}\mathbf{R}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Соотношения (2.15), (2.16) и (2.18) влекут равенство

$$1+\alpha s_n(\alpha) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - \frac{1}{2}(zt_n(\alpha)+\bar{z}v_n(\alpha)) + \varepsilon_n(\alpha), \tag{2.19}$$

где

$$A_1 = -\frac{1}{2n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}]_{kj}^2,$$

$$A_2 = -\frac{1}{2n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JRH}^{(1)}]_{k,k+p}[\mathbf{JR}]_{j,j+n},$$

$$A_3 = -\frac{1}{2np}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}]_{k+p,j+n}^2,$$

$$A_4 = -\frac{1}{2np}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JRH}^{(1)}]_{k+p,k}[\mathbf{JR}]_{j+n,j}.$$

Функция $\varepsilon_n(\alpha) := \varepsilon_n(z,\alpha)$ означает общую ошибку, возникающую при применении формулы (2.16) и, как следует из леммы 5.6,

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n(z,\alpha)=0,$$

причем сходимость равномерна по α в любой области, отделенной от вещественной оси. Будем обозначать в дальнейшем символом $\|\mathbf{A}\|_2$ норму Фробениуса матрицы $\mathbf{A}$, а символом $\|\mathbf{A}\|$ — операторную норму (максимальное сингулярное число).

Лемма 2.1. *В условиях теоремы* 1.1 *справедлива оценка*

$$|A_1|+|A_3| \le \frac{C(1+q)}{qnv^2}$$

с некоторой постоянной $C>0$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$|A_1|+|A_3| \le \frac{1}{2n^2}\mathbf{E}\|\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}\|_2^2.$$

Воспользуемся тем, что для любых матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ справедливо неравенство $\|\mathbf{AB}\|_2^2 \le \|\mathbf{B}\|^2\|\mathbf{A}\|_2^2$ и, кроме того, $\|\mathbf{JR}\| \le \frac{1}{v}$. Получим

$$|A_1|+|A_3| \le \frac{1}{2n^2v^2}\mathbf{E}\|\mathbf{H}^{(2)}\|_2^2. \tag{2.20}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathbf{E}\|\mathbf{H}^{(2)}\|_2^2 \le C(n+p). \tag{2.21}$$

Два последних соотношения завершают доказательство леммы. Лемма доказана.

Заметим, что

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[\mathbf{JR}]_{j+n,j} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[\mathbf{JR}]_{j,j+n} = s_n(\alpha). \tag{2.22}$$

Перейдем к изучению асимптотики A_2 и A_4. Приведем сначала вывод асимптотики A_2. Введем обозначения

$$B_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JRH}^{(1)}]_{k,k+p}, \quad B_2 = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JRH}^{(1)}]_{k+p,k}.$$

Лемма 2.2. *В условиях теоремы* 1.1 *справедливо неравенство*

$$\max\{|A_2+s_n(\alpha)B_1|,\ |A_4+s_n(\alpha)B_2|\} \le \frac{C}{nv^2}. \tag{2.23}$$

Доказательство леммы полностью повторяет доказательство лемм 7.4 и 7.6 в [2]. Применим неравенство Гёльдера. Получим

$$\begin{aligned}|A_2+s_n(\alpha)B_1| \le \mathbf{E}^{\frac12}\Bigg(\sum_{j=1}^n R_{jj}-\mathbf{E}\sum_{j=1}^n R_{jj}\Bigg)^2 \\ \times\mathbf{E}^{\frac12}\Bigg|\sum_{k=1}^p[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k,k+p}-\mathbf{E}\sum_{k=1}^p[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k,k+p}\Bigg|^2.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Применяя результаты лемм 5.3 и 5.4, получим требуемое. Лемма 2.2 доказана.

Остается изучить асимптотику B_1 и B_2. Опять используем тот же метод, что и при выводе равенства (2.19). С этой целью представим B_ν для $\nu=1,2$ в виде

$$B_1=\frac{1}{n\sqrt{p}}\sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^n\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k,j+n}X_{kj}^{(2)},\quad B_2=\frac{1}{n\sqrt{p}}\sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^n\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k+p,j}X_{jk}^{(1)}. \tag{2.25}$$

Используя равенства (2.16) и (2.18), получим

$$B_1=\frac1n\sum_{j=1}^n\mathbf{E}[\mathbf{J}\mathbf{R}]_{j,j+n}-B_{11}-B_{12}+\varepsilon_n(\alpha), \tag{2.26}$$

где

$$\begin{aligned}B_{11}&=\frac{1}{np}\sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^n\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k,j+n}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k+p,j+n},\\ B_{12}&=\frac{1}{np}\sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^n\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{kk}[\mathbf{J}\mathbf{R}]_{j,j+n}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Аналогично

$$B_2=\frac1n\sum_{j=1}^n\mathbf{E}[\mathbf{J}\mathbf{R}]_{j+n,j}-B_{21}-B_{22}+\varepsilon_n(\alpha), \tag{2.28}$$

где

$$\begin{aligned}B_{21}&=\frac{1}{np}\sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^n\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k+p,j}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k,j},\\ B_{22}&=\frac{1}{np}\sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^n\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k+p,k+p}[\mathbf{J}\mathbf{R}]_{j+n,j}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Аналогично леммам 2.1 и 2.2 получим, что

$$\begin{aligned}B_1&=s_n(\alpha)\Bigg(1-\frac1p\sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^n\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{kk}\Bigg)+\varepsilon_n(\alpha),\\ B_2&=s_n(\alpha)\Bigg(1-\frac1p\sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^n\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k+p,k+p}\Bigg)+\varepsilon_n(\alpha).\end{aligned} \tag{2.30}$$

