Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ФИКСИРОВАННОГО РАНГА

В. С. Монахов, А. А. Трофимук

Аннотация. Устанавливается зависимость производной длины и p-длины конечной разрешимой группы от ее ранга.

Ключевые слова: разрешимая группа, ранг, производная длина, нильпотентная длина, p-длина.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Главным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \tag{1}$$

в которой для каждого $i = 1, 2, \dots, m-1$ подгруппа G_i/G_{i-1} является минимальной нормальной подгруппой в группе G/G_{i-1}. Фактор-группы G_i/G_{i-1} называются *главными факторами* группы G.

Пусть p — простое число. Если G — p-разрешимая неединичная группа, то ее главные факторы являются либо p-группами, либо p'-группами. Главный фактор группы G, который является p-группой, называется *p-главным фактором* группы G. Если p^n — наибольший из порядков p-главных факторов группы G, то n называют *p-рангом* группы G и обозначают через $r_p(G)$ (см. [1, с. 685]).

Разрешимая группа p-разрешима для каждого p. *Рангом* неединичной разрешимой группы G называют $\max\limits_{p\in\pi(G)} r_p(G)$. Здесь $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G. Ранг разрешимой группы G обозначают через $r(G)$.

Если G — единичная группа, то полагают $r(G) = 0 = r_p(G)$. В силу теоремы Жордана — Гёльдера [1, теорема I.11.7] любые два главных ряда группы изоморфны, поэтому значения ранга и p-ранга определены однозначно.

Группа, которая является p-разрешимой и ее p-ранг равен 1, называется *p-сверхразрешимой* (см. [1, с. 713]). Разрешимая группа G ранга 1 называется *сверхразрешимой*. Она обладает, в частности, следующими свойствами: G дисперсивна по Оре; нильпотентная длина G и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышают 2; p-длина $l_p(G)$ равна 1 для всех $p \in \pi(G)$ [1, разд. VI.9]. Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини.

Разрешимые группы ранга 2 рассматривались в работах Хупперта [2] и Роуза [3]. В частности, в этих работах доказаны следующие две теоремы.

Теорема A [2, теорема 14; 1, теорема VI.9.1(d)]. *Пусть G — разрешимая группа ранга ≤ 2 и p — наибольший простой делитель $|G|$. Если $p > 3$, то силовская p-подгруппа нормальна в G. В частности, если порядок группы не делится на 2 или на 3, то группа дисперсивна по Оре.*

Теорема B [3, следствие 1]. *Пусть G — разрешимая группа и p — наибольший простой делитель $|G|$. Если $r_t(G) \leq 2$ для всех $t \in \pi(G) \setminus \{p\}$ и G не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4, то G дисперсивна по Оре.*

Из теоремы A вытекает, что разрешимая группа ранга ≤ 2 обладает нормальной дисперсивной по Оре $\{2,3\}'$-холловой подгруппой.

В настоящей работе устанавливаются новые свойства разрешимых групп ранга 2 и изучаются разрешимые группы ранга 3. В частности, доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — разрешимая группа и $r(G) \leq 2$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает 4.*
2. *Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.*
3. *$l_p(G) \leq 1$ для любого простого $p > 3$, а $l_2(G) \leq 2$ и $l_3(G) \leq 2$.*

Теорема 2. *Пусть G — разрешимая группа и $r(G) \leq 3$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает 4.*
2. *Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.*
3. *$l_p(G) \leq 1$ для любого простого $p > 3$, а $l_2(G) \leq 2$ и $l_3(G) \leq 2$.*

Разрешимые группы ранга ≤ 2 и ранга ≤ 3 имеют одинаковые верхние границы нильпотентной длины и p-длины, а для производной длины верхние границы различны. Но если p-ранг разрешимой группы G при малых значениях p, ограничить сверху тройкой, а для остальных p — двойкой, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$, как в теореме 1.

Теорема 3. *Пусть G — разрешимая группа такая, что $r_p(G) \leq 2$ для каждого простого $p > 5$ и $r_p(G) \leq 3$ для каждого $p \in \{2,3,5\}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не выше 5.*
2. *G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,5,7,13,31\}'$-холлову подгруппу.*

Зависимость производной длины $G/\Phi(G)$ и p-длины от ранга разрешимой группы G в общем случае устанавливается в следующей теореме.

Теорема 4. 1. *Если G — разрешимая группа, то производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает $1 + \rho(r(G))$. В частности, она не выше $3 + r(G)$.*

2. *Если G — p-разрешимая группа, то $l_p(G) < 2 + \log_2 r_p(G)$.*

Здесь через $\rho(n)$ обозначается максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп группы $GL(n,P)$, где P — поле. Согласно теореме Цассенхауза [4] эта функция не зависит от поля P. Ее значения известны для каждого n, в частности, $\rho(n) \leq 2 + n$.

Для p-разрешимой группы G известно, что $l_p(G) \leq r_p(G)$ (см. [1, теорема VI.6.6]). Этот результат уточняет

Следствие 1. *Пусть G — p-разрешимая группа. Если $l_p(G) = r_p(G)$, то либо $r_p(G) = 1$, либо $r_p(G) = 2$ и $p \in \{2, 3\}$. В частности, если $r_p(G) \geq 3$, то $l_p(G) \leq r_p(G) - 1$.*

1. Вспомогательные результаты

Лемма 1 [1, теорема VI.5.3]. *Для p-разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *если N — нормальная подгруппа группы G, то $r_p(G/N) \leq r_p(G)$;*

2) *если H — подгруппа группы G, то $r_p(H) \leq r_p(G)$;*

3) $r_p(G_1 \times G_2) = \max\{r_p(G_1), r_p(G_2)\}$;

4) *если N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G, то $r_p(G/(N_1 \cap N_2)) = \max\{r_p(G/N_1), r_p(G/N_2)\}$.*

Аналогичные утверждения верны и для $r(G)$.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Символами p и q всегда будем обозначать различные простые числа, а δ — показатель p по модулю q. Напомним, что *показателем числа p по модулю q* называют такое наименьшее натуральное число δ, что q делит $p^\delta - 1$. Центр, коммутант и подгруппа Фраттини группы X обозначаются через $Z(X)$, X' и $\Phi(X)$ соответственно. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.

