Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 517.54

О ПРИНЦИПАХ КОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ПРИВЕДЕННЫХ МОДУЛЕЙ

Е. Г. Прилепкина

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия, при которых выполняется равенство в принципах композиции для обобщенных приведенных модулей. В качестве приложений даны описания экстремальных конфигураций в известных и новых неравенствах для произведений радиусов Робена неналегающих областей.

Ключевые слова: приведенный модуль, функция Робена, функция Неймана, неналегающая область, задача об экстремальном разбиении.

§ 1. Введение и предварительные сведения

Задачи об экстремальном разбиении восходят к М. А. Лаврентьеву и имеют богатую историю. Существуют два метода их изучения: экстремально-метрический и емкостной. Систематическому развитию первого метода посвящены, например, работы Г. В. Кузьминой, Е. Г. Емельянова, А. Ю. Солынина [1–3], в то время как емкостной подход развивается в основном в работах В. Н. Дубинина и его учеников (см. например, [4–12]). В частности, в [7] доказаны принципы композиции для обобщенных приведенных модулей, из которых вытекает ряд известных результатов об экстремальном разбиении. При этом чтобы описать экстремальные конфигурации, необходимо исследовать вопрос о случаях равенства в указанных принципах. В настоящей заметке мы восполняем данный пробел и продолжаем исследования, начатые в [8]. Для удобства дальнейшего изложения приведем определения и некоторые свойства приведенного модуля.

Пусть B — конечносвязная область на комплексной сфере $\overline{\mathbf{C}}$ без вырожденных граничных точек либо вся комплексная плоскость. Обозначение $\overline{B}$ означает компактификацию B посредством простых концов Каратеодори, граница ∂B — совокупность простых концов. Под окрестностью будем понимать любое открытое в $\overline{B}$ множество. Если это не вызовет недоразумений, то будем отождествлять элемент $\overline{B}$, соответствующий внутренней точке B, с самой этой точкой, а носитель достижимой граничной точки и саму эту точку будем обозначать одной и той же буквой. В случае жордановой области B понятия замыкания $\overline{B}$ и границы ∂B совпадают с обычными, а окрестность в $\overline{B}$ есть пересечение открытого в $\overline{\mathbf{C}}$ множества с $\overline{B}$.

Пусть Γ — замкнутое подмножество ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент, и пусть z_0 — достижимая граничная точка

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00028), а также гранта ДВО РАН (код проекта 09–III–А–01–008).

$\partial B \setminus \Gamma$ области B, $z_0 \neq \infty$ и $\alpha_B(z_0)\pi$ — внутренний угол области B с вершиной z_0 (см., например, [2, определение 1.1]). Пусть существует конформное и однолистное отображение f области B на аналитическую жорданову область $f(B)$ такое, что в некоторой окрестности z_0 имеет место разложение

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^{1/\alpha_B(z_0)}(c(z_0) + o(1)), \quad z \to z_0, \tag{1}$$

$c(z_0) \neq 0$. Если $z_0 = \infty$, то локальный параметр $z - z_0$ в разложении (1) нужно заменить на $1/z$. Достижимые граничные точки $z_0 \in \partial B$, для которых выполняется (1), а также внутренние точки $z_0 \in B$ будем далее называть *допустимыми* точками для B. Для внутренней точки $z_0 \in B$ полагаем $\alpha_B(z_0) = 2$.

В этом случае определена функция Робена $g_B(z, z_0, \Gamma)$ области B и множества Γ с полюсом в допустимой точке $z_0 \in \overline{B} \setminus \Gamma$ [5]. Отметим, что изучению функции Робена в настоящее время посвящено немало работ (см., например, [13–18]). В отличие от работ других авторов в [5] введен аналог функции Робена с полюсом в граничной точке.