Таким образом,

$$A_1 = -\frac{1}{2}s_n^2(\alpha)\left(1 - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{kk}\right) + \varepsilon_n(\alpha),$$
$$A_3 = -\frac{1}{2}s_n^2(\alpha)\left(1 - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k+p,k+p}\right) + \varepsilon_n(\alpha). \quad (2.31)$$

Из последних соотношений следует, что

$$A_1 + A_3 = -s_n^2(\alpha)\left(1 - \frac{1}{2p}\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}\right) + \varepsilon_n(\alpha). \quad (2.32)$$

Поскольку для любых матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ справедливо равенство $\mathrm{Tr}\,\mathbf{AB} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{BA}$, имеем

$$1 - \frac{1}{2p}\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)} = 1 - \frac{1}{2p}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}$$
$$= 1 - \frac{q}{2n}\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}(\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J} - \mathbf{J}(z))\mathbf{R} + \frac{1}{2p}\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{J}(z)\mathbf{R}. \quad (2.33)$$

Применяя резольвентное равенство, получим

$$1 - \frac{1}{2p}\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)} = 1 - q - q\alpha s_n(\alpha) + \frac{1}{2}(zt_n(\alpha) + \bar{z}v_n(\alpha)). \quad (2.34)$$

Подставим полученное соотношение в (2.32):

$$1 + \alpha s_n(\alpha) = -s_n^2(\alpha)(1 - q - q\alpha s_n(\alpha)) - \frac{1}{2}s_n^2(\alpha)(zt_n(\alpha) + \bar{z}v_n(\alpha)) + \varepsilon_n(\alpha). \quad (2.35)$$

Остается изучить асимптотику функций $t_n(\alpha)$ и $v_n(\alpha)$. Воспользовавшись вновь резольвентным равенством, можем написать равенство

$$\alpha t_n(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{j+n,j} - \frac{\bar{z}}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[\mathbf{J}\mathbf{R}]_{j+n,j}. \quad (2.36)$$

Используя представление (2.22) и раскрывая произведение матриц в правой части последнего равенства, имеем

$$\alpha t_n(\alpha) = \frac{1}{n\sqrt{p}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k+p,j}X_{kj}^{(2)} - \bar{z}s_n(\alpha). \quad (2.37)$$

Применяя равенства (2.16) и (2.18), получим

$$\alpha t_n(\alpha) = -D_1 - D_2 - \bar{z}s_n(\alpha) + \varepsilon_n(\alpha), \quad (2.38)$$

где

$$D_1 = \frac{1}{np}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k+p,j+n}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k+p,j},$$
$$D_2 = \frac{1}{np}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k+p,k}[\mathbf{J}\mathbf{R}]_{j,j}.$$

По лемме 2.1

$$|D_1| \le \frac{1+q}{qnv^2}. \quad (2.39)$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$|D_2 - t_n(\alpha)D_{21}| \le \frac{C}{nv^2}, \tag{2.40}$$

где

$$D_{21} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k+p,k}.$$

Доказательство неравенства (2.40) совпадает с доказательством лемм 7.4 и 7.6 в работе [2]. Аналогично

$$\alpha v_n(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{j,j+n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[\mathbf{J}\mathbf{R}]_{j,j+n}. \tag{2.41}$$

Далее,

$$\alpha v_n(\alpha) = -L_1 - L_2 - z s_n(\alpha) + \varepsilon_n(\alpha), \tag{2.42}$$

где

$$L_1 = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k,j}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k,j+n},$$

$$L_2 = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k,k+p}[\mathbf{J}\mathbf{R}]_{j+n,j+n}.$$

Наконец,

$$|L_2 - v_n(\alpha)L_{21}| \le \frac{C}{nv^2}, \tag{2.43}$$

где

$$L_{21} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k,k+p}.$$

Применяя снова равенства (2.16) и (2.18), получим

$$\begin{aligned} D_{21} &= s_n(\alpha) - \frac{1}{np}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k+p,j}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k,j} \\ &\quad - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k+p,k+p} s_n(\alpha) + \varepsilon_n(\alpha), \\ L_{21} &= s_n(\alpha) - \frac{1}{np}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k,j+n}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}]_{k+p,j+n} \\ &\quad - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k,k} s_n(\alpha) + \varepsilon_n(\alpha). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Лемма 2.1 и последнее равенство влекут

$$\begin{aligned} D_{21} &= s_n(\alpha) - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k+p,k+p} s_n(\alpha) + \varepsilon_n(\alpha), \\ L_{21} &= s_n(\alpha) - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k,k} s_n(\alpha) + \varepsilon_n(\alpha). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Используя блочную структуру матрицы $\mathbf{V}(z)$ и формулу обращения блочных матриц (см., например, [3, формула (2.5)]), можно показать, что

$$\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JRH}^{(1)}]_{k+p,k+p}=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JRH}^{(1)}]_{j+n,j+n}$$
$$=\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JRH}^{(1)}]_{k,k}=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JRH}^{(1)}]_{j,j}. \quad (2.46)$$