Введем следующие обозначения: $S_{p^\delta,q}$ — группа Шмидта порядка $p^\delta q$ с нормальной элементарной абелевой силовской подгруппой порядка p^δ и циклической силовской q-подгруппой порядка q. Здесь δ — показатель p по модулю q. Ясно, что $S_{p,q}$ — неабелева группа и q делит $p-1$, а $S_{p^2,q}$ — группа Шмидта порядка p^2q и q делит $p+1$. Понятно, что $S_{3,2}$ изоморфна симметрической группе S_3, а $S_{2^2,3}$ — знакопеременной группе A_4. Примером группы Шмидта с неабелевой нормальной силовской подгруппой служит группа $SL(2,3) = [Q_8]\langle y\rangle$, у которой нормальная силовская 2-подгруппа Q_8 является группой кватернионов порядка 8, а $|y| = 3$.

Лемма 2 [5–7]. *Пусть S — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$S = [P]Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа, $Q = \langle y\rangle$ — ненормальная циклическая силовская q-подгруппа и $y^q \in Z(S)$;*

2) *$Z(S) = \Phi(P) \times \langle y^q\rangle$ и $S/Z(S) \simeq S_{p^\delta,q}$;*

3) *если P абелева, то P — элементарная абелева порядка p^δ;*

4) *если P неабелева, то δ — четное число, $|P|$ делит $p^{(3/2)\delta}$, $|P/\Phi(P)| = p^\delta$ и $Z(P) = P' = \Phi(P)$;*

5) $r_p(S) = \delta$, $r_q(S) = 1$;

6) *если p и q — произвольные различные простые числа и δ — показатель p по модулю q, то существует группа Шмидта порядка $p^\delta q$ с нормальной подгруппой порядка p^δ.*

Дисперсивной по Оре называют группу G порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, у которой имеется нормальный ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1$$

такой, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ фактор-группа G_{i-1}/G_i изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G. Группа называется *X-свободной*, если она не содержит секций, изоморфных группе X.

Лемма 3 [1, теорема IV.5.4]. *Если группа G не p-нильпотентна, но все ее собственные подгруппы p-нильпотентны, то G — группа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой.*

Лемма 4 [7, теорема 2.1; 8]. *Если группа G не p-нильпотентна, то в G существует подгруппа Шмидта с неединичной нормальной силовской p-подгруппой.*

Если в группе G имеется максимальная подгруппа M с единичным ядром $M_G = \bigcap\limits_{x\in G} M^x$, то группу G называют *примитивной*, а подгруппу M — ее *примитиватором* (см. [9]).

Лемма 5 [9, теорема I.8; 1, теорема II.3.2]. *Пусть G — примитивная разрешимая группа с примитиватором M. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi(G) = 1$;

2) *$F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой p-группой порядка p^n для некоторого простого p;*

3) *в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;*

4) *$G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;*

5) *M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n,p)$.*

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций (см. [1, 10]). Пусть $\mathfrak{E}$ — формация всех конечных групп, $\mathfrak{F}$ — некоторая формация и G — группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных, сверхразрешимых и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно. Если $\mathfrak{F}$ — некоторая формация и π — некоторое множество простых чисел, то $\mathfrak{F}_\pi$ — класс всех π-групп из $\mathfrak{F}$, а $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup\limits_{G\in\mathfrak{F}} \pi(G)$.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и π — некоторое множество простых чисел. Если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.*

Доказательство. Согласно [10, с. 36] произведение $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация — эквивалентные понятия [11], $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.

Лемма 7. *Пусть G — разрешимая группа и k — натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.*

Доказательство. По свойствам коммутантов $(G/N)^{(i)} = G^{(i)}N/N$ для любого натурального i и любой нормальной подгруппы N группы G (см. [1, лемма I.8.4]). Пусть $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$. Тогда $(G/\Phi(G))^{(k-1)} = G^{(k-1)}\Phi(G)/\Phi(G) \simeq G^{(k-1)}/G^{(k-1)} \cap \Phi(G)$ абелева. Так как $\Phi(G^{(k-1)}) \leq \Phi(G)$ по лемме III.3.3 [1], то $G^{(k-1)}$ нильпотентна по теореме III.3.5 [1]. Но $G/G^{(k-1)} \in \mathfrak{A}^{(k-1)}$, значит, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$. Обратно, пусть $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$. В любой разрешимой группе G фактор-группа $F/\Phi(G)$ абелева и $(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \simeq G/F$. Поскольку $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$, то $G/F \in \mathfrak{A}^{k-1}$ и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$. Лемма доказана.

Следующая лемма легко выводится из соответствующих определений.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и G — разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Тогда G — примитивная группа.*

Конкретные группы обозначаются следующим образом: 1 — единичная группа; Z_n и D_n — циклическая и диэдральная группы порядка n; A_n и S_n — знакопеременная и симметрическая группы степени n.

Лемма 9. *Если H — подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1, GL(3,2), Z_2, Z_3, Z_7, Z_2 \times Z_2, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, [Z_7]Z_3\}$. В частности, если H A_4-свободна, то H метациклическая.*

Доказательство. По теореме II.6.14 из [1] имеем $GL(3,2) \simeq PSL(2,7)$, а по теореме II.8.27 в [2] подгруппа H из заключения леммы.

Лемма 10. *Если H — разрешимая подгруппа группы $GL(3,3)$ и $O_3(H) = 1$, то $H \simeq Z_2 \times D$ или $H \simeq D$, где D либо 2-группа производной длины, не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$. В частности, производная длина H не превышает 4, а если H является A_4-свободной группой, то H метабелева.*

Доказательство. Группа $GL(3,3)$ имеет порядок $2^5 \cdot 3^3 \cdot 13$ и ее силовские подгруппы метабелевы по теореме из [12]. Поскольку $GL(3,3) = Z(GL(3,3)) \times SL(3,3)$, утверждение легко вывести из теоремы 7.1 в [13] либо с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 11. *Если H — разрешимая подгруппа группы $GL(3,5)$ и $O_5(H) = 1$, то $H \simeq Z_2 \times D$, $H \simeq Z_4 \times D$ или $H \simeq D$, где D либо 2-группа производной длины, не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_3, Z_6, S_3, [Z_3]Z_4, Z_{12}, D_{12}, A_4, S_4, Z_4 \times S_3, Z_{24}, [Z_3]Z_8, Z_{31}, SL(2,3), [SL(2,3)]Z_2, [Z_4 \times Z_4]Z_3, [Z_{24}]Z_2, [Z_{31}]Z_3, [[Z_4 \times Z_4]Z_3]Z_2, [SL(2,3)]Z_4\}$. В частности, производная длина H не превышает 4, а если H является A_4-свободной группой, то производная длина H не превышает 3.*

Доказательство. Поскольку $GL(3,5) = Z(GL(3,5)) \times SL(3,5)$, утверждение легко вывести из теоремы 7.1 [13] либо с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 12. *Пусть H — неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда*

1) если $n = 2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$;

2) если $n = 3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$.