Для аналитической жордановой области $g(z) := g_B(z, z_0, \Gamma)$ определяется условиями: $g(z)$ вещественнозначная непрерывная на $\overline{B}\setminus\{z_0\}$, непрерывно дифференцируемая на $\overline{B}\setminus (\Gamma \cup \{z_0\})$, гармоническая в $B\setminus\{z_0\}$ и такая, что $g(z) = 0$ при $z \in \Gamma$, $\partial g/\partial n = 0$ при $z \in \partial B\setminus(\Gamma \cup \{z_0\})$, при этом $g(z) + \log|z - z_0|$ — гармоническая функция в окрестности точки z_0 (символ $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к границе). Полагаем по определению

$$g_B(z, z_0, \Gamma) := \begin{cases} \alpha_B(z_0) g_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(\Gamma)), & \text{если } z_0 \in \partial B, \\ g_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(\Gamma)), & \text{если } z_0 \in B, \end{cases}$$

для произвольной конечносвязной области B. Здесь $f(z)$ определено выше и удовлетворяет (1).

Радиусом Робена [6] называется величина

$$r(B, \Gamma, z_0) := \exp \lim_{z \to z_0} (g_B(z, z_0, \Gamma) + \log|z - z_0|).$$

Если $\Gamma = \partial B$, то функция Робена совпадает с хорошо известной функцией Грина, а радиус Робена — с внутренним радиусом $r(B, z_0)$ области B в точке z_0 (см., например, [4, с. 29]). При $z_0 = \infty$ и $z_0 \in B$ величина $r^{-1}(B, \Gamma, z_0)$ называется *емкостью Робена* множества Γ относительно области B. В случае, когда B — односвязная область, Γ — дуга ее границы, величина $r(B, \Gamma, z_0)$ рассматривалась, по существу, в работах [2, 19].

В случае пустого множества Γ нам потребуется двухполюсная функция Неймана $n(z) := n_B(z, z_0; z^*)$ [4, с. 34] (ср. [3, с. 46]), которая для аналитической жордановой области определяется как функция, удовлетворяющая условиям:

1) $n(z)$ гармоническая в $\overline{B} \setminus \{z_0, z^*\}$;

2) $\partial n(z)/\partial n = 0$ при $z \in (\partial B)\setminus\{z_0 \cup z^*\}$;

3) $n(z) + \log|z - z_0|$ — ограниченная гармоническая функция в некоторой окрестности первого полюса z_0;

4) в окрестности второго полюса z^* выполняется разложение

$$n(z) = \frac{\alpha_B(z_0)}{\alpha_B(z^*)} \log|z - z^*| + o(1), \quad z \to z^*, \ z \in B,$$

где, как и раньше, $\alpha_B(z)\pi$ — внутренний угол области B с вершиной в точке z.

Для произвольной конечносвязной области B и допустимых точек z_0, z^* определим функцию Неймана по формуле

$$n_B(z, z_0; z^*) = \beta_B(z_0) n_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(z^*)) - \frac{\alpha_B(z_0)}{\alpha_B(z^*)} \log |c(z^*)|^{\beta_B(z^*)},$$

где f — однолистное конформное отображение B на аналитическую жорданову область, $\beta_B(z) = 1$ для внутренней точки $z \in B$, $\beta_B(z) = \alpha_B(z)$ для граничных точек $z \in \partial B$, $c(z^*)$ — константа из разложения (1) в окрестности точки z^*. Для всей комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ полагаем по определению

$$n_{\overline{\mathbf{C}}}(z, z_0; z^*) = \log |(z - z^*)(z_0 - z^*)/(z - z_0)|, \quad z^* \neq \infty,$$

$$n_{\overline{\mathbf{C}}}(z, z_0; z^*) = -\log |z - z_0|, \quad z^* = \infty.$$

Непосредственно из определений функций Робена и Неймана в окрестности конечной точки z_0 вытекают разложения

$$g_B(z, z_0, \Gamma) = -\log |z - z_0| + R(z_0) + o(1), \quad z \to z_0, \tag{2}$$

$$n_B(z, z_0; z^*) = -\log |z - z_0| + N(z_0, z^*) + o(1), \quad z \to z_0. \tag{3}$$

Ясно также, как изменятся определения этих понятий, если $z_0 = \infty$ (локальный параметр $z - z_0$ нужно заменить параметром $1/z$).