Равенства (2.38), (2.42), (2.39), (2.40), (2.45) совместно влекут

$$\frac{1}{2}\alpha(zt_n(\alpha)+\bar{z}v_n(\alpha))=(zt_n(\alpha)+\bar{z}v_n(\alpha))s_n(\alpha)\left(1-\frac{q}{2n}\sum_{j=1}^{2n}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}]_{jj}\right)$$
$$-|z|^2s_n(\alpha)+\varepsilon_n(\alpha). \quad (2.47)$$

В силу резольвентного равенства имеем

$$\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n}\mathbf{E}[\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}]_{jj}=1+\alpha s_n(\alpha)+(zt_n(\alpha)+\bar{z}v_n(\alpha)). \quad (2.48)$$

Учитывая (2.48) в (2.47), получим

$$\frac{1}{2}\alpha(zt_n(\alpha)+\bar{z}v_n(\alpha))=-\frac{1}{2}(zt_n(\alpha)+\bar{z}v_n(\alpha))s_n(\alpha)(1-q-q\alpha s_n(\alpha))$$
$$-\frac{1}{4}(zt_n(\alpha)+\bar{z}v_n(\alpha))^2s_n(\alpha)-|z|^2s_n(\alpha)+\varepsilon_n(\alpha). \quad (2.49)$$

Введем обозначение

$$P_n=\frac{1}{2}(zt_n(\alpha)+\bar{z}v_n(\alpha)). \quad (2.50)$$

Уравнения (2.35) и (2.49) перепишутся в виде

$$\begin{aligned}1+\alpha s_n(\alpha)&=-s_n^2(\alpha)(1-q-q\alpha s_n(\alpha))-P_n+s_n^2(\alpha)P_n+\varepsilon(\alpha),\\ \alpha P_n&=-s_n(1-y-y\alpha s_n(\alpha))P_n+s_n(\alpha)P_n^2-|z|^2s_n(\alpha)+\varepsilon(\alpha).\end{aligned} \quad (2.51)$$

Введем новую переменную, представив P_n в виде

$$P_n=(w-\alpha)s_n(\alpha). \quad (2.52)$$

Еще раз перепишем уравнения (2.51):

$$1+\alpha s_n(\alpha)=-s_n^2(\alpha)(1-q-q\alpha s_n(\alpha))-(w-\alpha)s_n(\alpha)+(w-\alpha)s_n^3(\alpha)+\varepsilon_n(\alpha),$$

$$\alpha(w-\alpha)s_n(\alpha)=-s_n^2(\alpha)(1-q-q\alpha s_n(\alpha))(w-\alpha)+s_n^3(\alpha)(w-\alpha)^2-|z|^2s_n(\alpha)+\varepsilon_n(\alpha).$$

Простые выкладки приводят указанную систему к виду

$$\begin{aligned}1+ws_n(\alpha)+s_n^2(\alpha)(1-q-qws_n(\alpha))&=\varepsilon_n(\alpha),\\ (w-\alpha)^2s_n(\alpha)+(w-\alpha)-|z|^2s_n(\alpha)&=\varepsilon_n(\alpha).\end{aligned} \quad (2.53)$$

Переходя к пределу в равенствах (2.53), получим требуемое. Теорема 2.1 доказана полностью.

3. Сходимость логарифмического потенциала

В этом разделе покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} U_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log s_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \log|x|\, dH(z,x).$$

Положим

$$\Delta_n(z) := \sup_x |H_n(z,x) - H(z,x)|,$$

где $H(z,x) = \lim\limits_{n\to\infty} H_n(z,x)$ — функция распределения, имеющая преобразование Стилтьеса $s(z,\alpha)$, определенное в теореме 2.1. В силу теоремы 2.1 $\Delta_n(z)\to 0$ при $n\to\infty$. Пусть $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ — число, выбор которого описан в работе [2, предложение 5.1]. Потенциал $U_n(z)$ представим в виде

$$U_n(z) = U_n^{(1)}(z) + U_n^{(2)}(z) + U_n^{(3)}(z) + U_n^{(4)}(z),$$

где

$$U_n^{(1)}(z) = \frac{1}{n}\sum_{j=n-n^\gamma}^{n} \log s_j(z), \quad U_n^{(2)}(z) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{1\le j\le n-n^\gamma:\\ s_j(z)\le\Delta_n(z)}} \log s_j(z),$$

$$U_n^{(3)}(z) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{1\le j\le n-n^\gamma:\\ \Delta_n(z)\le s_j(z)\le\Delta_n^{-1}(z)}} \log s_j(z), \quad U_n^{(4)}(z) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{1\le j\le n-n^\gamma:\\ \Delta_n^{-1}(z)\le s_j(z)}} \log s_j(z).$$

Прежде всего заметим, что, поскольку функция $\log x/x^2$ монотонно убывает при $x > \sqrt{e}$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\left|U_n^{(4)}(z)\right| &\le \frac{\Delta_n^2(z)\log^2\{\Delta_n^{-1}(z)\}}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}s_j^2(z) = \frac{\log^2\{\Delta_n^{-1}(z)\}\Delta_n^2(z)}{n}\mathbf{E}\|\mathbf{V}\|_2^2\\ &\le C\log^2\{\Delta_n^{-1}(z)\}\Delta_n^2(z)\to 0, \quad \text{когда} \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, нетрудно получить оценку

$$\left|U_n^{(3)}(z) - \int_{\Delta_n(z)}^{\Delta_n^{-1}(z)} \log x\, dH(z,x)\right| \le C\log\{\Delta_n^{-1}(z)\}\Delta_n(z)\to 0, \quad \text{когда } n\to\infty.$$