Кроме того, если $n \in \{2,3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H — p'-группа.

Доказательство. 1. Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $GL(2,p)$ и докажем утверждение для M. Очевидно, M — неприводимая подгруппа. Если M импримитивна, то M изоморфна сплетению циклической группы порядка $p-1$ и группы порядка 2 (см. [14, теорема 18.5]). Поэтому $H \in \mathfrak{A}^2$ и H — p'-группа. Если M примитивна, то по теореме 3.5 в [15] фактор-группа $M/F(M)$ изоморфна подгруппе из $SL(2,2) \simeq S_3$ и $F(M)/Z(M) \simeq Z_2 \times Z_2$. Поэтому $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Так как $|M|$ делит $6|F(M)|$ и $H \cap F(M)$ — p'-группа, то H — p'-группа.

2. Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $GL(3,p)$ и докажем утверждение для M. Очевидно, M — неприводимая подгруппа. Если M импримитивна, то M мономиальна и согласно теореме 18.5 в [14] сопряжена в $GL(3,p)$ со сплетением $GF(p)^{\#} \wr S_3$ (см. [14, с. 234]). Кроме того, M состоит из линейных преобразований пространства $V = V(3, GF(p))$ таких, что

$g(v_i) = \lambda_i v_{i_1}$, где $\{v_1, v_2, v_3\}$ — базис V. По теореме II.7.2 в [1] преобразования d, для которых $d(v_i) = \lambda_i v_i$, образуют абелеву подгруппу D порядка $(p-1)^3$, нормальную в M, и $M/D \simeq S_3$. Поэтому $H \in \mathfrak{A}^3$ и H — p'-группа. Если M примитивна, то по теореме 3.5 в [15] фактор-группа $M/F(M)$ изоморфна подгруппе из $SL(2,3)$ и $H \in \mathfrak{N}^3$. Из [16] следует, что $H \in \mathfrak{A}^5$. Так как $|M|$ делит $24|F(M)|$ и $H \cap F(M)$ — p'-группа, то H — p'-группа.

Лемма 13. 1. *Если H — разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева.*

2. *Если H — разрешимая A_4-свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3,p)$, то $H \in \mathfrak{A}^4$.*

Доказательство. 1. В теореме 3.4 из [13] перечислены все подгруппы группы $GL(2,q)$, $q = p^m$. Согласно этой теореме любая подгруппа в $GL(2,q)$ сопряжена с подгруппой G одного из следующих типов:

1) G циклическая;

2) $G = QM$, где Q — подгруппа p-группы

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix} \mid \tau \in GF(q) \right\rangle,$$

$M \subseteq N_G(Q)$ и M — подгруппа группы D всех диагональных матриц;

3) $G = \langle Z_u, s\rangle$, где u делит q^2-1, $y^s = y^q$ для всех $y \in Z_u$ и s^2 — скалярный 2-элемент в Z_u;

4) $G = \langle M, s\rangle$, где $M \subseteq D$ и $|G : M| = 2$;

5) $G = \langle SL(2,p^\beta), V\rangle$ или

$$G = \left\langle SL(2,p^\beta), V, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \epsilon b \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где V — скалярная матрица, ϵ — образующий элемент $(GF(p^\beta))^*$, $p^\beta > 3$, β делит α. Во втором случае $|G : \langle SL(2,p^\beta), V\rangle| = 2$;

6) $G/\langle -E\rangle$ изоморфна $S_4 \times Z_u$, $A_4 \times Z_u$ или $A_5 \times Z_u$, если $p \neq 5$, где Z_u — скалярная подгруппа $GL(2,q)/\langle -E\rangle$, а E — единичная матрица;

7) G не является группой из п. 6, но $G/\langle -E\rangle$ содержит $A_4 \times Z_u$ в качестве подгруппы индекса 2 и A_4 в качестве подгруппы с циклической фактор-группой, Z_u — группа такая, как в п. 6, где u — четное число.

Подгруппа из п. 1 абелева. Так как группа $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix} \mid \tau \in GF(q) \right\rangle$ абелева и группа всех диагональных матриц является абелевой, подгруппы из пп. 2–4 метабелевы. Подгруппа из пп. 5–7 не является A_4-свободной. Итак, если H — A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева.

2. Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $GL(3,p)$ и докажем утверждение леммы для M. Очевидно, M — неприводимая подгруппа. Если M импримитивна, то, повторяя рассуждения из п. 2 леммы 12, получим, что $H \in \mathfrak{A}^3$. Если M примитивна, то по теореме 3.5 в [15] группа M обладает нормальным рядом

$$1 < Z(M) < F(M) < M, \quad F(M)/Z(M) \simeq E_9$$

и $M/F(M)$ изоморфна подгруппе из $SL(2,3)$. Для H получаем ряд

$$1 \leq Z(H) \leq F(M) \cap H \leq H, \quad H/Z(H) \simeq HZ(M)/Z(M) \leq M/Z(M).$$

Так как H — A_4-свободная подгруппа, то $HZ(M)/Z(M)$ — A_4-свободная подгруппа группы $M/Z(M)$, которая является расширением элементарной абелевой группы порядка 9 с помощью подгруппы из $SL(2,3)$. Отсюда следует, что $H \in \mathfrak{A}^4$.

Пример 1. В $GL(3,7)$ существует неприводимая подгруппа, изоморфная A_4-свободной группе $[S]Q_8$, производной длины 4 и порядка 216. Здесь S — экстраспециальная группа порядка 27. Поэтому в п. 2 леммы 13 оценка производной длины для $p = 7$ точна.

Лемма 14. *Если G — метанильпотентная группа, то $l_p(G) \leq 1$ для любого простого p.*

Доказательство. Пусть N — нильпотентная нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой нильпотентна. Для любого простого p имеем $N = N_p \times N_{p'}$, где N_p — силовская p-подгруппа группы N, а $N_{p'}$ — ее дополнение. Так как $N_{p'}$ нормальна в G, то $G_pN_{p'}$ нормальна в G, где G_p — силовская p-подгруппа группы G, поэтому $l_p(G) \leq 1$. Лемма доказана.

2. Разрешимые группы ранга 2

Лемма 15. *Пусть G — p-разрешимая группа и $r_p(G) \leq 2$. Если G не p-нильпотентна, то существует $q \in \pi(G)$, для которого выполняется одно из следующих утверждений:*

1) q делит $p-1$ и G содержит секцию, изоморфную $S_{p,q}$;

2) q делит $p+1$, $q > 2$ и G содержит секцию, изоморфную $S_{p^2,q}$.