Для того чтобы оценить $U_n^{(1)}(z)$ и $U_n^{(2)}(z)$, нужны оценки для младших сингулярных чисел произведения матриц. Такие оценки получены в [2] (см. лемму 5.2) для квадратных матриц. Мы сведем задачу оценки сингулярных чисел произведения прямоугольных матриц к задаче оценки соответствующих сингулярных чисел прямоугольных матриц. Введем следующее представление для матриц $\mathbf{X}^{(\nu)}$, $\nu = 1,2$:

$$\mathbf{X}^{(1)} = (\,\mathbf{Y}^{(1)} \quad \mathbf{Z}^{(1)}\,),$$
$$\mathbf{X}^{(2)} = (\,\mathbf{Y}^{(2)} \quad \mathbf{Z}^{(2)}\,)^T.$$

Здесь $\mathbf{Y}^{(\nu)}$, $\nu = 1,2$, — квадратные матрицы порядка $n\times n$, а $\mathbf{Z}^{(\nu)}$, $\nu = 1,2$, — прямоугольные матрицы порядка $n\times(p-n)$. Матрицы $\mathbf{Y}^{(\nu)}$, $\mathbf{Z}^{(\nu)}$, $\nu = 1,2$, независимы. Во введенных обозначениях имеет место равенство

$$\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{Y}^{(1)}{\mathbf{Y}^{(2)}}^T + \mathbf{Z}^{(1)}{\mathbf{Z}^{(2)}}^T.$$

Положим $\mathbf{M}_n = {\mathbf{Y}^{(1)}}^{-1}(\mathbf{Z}^{(1)}{\mathbf{Z}^{(2)}}^T - z\mathbf{I})$. Запишем

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{Y}^{(1)}({\mathbf{Y}^{(2)}}^T + \mathbf{M}_n).$$

Важно отметить, что матрицы $\mathbf{Y}^{(2)}$ и $\mathbf{M}_n$ независимы. Применяя результаты для квадратных матриц, полученные в работе [2], придем к соотношениям для $\nu = 1, 2$

$$\lim_{n\to\infty} U_n^{(\nu)} = 0.$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Delta_n(z)}^{\Delta_n^{-1}(z)} \log x\, dH(z,x) = \int\limits_0^\infty \log x\, dH(z,x).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} U_n(z) = U(z) := \int\limits_{0+}^\infty \log x\, dH(z,x).$$

4. Идентификация логарифмического потенциала

Осталось показать, что $U(x,y) := U(z)$, $z = x+iy$, является логарифмическим потенциалом меры $\mu(x,y)$ с плотностью $p(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{(1-q)^2+4q(x^2+y^2)}}$. Для этого достаточно установить, что

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\Delta U(x,y), \tag{4.1}$$

где $\Delta U(x,y) = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}$. Чтобы вычислить оператор Лапласа от функции $U(x,y)$, сначала найдем $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$. Для этого достаточно повторить рассуждения из [2, § 4]. Более того, второе уравнение в системе (2.53) совпадает со вторым уравнением, описывающим преобразование Стилтьеса предельной меры $\mu(z,\cdot)$ в [2]. Поскольку коэффициенты первого уравнения не зависят от u ($\alpha = u+iv$) и x, немедленно получим

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = -\frac{x}{2|z|^2}(1+\sqrt{1-4|z|^2\Delta^2(0)}),$$

где

$$\Delta(u) := is(z,iu) = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{i}{\varkappa - iu}\, dH(z,\varkappa).$$

Из уравнений

$$1 + ws(z,\alpha) + s^2(z,\alpha)(1-q-qws(z,\alpha)) = 0,$$
$$(w-\alpha)^2 s(z,\alpha) + (w-\alpha) - |z|^2 s(z,\alpha) = 0$$

находим при $\alpha = 0$, что

$$1+\sqrt{1+4|z|^2\Delta(0)} = \begin{cases} 2, & \text{если } x^2+y^2>1,\\ -\frac{x}{2q|z|^2}(\sqrt{(1-q)^2+4|z|^2q}-(1-q)), & \text{если } x^2+y^2\le 1.\end{cases}$$

Учитывая, что зависимость $U(x,y)$ от своих аргументов симметрична, легко вычислить лапласиан. Имеем

$$\Delta U(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x^2+y^2>1,\\ \frac{2}{\sqrt{(1-q)^2+4|z|^2q}}, & \text{если } x^2+y^2\le 1.\end{cases} \tag{4.2}$$

Равенства (4.2) и (4.1) вместе завершают доказательство теоремы. Теорема 1.1 доказана.

5. Приложения

Основная цель этого раздела — оценка погрешности в уравнении (2.16), которая приведена в лемме 5.6. Для этой оценки нам потребуются моменты выше второго порядка у элементов матриц. Поэтому сначала приведем обоснование возможности модификации элементов матриц с помощью усечения и центрирования без изменения асимптотики. Полные и подробные доказательства приведены в работе [2, §17]. Здесь ограничимся лишь формулировками и ссылками. Помимо оценки остаточного члена в формуле (5.17) нужны оценки дисперсий следа резольвенты и следа матрицы $\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}$ для исследования асимптотики сумм A_1 и A_3 в лемме 2.2, B_1, B_2 в равенстве (2.30) и D_2, L_2 в неравенствах (2.40), (2.41). Дадим их в леммах 5.3 и 5.4.

5.1. Усечение. Покажем, что элементы случайных матриц $\mathbf{X}^{(\nu)}$ можно заменить усеченными и центрированными элементами без изменения асимптотического поведения функций $H_n(z,x)$. Покажем это при выполнении условия Линдеберга: для любого $\tau>0$

$$L_n(\tau)=\max_{\nu=1,2}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{p_{\nu-1}}\sum_{k=1}^{p_\nu}\mathbf{E}\bigl|X_{jk}^{(\nu)}\bigr|^2 I\bigl\{\bigl|X_{jk}^{(\nu)}\bigr|\ge\tau\sqrt{n}\bigr\}\to 0,\quad \text{когда}\quad n\to\infty. \tag{5.1}$$

Легко видеть, что условие Линдеберга следует из равномерной интегрируемости случайных величин с квадратом и тем более из одинаковой распределенности и конечности второго момента. Введем случайные величины $X_{jk}^{(\nu,c)}=X_{jk}^{(\nu)}I_{\{|X_{jk}^{(\nu)}|\le c\tau_n\sqrt{n}\}}$ с $\tau_n\to 0$ и матрицу $\mathbf{X}^{(\nu,c)}:=\frac{1}{\sqrt{n}}\bigl(X_{jk}^{(\nu,c)}\bigr)$. Обозначим через $s_1^{(c)}\ge\cdots\ge s_n^{(c)}$ сингулярные числа случайной матрицы $\mathbf{W}^{(c)}(z):=\mathbf{X}^{(1,c)}\mathbf{X}^{(2,c)}-z\mathbf{I}$. Пусть $\mathbf{V}^{(c)}:=\begin{pmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{W}^{(c)}\\ \mathbf{W}^{(c)*} & \mathbf{O}\end{pmatrix}$. Определим эмпирическую спектральную функцию распределения случайной матрицы $\mathbf{V}^{(c)}$ символом

$$\widetilde{\mathscr{F}}_n^{(c)}(x)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}I\bigl\{s_k^{(c)}\le x\bigr\}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}I\bigl\{-s_k^{(c)}\le x\bigr\}.$$

Пусть $s_n(\alpha,z)$ и $s_n^{(c)}(\alpha,z)$ — преобразование Стилтьеса функций распределения $\widetilde{F}_n(x)$ и $\widetilde{F}_n^{(c)}(x)=\mathbf{E}\widetilde{\mathscr{F}}_n^{(c)}(x)$ соответственно. Определим резольвентные матрицы $\mathbf{R}=(\mathbf{V}-\alpha\mathbf{I})^{-1}$ и $\mathbf{R}^{(c)}=(\mathbf{V}^{(c)}-\alpha\mathbf{I})^{-1}$, где $\mathbf{I}$ означает единичную матрицу соответствующей размерности. Заметим, что

$$s_n(z,\alpha)=\frac{1}{2n}\mathbf{E}\operatorname{Tr}\mathbf{R},\quad s_n^{(c)}(z,\alpha)=\frac{1}{2n}\mathbf{E}\operatorname{Tr}\mathbf{R}^{(c)}.$$

Применяя резольвентное равенство

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\alpha\mathbf{I})^{-1}=(\mathbf{A}-\alpha\mathbf{I})^{-1}-(\mathbf{A}-\alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\alpha\mathbf{I})^{-1},$$

получим

$$\bigl|s_n^{(m)}(z,\alpha)-s_n^{(c)}(z,\alpha)\bigr|\le\frac{1}{2n}\mathbf{E}|\operatorname{Tr}\mathbf{R}^{(c)}(\mathbf{V}-\mathbf{V}^{(c)})\mathbf{J}\mathbf{R}|. \tag{5.2}$$

Далее,

$$\mathbf{V}-\mathbf{V}^{(c)}=(\mathbf{H}^{(1)}-\mathbf{H}^{(1,c)})\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}+\mathbf{H}^{(1,c)}(\mathbf{H}^{(2)}-\mathbf{H}^{(2,c)})\mathbf{J}, \tag{5.3}$$

где для $\nu = 1, 2$

$$\mathbf{H}^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(\nu)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{X}^{(3-\nu)*} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}^{(\nu,c)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(\nu,c)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{X}^{(3-\nu,c)*} \end{pmatrix}.$$

Применяя неравенство $\max\{\|\mathbf{R}\|, \|\mathbf{R}^{(c)}\|\} \le v^{-1}$, неравенство (5.2) и представления (2.19), получим

$$l\big|s_n(z,\alpha) - s_n^{(c)}(z,\alpha)r\big| \le \frac{C}{\sqrt{n}}\big(\mathbf{E}^{\frac12}\|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(1,c)}\|_2^2 + \mathbf{E}^{\frac12}\|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(1,c)}\|_2^2\big)$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{n}}\big(\mathbf{E}^{\frac12}\|\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{R}^{(c)}\|_2^2 + \mathbf{E}^{\frac12}\|\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{R}^{(c)}\mathbf{H}^{(1,c)}\|_2^2\big). \quad (5.4)$$