Доказательство. Эти утверждения составляют теорему A′ работы [3]. Приведем более простое, на наш взгляд, доказательство. Предположим, что G — контрпример наименьшего порядка. Тогда по лемме 3 группа G является группой Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P и циклической q-подгруппой Q. Так как $r_p(G) \leq 2$, по лемме 2 показатель δ числа p по модулю q не превышает 2. Если $\delta = 1$, то q делит $p-1$, а по лемме 2 подгруппа P имеет порядок p и $G/Z(G) \simeq S_{p,q}$; противоречие. Если $\delta = 2$, то q делит $p+1$ и по лемме 2 $G/Z(G) \simeq S_{p^2,q}$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть G — p-разрешимая группа и $r_p(G) \leq 2$. Если $p > 3$, то $l_p(G) \leq 1$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку G. В силу леммы VI.6.9 в [1] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ — единственная минимальная нормальная p-подгруппа, обладающая дополнением M в G. Поэтому силовская p-подгруппа G_p равна $[F](G_p \cap M) = [F]M_p$, где M_p — некоторая силовская p-подгруппа в M. Если $M_p = 1$, то $F = G_p$ и $l_p(G) \leq 1$. Пусть $M_p \neq 1$. Так как $|F| \leq p^{r_p(G)} \leq p^2$, порядок F равен p либо p^2. Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы $\operatorname{Aut} F$, порядок которой равен $p-1$. Отсюда $G_p = F$; противоречие. Пусть $|F| = p^2$. Если G_p абелева, то $l_p(G) \leq 1$ по теореме VI.6.6 в [1]. Если G_p неабелева, то ее порядок равен p^3 и она изоморфна по теореме I.14.10 в [1] либо метациклической группе

$$M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle]\langle b \rangle,$$

либо группе экспоненты p. Так как подгруппа $\Omega_1(M_3(p))$, порожденная элементами порядка p, является элементарной абелевой подгруппой порядка p^2, то она не дополняема в $M_3(p)$. Поэтому изоморфизм G_p с $M_3(p)$ исключается и G_p имеет экспоненту p. По теореме III.10.2 в [1] G_p регулярна и p — простое число Ферма по теореме IX.4.8 в [17]. Но теперь имеем противоречие с утверждением b) теоремы IX.5.5 в [17]. Лемма доказана.

Пример 2. При $p \in \{2,3\}$ аналогичные утверждения неверны. Примерами служат симметрическая группа S_4 при $p=2$ и группа $[E_{3^2}]SL(2,3)$ при $p=3$. Здесь E_{3^2} — элементарная абелева группа порядка 3^2.

Доказательство теоремы 1. Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G. Для каждой нормальной в G неединичной подгруппы N по лемме 1 верно $r(G/N) \leq r(G)$, поэтому для G/N условие теоремы выполняется и $G/N \in \mathfrak{F}$ по индукции. По лемме 6 формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, а по лемме 8 группа G примитивна. По лемме 5 подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Кроме того, $F = C_G(F)$, $|F| = p^n$, а G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе из $\operatorname{Aut} F \simeq GL(n,p)$. Из определения ранга следует, что $n \leq r_p(G)$. Поэтому порядок $|F|$ равен либо p, либо p^2. Если $|F| = p$, то $\operatorname{Aut} F = Z_{p-1}$ и G/F — циклическая группа. Поэтому $G/F \in \mathfrak{A}$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе из $GL(2,p)$. По лемме 12 $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$, поэтому $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4 = \mathfrak{F}$.

Итак, $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, нильпотентная длина G не превышает 4. Из включения $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$ и леммы 7 получаем, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Из леммы 16 следует, что $l_p(G) \leq 1$ для любого $p > 3$. Так как p-длина p-разрешимой группы не превосходит ее p-ранга [1, теорема VI.6.6], то $l_2(G) \leq 2$ и $l_3(G) \leq 2$. Теорема 1 доказана.

Пример 3. Пусть S — экстраспециальная группа порядка 27. Полупрямое произведение $G = [S]GL(2,3)$ является разрешимой группой ранга 2 с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ порядка 3. Нильпотентная длина G равна 4, производная длина $G/\Phi(G)$ равна 5, 2- и 3-длины этой группы равны 2. Значит, полученные в теореме 1 оценки точны.

Следствие 2. *Если G — разрешимая A_4-свободная группа и $r(G) \leq 2$, то*

1) $l_p(G) \leq 1$ для любого простого p;

2) производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3;

3) группа G является t-сверхразрешимой для наименьшего $t \in \pi(G)$ и G дисперсивна по Оре.

Доказательство. 1. В силу п. 3 теоремы 1 надо показать, что $l_p(G) \leq 1$ для $p \in \{2,3\}$. По лемме VI.6.9 в [1] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа порядка p^α, где $\alpha \leq 2$, так как $\alpha \leq r(G) \leq 2$, и $C_G(F) = F$. Если $|F| = p$, то G/F имеет порядок, делящий $p-1$ и $l_p(G) \leq 1$. Если $|F| = 4$, то $\operatorname{Aut}(F) \simeq GL(2,2) \simeq S_3$ и либо $G/F \simeq Z_3$, либо $G/F \simeq S_3$. Если $G/F \simeq Z_3$, то $G \simeq A_4$. Если $G/F \simeq S_3$, то $G \simeq S_4$. В любом случае группа не A_4-свободна; противоречие. Пусть $|F| = 9$. Тогда G/F изоморфна подгруппе из $GL(2,3)$ и $O_3(G/F) = 1$. Список таких подгрупп исчерпывается 2-группами и группами $SL(2,3)$ и $GL(2,3)$. Но последние две не A_4-свободны, поэтому они исключаются. Значит, G/F — 2-группа и $l_3(G) \leq 1$.

2. Воспользуемся индукцией по порядку G и докажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга F. Ввиду

п. 1 верно $l_p(G) \leq 1$ для всех $p \in \pi(G)$, поэтому F — силовская p-подгруппа. Кроме того, $F = C_G(F)$, $|F|$ равен p или p^2. Если $|F| = p$, то G/F — циклическая группа как группа автоморфизмов группы простого порядка p, поэтому $G/F \in \mathfrak{A}$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой p'-подгруппе из $GL(2,p)$. По лемме 13 $G/F \in \mathfrak{A}^2$.