Воспользуемся неравенством для матричных норм $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|_2$. Получим оценки

$$\mathbf{E}\|\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{R}^{(c)}\mathbf{H}^{(1,c)}\|_2^2 \le \frac{C}{v^4}\mathbf{E}\|\mathbf{H}^{(1,c)}\|_2^2 \le \frac{Cn}{v^4},$$
$$\mathbf{E}\|\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{R}^{(c)}\|_2^2 \le \frac{C}{v^4}\mathbf{E}\|\mathbf{H}^{(2)}\|_2^2 \le \frac{Cn}{v^4}. \quad (5.5)$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{1}{n}\mathbf{E}\|\mathbf{X}^{(\nu)} - \mathbf{X}^{(\nu,c)}\|_2^2 \le \frac{C}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}\mathbf{E}\big|X_{jk}^{(\nu)}\big|^2 I_{\{|X_{jk}^{(\nu)}| \ge c\tau_n\sqrt{n}\}} \le CL_n(\tau_n). \quad (5.6)$$

Неравенства (5.4)–(5.6) вместе влекут

$$\big|s_n(\alpha,z) - s_n^{(c)}(\alpha,z)\big| \le \frac{C\sqrt{L_n(\tau_n)}}{v^2}. \quad (5.7)$$

Далее, по определению $X_{jk}^{(c)}$ имеем

$$\big|\mathbf{E}X_{jk}^{(\nu,c)}\big| \le \frac{1}{c\tau_n\sqrt{n}}\mathbf{E}\big|X_{jk}^{(\nu)}\big|^2 I_{\{|X_{jk}| \ge c\tau_n\sqrt{n}\}}.$$

Это влечет для $\nu = 1, 2$ неравенство

$$\|\mathbf{E}\mathbf{X}^{(\nu,c)}\|_2^2 \le \frac{C}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\big|\mathbf{E}X_{jk}^{(\nu,c)}\big|^2 \le \frac{CL_n(\tau_n)}{c\tau_n^2}. \quad (5.8)$$

Введем обозначения

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{(\nu,c)} := \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(\nu,c)} - \mathbf{E}\mathbf{X}^{(\nu,c)}) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & (\mathbf{X}^{(\nu,c)} - \mathbf{E}\mathbf{X}^{(\nu,c)})^* \end{pmatrix}$$

и определим соответственно матрицы $\widetilde{\mathbf{W}}^{(c)}$, $\widetilde{\mathbf{V}}^{(c)}$. Обозначим через $\widetilde{\mathscr{F}}_n^{(c)}(x)$ эмпирическую функцию распределения квадратов сингулярных чисел матрицы $\widetilde{\mathbf{V}}^{(c)}$. Пусть $\tilde{s}_n^{(c)}(z)$ означает преобразование Стилтьеса функции распределения $\widetilde{F}_n^{(c)} = \mathbf{E}\widetilde{\mathscr{F}}_n^{(c)}$,

$$\tilde{s}_n^{(c)}(\alpha,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-\alpha}\,d\widetilde{F}_n^{(c)}(x).$$

Подобно неравенству (5.7) получим оценку

$$\big|s_n^{(c)}(\alpha,z) - \tilde{s}_n^{(c)}(\alpha,z)\big| \le \frac{C\sqrt{L_n(\tau_n)}}{\tau_n v^2} \le \frac{\tau_n}{v^2}. \quad (5.9)$$

Неравенства (5.7) и (5.9) вместе влекут, что матрицы $\mathbf{W}$ и $\widetilde{\mathbf{W}}^{(c)}$ имеют одинаковые асимптотические спектральные распределения. Не умаляя общности, можем считать что для $\nu = 1, 2$ и $j = 1, \ldots, p_{\nu-1}$, $k = 1, \ldots, p_\nu$

$$\mathbf{E}X_{jk}^{(\nu)} = 0, \quad \mathbf{E}{X_{jk}^{(\nu)}}^2 = 1 \quad \text{и} \quad \big|X_{jk}^{(\nu)}\big| \le c\tau_n\sqrt{n}, \tag{5.10}$$

где последовательность $\tau_n > 0$ выбрана так, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\tau_n)}{\tau_n^2} = 0.$$

В случае одинаково распределенных случайных величин в качестве τ_n можно выбрать любую последовательность $\tau_n \to 0$ такую, что $\tau_n\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$.

5.2. Оценка погрешности. Сначала приведем несколько вспомогательных лемм. Пусть $\mathbf{W} = \mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)}$.

Лемма 5.1. *В условиях теоремы* 1.1 *для любых* $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$ *имеет место равенство*

$$\mathbf{E}[\mathbf{W}]_{jk} = 0.$$

Доказательство. Прямые вычисления показывают, что

$$\mathbf{E}[\mathbf{W}]_{jk} = \frac{1}{\sqrt{np}} \sum_{l=1}^{p} \mathbf{E}X_{j,l}^{(1)} X_{l,k}^{(2)} = 0.$$

Лемма доказана.

Во всех леммах ниже предполагаем, что

$$\mathbf{E}X_{jk}^{(\nu)} = 0, \quad \mathbf{E}\big|X_{jk}^{(\nu)}\big|^2 = 1, \quad \big|X_{jk}^{(\nu)}\big| \le c\tau_n\sqrt{n} \quad \text{п. н.} \tag{5.11}$$

с $\tau_n = o(1)$ таким, что $\tau_n^{-2} L_n(\tau_n) = o(1)$.