Итак, в любом случае $G/F \in \mathfrak{A}^2$. Из леммы 7 получаем, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

3. Пусть G — $\{2,3\}$-группа. Предположим, что G не 2-нильпотентна. По лемме 4 существует 2-замкнутая подгруппа Шмидта $S = [P]Q$. Показатель числа 2 по модулю 3 равен 2. По лемме 2 порядок нормальной силовской 2-подгруппы P равен 8 или 4. Если $|P| = 4$, то $S/Z(S) \simeq A_4$; противоречие. Пусть $|P| = 8$. По лемме 2 подгруппа P неабелева, $|Z(P)| = 2$ и опять $S/Z(S) \simeq A_4$. Поэтому допущение неверно, G является 2-нильпотентной, а значит, 2-сверхразрешимой группой.

Будем считать, что G не $\{2,3\}$-группа. Тогда по теореме А существует нормальная силовская p-подгруппа для наибольшего $p \in \pi(G)$. Для G/P выполняются все условия леммы, поэтому G/P t-сверхразрешима для наименьшего $t \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Ясно, что t-сверхразрешимой является и сама группа G. Поскольку t-сверхразрешимость при наименьшем $t \in \pi(G)$ равносильна t-нильпотентности, дисперсивность по Оре получается по индукции.

Пример 4. Группа $G = [E_{3^2}]Q_8$ является A_4-свободной, $r_2(G) = 1$, $r_3(G) = 2$, ее подгруппа Фраттини группы единична, а производная длина равна 3. Поэтому оценка производной длины из следствия 2 точна.

Пример 5. В общем случае разрешимая группа G ранга 2 не обязана быть t-сверхразрешимой для некоторого $t \in \pi(G)$. Группа $G = [E_{5^2} \times E_{3^2}]SL(2,3)$ обладает главным рядом

$$1 \subset E_{5^2} \subset E_{5^2} \times E_{3^2} \subset [E_{5^2} \times E_{3^2}]Z_2 \subset [E_{5^2} \times E_{3^2}]Q_8 \subset G.$$

Ясно, что $r_2(G) = r_3(G) = r_5(G) = 2$.

3. Разрешимые группы ранга 3

Лемма 17. *Пусть G — p-разрешимая группа и $r_p(G) \leq 3$. Если G не p-нильпотентна, то существует $q \in \pi(G)$, для которого выполняется одно из следующих утверждений:*

1) q делит $p-1$ и G содержит секцию, изоморфную $S_{p,q}$;

2) q делит $p+1$, $q > 2$, и G содержит секцию, изоморфную $S_{p^2,q}$;

3) q делит p^2+p+1, q не делит p^2-1, и G содержит секцию, изоморфную $S_{p^3,q}$.

Доказательство. Предположим, что G — контрпример наименьшего порядка. Тогда по лемме 3 группа G является группой Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P и циклической q-подгруппой Q. Так как $r_p(G) \leq 3$, по лемме 2 показатель δ числа p по модулю q не превышает 3. Если $\delta = 1$, то q делит $p-1$, а по лемме 2 подгруппа P имеет порядок p и $G/Z(G) \simeq S_{p,q}$; противоречие. Если $\delta = 2$, то q делит $p+1$ и по лемме 2 фактор-группа $G/Z(G) \simeq S_{p^2,q}$; противоречие. Если $\delta = 3$, то q делит p^3-1, но не делит p^2-1, поэтому q делит p^2+p+1 и по лемме 2 фактор-группа $G/Z(G) \simeq S_{p^3,q}$; противоречие. Лемма доказана.

При $p \in \{2,3\}$ получаем следующее утверждение.

Лемма 18. 1. *Пусть G — разрешимая группа и $r_2(G) \leq 3$. Если G не содержит секций, изоморфных A_4 и $[E_8]Z_7$, то G является 2-нильпотентной.*

2. *Пусть G — 3-разрешимая группа и $r_3(G) \leq 3$. Если G не содержит секций, изоморфных S_3 и $[E_{27}]Z_{13}$, то G является 3-нильпотентной.*

Лемма 19. *Если G — p-разрешимая группа и $r_p(G) \leq 3$, то $l_p(G) \leq 2$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. По лемме VI.6.9 в [1] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ — единственная минимальная нормальная p-подгруппа, обладающая дополнением M в G. Поэтому силовская p-подгруппа G_p равна $[F](G_p \cap M) = [F]M_p$, где M_p — некоторая силовская p-подгруппа в M. Если $M_p = 1$, то $F = G_p$ и $l_p(G) \leq 1$. Пусть $M_p \neq 1$. Так как $|F| \leq p^{r_p(G)} \leq p^3$, порядок F равен либо p, либо p^2, либо p^3. Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе из $\operatorname{Aut} F$, которая является циклической группой порядка $p-1$. Отсюда $G_p = F$; противоречие. Если $|F| = p^2$, то $\operatorname{Aut} F = GL(2,p)$ и $|M_p| = p$. Поэтому $l_p(M) \leq 1$ и $l_p(G) \leq 2$.

Пусть $|F| = p^3$. Тогда $\operatorname{Aut} F = GL(3,p)$ и $|M_p| \leq p^3$. Если M_p абелева, то $l_p(M) \leq 1$ по теореме VI.6.6 в [1] и $l_p(G) \leq 2$. Если M_p неабелева, то p-ранг M не выше 2 и $l_p(M) \leq 1$ по теореме 1 при $p > 3$. Отсюда следует, что $l_p(G) \leq 2$. Если $|F| = 3^3$, то M изоморфна разрешимой подгруппе группы $GL(3,3)$ и $O_3(M) = 1$. Из леммы 10 следует, что силовская 3-подгруппа из M имеет порядок ≤ 3. Теперь $l_3(M) \leq 1$ по теореме VI.6.6 в [1], значит, $l_3(G) \leq 2$. Если $|F| = 2^3$, то M изоморфна разрешимой подгруппе группы $GL(3,2)$ и $O_2(M) = 1$. Из леммы 9 следует, что силовская 2-подгруппа из M имеет порядок ≤ 2. Теперь $l_2(M) \leq 1$ по теореме VI.6.6 в [1], значит, $l_2(G) \leq 2$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. 1, 2. Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$. Воспользуемся индукцией по порядку G. Для каждой нормальной в G неединичной подгруппы N по лемме 1 верно $r(G/N) \leq r(G)$, поэтому для G/N условие теоремы выполняется и $G/N \in \mathfrak{F}$ по индукции. По лемме 6 формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, а по лемме 8 группа G примитивна. По лемме 5 подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G, $F = C_G(F)$, $|F| = p^n$ для некоторого простого p, а G/F изоморфна неприводимой подгруппе из $\operatorname{Aut} F \simeq GL(n,p)$. Из определения ранга следует, что $n \leq r_p(G)$. Поэтому порядок $|F|$ равен либо p, либо p^2, либо p^3. Если $|F| = p$, то $\operatorname{Aut} F = Z_{p-1}$ и G/F — циклическая группа. Поэтому $G/F \in \mathfrak{A}$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда фактор-группа G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе группы $GL(2,p)$. По лемме 12 $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$, поэтому $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4 \subseteq \mathfrak{F}$. Если $|F| = p^3$, то фактор-группа G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе группы $GL(3,p)$, а по лемме 12 $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$.

Итак, всегда $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$. Из включения $G \in \mathfrak{N}^4$ следует, что нильпотентная длина G не превышает 4, а из включения $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$ и леммы 7 — производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

3. Из леммы 19 получаем, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого p. С помощью индукции по порядку G покажем, что $l_p(G) \leq 1$ для любого $p \geq 5$. По лемме VI.6.9 в [1] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ — единственная минимальная нормальная p-подгруппа и $|F| \leq p^{r_p(G)} \leq p^3$, т. е. порядок F равен либо p, либо p^2, либо p^3. Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} F$ группы F, порядок которой равен $p-1$. Отсюда $G_p = F$ и $l_p(G) \leq 1$. Если $|F| = p^n$, $n \in \{2,3\}$, то $\operatorname{Aut} F = GL(n,p)$, G/F — неприводимая разрешимая подгруппа

группы $GL(n,p)$ и $O_p(G/F)=1$. По лемме 12 фактор-группа G/F — p'-группа, т. е. $l_p(G)\le 1$. Теорема 2 доказана.

Пример 6. С помощью компьютерной системы GAP несложно строится группа $G=[E_{7^3}]([S]SL(2,3))$, где S — экстраспециальная группа порядка 27. Ясно, что $|G|=2^3\cdot 3^4\cdot 7^3$, $r_2(G)=r_3(G)=2$, $r_7(G)=3$. Подгруппа Фраттини этой группы единична, нильпотентная длина равна 4, а производная длина равна 6. Значит, оценки нильпотентной и производной длин в теореме 2 точные.

Следствие 3. *Пусть G — разрешимая A_4-свободная группа и $r(G)\le 3$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает* 5.
2. *$l_p(G)\le 1$ для любого простого $p\ne 3$.*
3. *Если группа G не содержит секций, изоморфных $S_{r^3,t}$ для всех $r,t\in\pi(G)$ таких, что $t>r$, t делит r^2+r+1, то G дисперсивна по Оре.*

Доказательство. 1. Как и при доказательстве утверждений 1, 2 теоремы 2, с использованием п. 2 леммы 13 несложно получить, что $G\in\mathfrak{NA}^4$. Теперь из леммы 7 следует, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2. В силу п. 3 теоремы 2 надо показать, что $l_2(G)\le 1$. По лемме VI.6.9 в [1] можно считать, что $O_{2'}(G)=\Phi(G)=1$, а подгруппа Фиттинга $F=F(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа порядка 2^α, где $\alpha\le 3$, так как $\alpha\le r_2(G)$, и $C_G(F)=F$. Если $|F|=2$, то $l_2(G)\le 1$. Если $|F|=4$, то $\mathrm{Aut}(F)\simeq GL(2,2)\simeq S_3$ и либо $G/F\simeq Z_3$, либо $G/F\simeq S_3$. Если $G/F\simeq Z_3$, то $G\simeq A_4$. Если $G/F\simeq S_3$, то $G\simeq S_4$. В любом случае группа не A_4-свободна; противоречие. Пусть теперь $|F|=8$. Тогда фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,2)\simeq PSL(2,7)$. Так как $O_2(G/F)=1$, по лемме 9 $G/F\in\{Z_3,S_3,Z_7,[Z_7]Z_3\}$, и надо рассмотреть случай, когда $G/F\simeq S_3$. Поскольку G не 2-нильпотентна, в ней по лемме 4 существует 2-замкнутая подгруппа Шмидта S. Но теперь из леммы 2 следует, что $S/\Phi(S)\simeq A_4$; противоречие.

3. Если группа имеет четный порядок, то она 2-нильпотентна по лемме 18 и дисперсивна по Оре по индукции. Пусть G — группа нечетного порядка и p — наименьшее простое число, делящее порядок G. Если G p-нильпотентна, то по индукции дисперсивна по Оре. Пусть G не p-нильпотентна. Тогда по лемме 17 существует $q\in\pi(G)$ и для пары p,q выполняется одно из трех утверждений этой леммы. Но первые два утверждения исключаются тем, что p наименьшее из $\pi(G)$, а третье — условием доказываемого следствия.

Пример 7. С помощью компьютерной системы GAP несложно строится A_4-свободная группа $G=[E_{7^3}]([S]Q_8)$, где S — экстраспециальная группа порядка 27. Ясно, что $|G|=2^3\cdot 3^3\cdot 7^3$, $r_2(G)=1$, $r_3(G)=2$, $r_7(G)=3$. Подгруппа Фраттини этой группы единична, а производная длина равна 5. Значит, оценка производной длины в следствии 3 точная.

4. Разрешимые группы p-ранга ≤ 3 для $p\in\{2,3,5\}$ и p-ранга ≤ 2 для $p\ge 7$

Доказательство теоремы 3. 1. Вначале докажем, что $G\in\mathfrak{NA}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Для каждой нормальной в G неединичной подгруппы N по лемме 1 верно $r_p(G/N)\le r_p(G)$, поэтому для G/N условие теоремы выполняется и $G/N\in\mathfrak{NA}^4$ по индукции. По лемме 6 формация $\mathfrak{NA}^4$ насыщенна, а по лемме 8 группа G примитивна. По лемме 5 подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G, $F = C_G(F)$, $|F| = p^n$, а G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе из группы $\operatorname{Aut} F \simeq GL(n,p)$. Из определения ранга следует, что $n \le r_p(G)$. Поэтому порядок $|F|$ равен либо p, либо p^2, либо 2^3, либо 3^3, либо 5^3.

Если $|F| = p$, то $\operatorname{Aut} F = Z_{p-1}$ и G/F — циклическая группа. Поэтому $G/F \in \mathfrak{A}$ и $G \in \mathfrak{NA} \subseteq \mathfrak{NA}^4$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда фактор-группа G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе группы $GL(2,p)$. По лемме 12 $G/F \in \mathfrak{A}^4$, поэтому $G \in \mathfrak{NA}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 8$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,2)$. Так как $O_2(G/F) = 1$, из леммы 9 следует, что $G/F \in \{Z_3, S_3, Z_7, [Z_7]Z_3\}$ и $G \in \mathfrak{NA}^2 \subseteq \mathfrak{NA}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 27$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,3)$. Так как $O_3(G/F) = 1$, из леммы 10 вытекает, что $G \in \mathfrak{NA}^4$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = 125$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,5)$. Так как $O_5(G/F) = 1$, из леммы 11 следует, что $G \in \mathfrak{NA}^4$.