Лемма 5.2. *В условиях теоремы* 1.1 *и предположении* (5.11) *имеет место равенство*

$$\mathbf{E}\|\mathbf{W}\|_2^2 \le Cn. \tag{5.12}$$

Доказательство. Прямые вычисления показывают, что

$$\mathbf{E}\|\mathbf{W}\|_2^2 \le \frac{C}{np} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[\sum_{l=1}^{p} X_{j,l}^{(1)} X_{l,k}^{(2)}\right]^2.$$

В силу независимости случайных величин получим $\mathbf{E}\|\mathbf{W}\|_2^2 \le Cn$. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *В условиях теоремы* 1.1 *и предположения* (5.11) *справедлива оценка*

$$\mathbf{E}\left|\frac{1}{n}(\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \mathbf{E}\operatorname{Tr}\mathbf{R})\right| \le \frac{C}{nv^2}.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие матрицы: для $j = 1, \ldots, n$

$$\mathbf{H}^{(1,j)} = \mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T\mathbf{H}^{(1)}, \quad \mathbf{H}^{(2,j)} = \mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(2)}\mathbf{e}_{j+n}\mathbf{e}_{j+n}^T$$

и для $k = 1, \dots, p$

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{(1,k)} = \mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(1)}\mathbf{g}_{k+p}\mathbf{g}_{k+p}^T, \quad \widetilde{\mathbf{H}}^{(2,k)} = \mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{g}_k\mathbf{g}_k^T\mathbf{H}^{(2)}.$$

Определим матрицы

$$\mathbf{V}^{(j)} = \mathbf{H}^{(1,j)}\mathbf{H}^{(2,j)}\mathbf{J}, \quad \widetilde{\mathbf{V}}^{(k)} = \widetilde{\mathbf{H}}^{(1,j)}\widetilde{\mathbf{H}}^{(2,k)}\mathbf{J}. \tag{5.13}$$

Пусть $\mathbf{V}^{(j)}(z) = \mathbf{V}^{(j)} - \mathbf{J}(z)$, $\widetilde{\mathbf{V}}^{(j)}(z) = \widetilde{\mathbf{V}}^{(j)} - \mathbf{J}(z)$. Будем использовать следующее неравенство. Для любых эрмитовых матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ справедливо неравенство

$$|\operatorname{Tr}(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})^{-1} - \operatorname{Tr}(\mathbf{B} - \alpha\mathbf{I})^{-1}| \le \frac{\operatorname{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{B})}{v}, \tag{5.14}$$

где $\alpha = u + iv$. Легко показать, что

$$\operatorname{rank}(\mathbf{V}(z) - \mathbf{V}^{(j)}(z)) = \operatorname{rank}(\mathbf{V} - \mathbf{V}^{(j)}) \le 4m. \tag{5.15}$$

Аналогично для матриц $\widetilde{\mathbf{V}}^{(k)}(z)$ и $\mathbf{V}(z)$. Неравенства (5.14) и (5.15) вместе влекут

$$\left|\frac{1}{2n}(\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \operatorname{Tr}\mathbf{R}^{(j)})\right| \le \frac{C}{nv}, \quad \left|\frac{1}{2n}(\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \operatorname{Tr}\widetilde{\mathbf{R}}^{(k)})\right| \le \frac{C}{nv},$$

где $\mathbf{R}^{(j)} = (\mathbf{V}^{(j)}(z) - \alpha\mathbf{I})^{-1}$ и $\widetilde{\mathbf{R}}^{(k)} = (\widetilde{\mathbf{V}}^{(k)}(z) - \alpha\mathbf{I})^{-1}$.

После этих замечаний мы можем воспользоваться стандартной процедурой мартингального разложения. Введем σ-алгебры $\mathscr{F}_j = \sigma\{X_{lk}^{(1)}, 1 \le j < l \le n, k = 1, \dots, n;\ X_{ik}^{(2)}, i = 1, \dots, p, k = 1, \dots, n\}$ и $\widetilde{\mathscr{F}_k} = \sigma\{X_{jl}^{(1)}, 1 \le j \le n, l = 1, \dots, p;\ X_{ir}^{(2)}, i = 1 < k \le \dots, p, r = 1, \dots, n\}$. Выпишем представление

$$\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \mathbf{E}\operatorname{Tr}\mathbf{R} = \sum_{j=1}^{n}(\mathbf{E}_{j-1}\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \mathbf{E}_{\nu,j}\operatorname{Tr}\mathbf{R}) + \sum_{k=1}^{p}(\widetilde{\mathbf{E}}_{k-1}\operatorname{Tr}\mathbf{R} - \widetilde{\mathbf{E}}_k\operatorname{Tr}\mathbf{R}),$$

где $\mathbf{E}_j$ — условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_j$ соответственно, $\widetilde{\mathbf{E}}_k$ — условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\widetilde{\mathscr{F}_k}$. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *В условиях теоремы* 1.1 *имеют место неравенства*

$$\mathbf{E}\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{p}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k,k+p} - \mathbf{E}\sum_{j=1}^{p}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k,k+p}\right)\right|^2 \le \frac{C}{nv^4}.$$