Итак, $G \in \mathfrak{NA}^4$. Из леммы 7 получаем, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2. Пусть p — наибольший простой делитель порядка группы, а G_p — ее силовская p-подгруппа. Предположим, что $p > 7$ и $p \notin \{13, 31\}$. Используя индукцию по порядку группы, покажем, что G_p нормальна в G, т. е. $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Здесь $\mathfrak{N}_p$ — формация всех p-групп, а $\mathfrak{E}_{p'}$ — формация всех p'-групп. Поскольку $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ — насыщенная формация по лемме 6, G — примитивная группа по лемме 8. По лемме 5 можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа $F = F(G)$, которая будет подгруппой порядка q^n для некоторого $q \in \pi(G)$ и натурального n. Кроме того, $F = C_G(F)$, а G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов F. Так как $n \le r_q(G)$, порядок F равен q, q^2, 8, 27 или 125. При $p = q$ из леммы 16 получаем, что G_p нормальна в G. Поэтому считаем, что $p > q$. Пусть сначала $|F| = q$, тогда G/F — циклическая группа порядка, делящего $q - 1$. Ввиду того, что p — наибольший простой делитель порядка группы G, этот случай исключается. Пусть теперь $|F| = q^2$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2,q)$, порядок которой равен $(q^2 - q)(q^2 - 1)$. Поэтому с учетом $p > q$ получим, что p делит $q + 1$, а это возможно только при $p = 3$, а $q = 2$; противоречие. Если $|F| = 8$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,2)$, порядок которой равен $(2^3 - 2^2)(2^3 - 2)(2^3 - 1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Теперь $p \in \{2,3,7\}$, что исключается условием. Если $|F| = 27$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,3)$, порядок которой равен $(3^3 - 3^2)(3^3 - 3)(3^3 - 1) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 13$. Теперь $p \in \{2,3,13\}$, что исключается условием. Если $|F| = 125$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,5)$, порядок которой равен $(5^3 - 5^2)(5^3 - 5)(5^3 - 1) = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$. Теперь $p \in \{2,3,5,31\}$, что исключается условием.

Итак, силовская подгруппа G_p нормальна в группе G для наибольшего простого $p \in \pi(G)$ при условии, что $p > 7$, $p \notin \{13, 31\}$.

Положим $\pi = \pi(G) \setminus \{2,3,5,7,13,31\}$ и покажем, что π-холлова подгруппа G_π нормальна в группе G. Так как по индукции $O_{\pi}(G) = 1$ и класс всех π-замкнутых групп является насыщенной формацией, G — примитивная группа по лемме 8. По лемме 5 можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа $F = F(G)$, которая будет элементарной абелевой p-подгруппой порядка, делящего 2^3, 3^3, 5^3, 7^2, 13^2 или 31^2. Фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы $GL(n,p)$ для $p \in \{2,3,5\}$ и $n \leq 3$ или $p \in \{7,13,31\}$ и $n \leq 2$. Так как $\pi(GL(n,p)) \subseteq \{2,3,5,7,13,31\}$ для этих значений n и p, то G/F — π'-группа.

Итак, G_π нормальна для $\pi = \pi(G) \setminus \{2,3,5,7,13,31\}$. Если p — наибольшее из π, то G_p нормальна в G по доказанному. По индукции G_π/G_p дисперсивна по Оре, откуда следует, что подгруппа G_π дисперсивна по Оре. Теорема 3 доказана.

Пример 6 показывает, что если к условиям теоремы 3 добавить $r_7(G) \leq 3$, то производная длина $G/\Phi(G)$ увеличится до 6.

Следствие 4. *Пусть G — разрешимая группа, $r_p(G) \leq 2$ для $p > 5$ и $r_p(G) \leq 3$ для $p \in \{2,3,5\}$. Если G является A_4-свободной, то производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает* 4.

Доказательство. Используя леммы 9–11, 13 и повторяя доказательство утверждения 1 теоремы 3, получим, что $G/F \in \mathfrak{A}^3$. По лемме 7 производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

Следствие 5. *Пусть G — разрешимая группа такая, что $r_p(G) \leq 2$ для каждого простого $p > 3$, а $r_2(G) \leq 3$ и $r_3(G) \leq 3$. Тогда G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,7,13\}'$-холлову подгруппу. В частности, если G является A_4-свободной, то производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает* 3.

Доказательство. Существование нормальной дисперсивной по Оре $\{2,3,7,13\}'$-холловой подгруппы проводится так же, как доказательство утверждения 2 теоремы 3. Если G является A_4-свободной группой, то с помощью индукции по порядку группы вначале показывается с использованием лемм 9, 10, 13, что $G/F \in \mathfrak{A}^2$, откуда с помощью леммы 7 заключаем, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

Следующие предложения доказываются так же, как утверждение 2 теоремы 3.

Следствие 6. *Пусть G — разрешимая группа такая, что $r_p(G) \leq 2$ для каждого простого $p > 2$, а $r_2(G) \leq 3$. Тогда G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,7\}'$-холлову подгруппу.*

Следствие 7. *Пусть G — разрешимая группа такая, что $r_p(G) \leq 2$ для каждого простого $p \neq 5$, а $r_5(G) \leq 3$. Тогда G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,5,31\}'$-холлову подгруппу.*

Следствие 8. *Пусть G — разрешимая группа такая, что $r_p(G) \leq 2$ для каждого простого $p \notin \{2,5\}$, а $r_2(G) \leq 3$, $r_5(G) \leq 3$. Тогда G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,5,7,31\}'$-холлову подгруппу.*

5. Разрешимые группы фиксированного ранга

Лемма 20 [18, лемма 1.3]. *Силовская p-подгруппа группы $GL(n,p^t)$ имеет производную длину l, где $2^{l-1} < n \leq 2^l$.*

Лемма 21 [19]. *Если G — p-разрешимая группа и G_p — ее силовская p-подгруппа, то p-длина G не превосходит производной длины G_p.*

Через $\sigma(n)$ обозначается максимум производных длин вполне приводимых подгрупп нечетного порядка группы $GL(n,P)$, где P — поле. Согласно теореме

Цассенхауза [4] такая функция существует и не зависит от поля P. Значения функции $\sigma(n)$ известны для каждого n.