и

$$\mathbf{E}\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k,k} - \mathbf{E}\sum_{j=1}^{n}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}\mathbf{H}^{(1)}]_{k+p,k}\right)\right|^2 \le \frac{C}{nv^4}.$$

Доказательство подобно доказательству предыдущей леммы и повторяет доказательство леммы 7.6 работы [2]. $\square$

Лемма 5.5. *В условиях теоремы* 1.1 *существует постоянная* C *такая, что*

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\big(X_{jk}^{(1)} + (1-\theta_{jk})X_{jk}^{(1)^3}\big)\left[\frac{\partial^2\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{J}\mathbf{R}}{\partial X_{jk}^{(1)^2}}\big(\theta_{jk}^{(1)}X_{jk}^{(1)}\big)\right]_{kj}\right| \le C\tau_n v^{-4}$$

и

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(X_{kj}^{(2)}+(1-\theta_{kj})X_{kj}^{(2)^3}\right)\left[\frac{\partial^2(\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR})}{\partial X_{jk}^{(2)^2}}\left(\theta_{kj}^{(2)}X_{kj}^{(2)}\right)\right]_{k+p,j}\right|\le C\tau_n v^{-4}, \tag{5.16}$$

где $\theta_{jk}^{(1)}$, $\theta_{kj}^{(2)}$, $X_{jk}^{(1)}$ *и* $X_{kj}^{(2)}$ *независимы в совокупности и* $\theta_{jk}^{(1)}$, $\theta_{kj}^{(2)}$ *равномерно распределены на единичном интервале. Через* $\frac{\partial^2}{\partial X_{jk}^{(1)^2}}\mathbf{A}\big(\theta_{jk}^{(\alpha)}X_{jk}^{(\alpha)}\big)$ *обозначена матрица, полученная из* $\frac{\partial^2}{\partial X_{jk}^{(\alpha)^2}}\mathbf{A}$ *заменой* $X_{jk}^{(1)}$ *на* $\theta_{jk}^{(\alpha)}X_{jk}^{(1)}$.

Доказательство леммы чисто техническое. Полностью оно приведено в [2, лемма 7.7]. □

Лемма 5.6. *В условиях теоремы* 1.1

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_{jk}^{(1)}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}]_{kj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}\big[\mathbf{H}^{(2)}\partial X_{jk}^{(1)}\big]_{kj}+\varepsilon_n(z,\alpha)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}X_{k,j}^{(2)}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}]_{j+n,k}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left[\frac{\partial\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}}{\partial X_{kj}^{(2)}}\right]_{k+p,j}+\varepsilon_n(z,\alpha),$$

где $|\varepsilon_n(z,\alpha)|\le\frac{C\tau_n}{v^4}$.

Доказательство. Применим формулу

$$\mathbf{E}\xi f(\xi)=\mathbf{E}f'(\xi)+\varepsilon, \tag{5.17}$$

где $\varepsilon=\mathbf{E}(1-\tau)\xi^3f''(\tau\xi)-\mathbf{E}\xi f''(\tau\xi)$, а τ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ и не зависящая от ξ. Простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}X_{jk}^{(1)}[\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}]_{kj}&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}\left[\frac{\partial\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}}{\partial X_{jk}^{(1)}}\right]_{kj}\\&+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\mathbf{E}\big(-X_{jk}^{(\nu)}+\big(1-\theta_{jk}^{(1)}\big)X_{jk}^{(\nu)^3}\big)\left[\frac{\partial^2\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{JR}}{\partial X_{jk}^{(1)^2}}\big(\theta_{jk}^{(1)}X_{jk}^{(1)}\big)\right]_{kj}.\end{aligned}$$

Применяя лемму 5.5, получим требуемое. Лемма доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Д. А. Тимушеву за проведение компьютерных экспериментов и подготовку рисунков для статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев Н. В., Гётце Ф., Тихомиров А. Н.* О сингулярном спектре степеней и произведений случайных матриц // Докл. РАН. 2010. Т. 433, № 1. С. 7–9.
2. *Götze F., Tikhomirov A. N.* On the asymptotic spectrum of products of independent random matrices // ArXiv:1012.2710v2.
3. *Götze F., Tikhomirov A. N.* The circular law for random matrices // Ann. Probab. 2010. V. 38. P. 1444–1492.
4. *Tao T., Vu V.* Random matrices: Universality of ESDS and the circular law // Ann. Probab. 2010. V. 38. P. 2023–2065.
5. *Гирко В. Л.* Круговой закон // Теория вероятностей и ее применения. 1984. Т. 29, № 4. С. 694–706.

6. *Марченко В. А. Пастур Л. А.* Распределение собственных чисел в некоторых ансамблях случайных матриц // Мат. сб. 1967. Т. 72, № 4. С. 507–536.

7. *Pastur L. A.* A simple approach to the global regime of Gaussian ensembless random matrices // Ukr. Math. J. 1996. V. 57, N 6. P. 936–966.

8. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables // Proc. Sixth Berkeley symp. on mathematical statistics and probability. 1972. V. 2. P. 583–602.

Статья поступила 25 января 2011 г.

Тихомиров Александр Николаевич
Отдел математики КНЦ УрО РАН,
ул. Чернова, 3а, Сыктывкар 167001;
Сыктывкарский гос. университет,
Октябрьский пр., 55, Сыктывкар 167001
`sasha-tikh@mail.ru`