Доказательство теоремы 4. 1. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(r(G))}$. Если N — неединичная нормальная подгруппа группы G, то по индукции $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(r(G/N))}$. Так как $r(G/N) \leq r(G)$ по лемме 1 и функция $\rho(n)$ неубывающая, $\rho(r(G/N)) \leq \rho(r(G))$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(r(G/N))} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(r(G))}$. Поэтому $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(r(G))}$ для каждой неединичной нормальной подгруппы N группы G. По лемме 6 формация $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(r(G))}$ насыщенна, поэтому по лемме 8 группа G примитивна. По лемме 5 подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Кроме того, $F = C_G(F)$, $|F| = p^k$, $k \leq r_p(G) \leq r(G)$, а G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе группы $\operatorname{Aut} F \simeq GL(k,p)$. Поскольку неприводимая группа вполне приводима, из определения функции $\rho(n)$ получаем, что $G/F \in \mathfrak{A}^{\rho(k)} \subseteq \mathfrak{A}^{\rho(r(G))}$. Теперь $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(r(G))}$ и по лемме 7 производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает $1 + \rho(r(G))$. В [16] доказано, что $\rho(n) \leq 2 + n$ при любом натуральном n, поэтому производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает $3 + r(G)$.

2. Воспользуемся индукцией по порядку группы. По лемме IV.6.9 из [1] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой, $F = C_G(F)$, $|F(G)| = p^k$ и G/F изоморфна p-разрешимой подгруппе группы $GL(k,p)$. По лемме 20 производная длина силовской p-подгруппы группы $GL(k,p)$ не превышает t, где $2^{t-1} < k \leq 2^t$, поэтому производная длина силовской p-подгруппы группы G/F также не превышает t. По лемме 21 получаем, что $l_p(G/F) \leq t$, значит, $l_p(G) \leq 1 + t$. Из неравенства $2^{t-1} < k$ вытекает, что $t < 1 + \log_2 k$, а из определения p-ранга следует, что $k \leq r_p(G)$, поэтому $l_p(G) < 2 + \log_2 r_p(G)$. Теорема 4 доказана.

Доказательство следствия 1. Если $r_p(G) = 1$, то G является p-сверхразрешимой группой и $l_p(G) = 1$. Для $r_p(G) \in \{2,3\}$ из лемм 16 и 19 получаем, что либо $l_p(G) < r_p(G)$, либо $r_p(G) = 2$ и $p \in \{2,3\}$. Пусть $r_p(G) > 3$. Так как $4r_p(G) \leq 2^{r_p(G)}$ при $r_p(G) \geq 4$, то $\log_2 r_p(G) \leq r_p(G) - 2$. Из утверждения 2 теоремы 4 получаем, что $l_p(G) < 2 + \log_2 r_p(G) \leq 2 + r_p(G) - 2 = r_p(G)$. Следствие доказано.

Для группы нечетного порядка можно повторить рассуждения доказательства утверждения 1 теоремы 4 с заменой функции $\rho(n)$ на $\sigma(n)$. В результате получится, что у группы G нечетного порядка производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает $1 + \sigma(r(G))$. Значения функций $\rho(n)$ и $\sigma(n)$ известны для каждого n (см., например, [20, лемма 2.4; 21, теорема 4B]). Подставляя эти значения для конкретных n, получим два следствия.

Следствие 9. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда*
1) *если $r(G) \in \{2,3,4\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 3 + r(G)$;*
2) *если $r(G) \in \{5,6,7\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 8$;*
3) *если $r(G) \in \{8,9\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + r(G)$;*
4) *если $r(G) \in \{10,\dots,17\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 11$;*
5) *если $r(G) \in \{18,\dots,25\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 12$;*
6) *если $r(G) \in \{26,\dots,33\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 13$;*
7) *если $r(G) \in \{34,\dots,65\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 14$;*
8) *если $r(G) \geq 66$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + 5\log_9(r(G) - 2) + 53/10$.*

Следствие 10. *Пусть G — группа нечетного порядка. Тогда*
1) *если $r(G) = 1, 2$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2$;*

2) *если* $r(G) = 3, 4$, *то* $d(G/\Phi(G)) \leq 3$;

3) *если* $5 \leq r(G) \leq 14$, *то* $d(G/\Phi(G)) \leq 4$;

4) *если* $15 \leq r(G) \leq 34$, *то* $d(G/\Phi(G)) \leq 5$;

5) *если* $35 \leq r(G) \leq 64$, *то* $d(G/\Phi(G)) \leq 6$.

В общем случае $d(G/\Phi(G)) \leq 2\log_7(r(G)/5) + 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

2. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.

3. *Rose J.* Sufficient conditions for the existence of ordered Sylow towers in finite groups // J. Algebra. 1974. V. 28. P. 116–126.

4. *Zassenhaus H.* Beweis eines Zatzes uber diskrete Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1938. Bd 12. S. 289–312.

5. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.

6. *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.

7. *Монахов В. С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Праці Українського математичного конгресу–2001. Секц. 1. Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. С. 81–90.

8. *Чунихин С. А.* Комплекты неспециальных подгрупп и p-нильпотентность конечных групп // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 4. С. 654–656.

9. *Gaschutz W.* Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups. Canberra: Aust. Nation. Univ., 1979. (Notes Pure Math.; V. 11).

10. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

11. *Schimd P.* Every saturated formation is a local formation // J. Algebra. 1978. V. 51. P. 144–148.

12. *Mann A.* The derived length of p-groups // J. Algebra. 2000. V. 224. P. 263–267.

13. *Bloom D.* The subgroups of $PSL(3, q)$ for odd q // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127, N 1. P. 150–178.

14. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. М.: Наука, 1972.

15. *Flannery D. L., O'Brien E. A.* Linear groups of small degree over finite fields // Intern. J. Algebra Comput. 2005. V. 15, N 3. P. 467–502.

16. *Dixon J. D.* The solvable length of a solvable linear groups // Math. Z. 1968. Bd 12. S. 151–158.

17. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. II. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1982.

18. *Dixon J. D.* The structure of linear groups. London: van Nostrand–Reinhold Company, 1971.

19. *Брюханова Е. Г.* Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы конечной разрешимой группы // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 2. С. 161–170.

20. *Berkovich Y.* Solvable permutation groups of maximal derived length // Algebra Colloq. 1997. V. 4, N 2. P. 175–186.

21. *Palfy P. P.* Bounds for linear groups of odd order // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. 1990. V. 39, N 23. P. 253–263.

Статья поступила 3 июня 2010 г.

Монахов Виктор Степанович
Гомельский университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
victor.monakhov@gmail.com

Трофимук Александр Александрович
Брестский гос. университет им. А. С. Пушкина,
бульвар Космонавтов, 21, Брест 224016, Беларусь
trofim08@yandex.ru