Приступим к определению приведенного модуля. В рамках данной работы опустим определение приведенного модуля, использующее асимптотическую формулу вырождающегося конденсатора [4–11]. Вместо этого воспользуемся выражением приведенного модуля через функции Робена или Неймана. Пусть область B, как и выше, и пусть Γ — замкнутое подмножество ∂B, причем Γ либо пусто, либо состоит из конечного числа невырожденных связных компонент. Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ — совокупность различных допустимых точек в $\overline{B} \backslash \Gamma$, $\alpha_k \pi$ — внутренний угол области B с вершиной в точке z_k, $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ — совокупность вещественных чисел, $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2 \neq 0$, и $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$, где $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r^{\nu_k}$, μ_k, ν_k, $k = 1, \dots, n$, — произвольные положительные числа, $r > 0$. Для непустого множества Γ определим величины R_{kl}, $k = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n$, полагая

$$R_{kl} := g_B(z_k, z_l, \Gamma), \quad k \neq l;$$

$$R_{kk} := \lim_{z \to z_k} (g_B(z, z_k, \Gamma) + \log |z - z_k|) = R(z_k).$$

Для пустого множества Γ требуем дополнительно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k}{\nu_k} = 0. \tag{4}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\delta_1 \neq 0$. При $\Gamma = \varnothing$ зададим R_{kl}, $k = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n$, соотношениями

$$R_{1m} = R_{m1} = 0, \quad m = 1, \dots, n;$$

$$R_{kl} := n_B(z_k, z_l; z_1),\ k \neq l; \quad R_{kk} := N(z_k, z_1),\ k = 2, \dots, n,\ l = 2, \dots, n.$$

Здесь величины $N(z_k, z_1)$ определяются из разложения(3) функции $n_B(z, z_k; z_1)$ в окрестности точки z_k.

Приведенным модулем области B относительно множества Γ и совокупностей Z, Δ, Ψ является величина

$$M(B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) := \frac{\nu^2}{4\pi}\left(\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} R_{kl} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k^2 \log \mu_k}{\nu_k^2}\right), \tag{5}$$

где $\nu = 2\left(\sum\limits_{k,l=1}^{n} \alpha_k \delta_k^2/\nu_k\right)^{-1}$.

Понятие обобщенного приведенного модуля введено в работе [7] и включает в себя (с точностью до нормирующего множителя) классическое определение приведенного модуля [20, с. 103], а также приведенные модули двуугольников [21, 22] и треугольников [2] (см. [7, § 2, с. 154, 155]). Отметим, что приведенный модуль для непустого множества Γ и его связь с асимптотикой емкости впервые рассматривались в [5], приведенный модуль всей комплексной плоскости — в [11], при пустом множестве Γ приведенные модули односвязных областей изучались, в частности, в [7, 8], а для произвольных конечносвязных областей — в [9]. Учитывая конформную инвариантность емкости конденсатора, легко установить, как изменится приведенный модуль при однолистном и конформном отображении [5, 9]. Поэтому в дальнейшем ограничимся ситуацией, когда все точки из совокупности Z конечны. Чтобы упростить формулировки, будем рассматривать «нормированный» приведенный модуль

$$\widetilde{M}(B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) := \frac{4\pi}{\nu^2} M(B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} R_{kl} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k^2 \log \mu_k}{\nu_k^2}. \tag{6}$$

При условиях существования приведенного модуля, следуя [8], введем функцию

$$u(z) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{\nu_k} g_B(z, z_k, \Gamma) & \text{для } \Gamma \neq \varnothing, \\ \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\delta_k}{\nu_k} n_B(z, z_k; z_1) & \text{для } \Gamma = \varnothing, \end{cases} \tag{7}$$

которую будем называть *потенциальной* функцией для области B, множества Γ и совокупностей Z, Δ, Ψ. Применяя (2) для непустого множества Γ и (3), (4) при $\Gamma = \varnothing$, убеждаемся, что в некоторых окрестностях точек z_k имеют место разложения

$$u(z) = -\frac{\delta_k}{\nu_k} \log|z - z_k| + a_k + o(1), \quad z \to z_k, \ z \in B. \tag{8}$$

При этом выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k \alpha_k}{\nu_k} a_k = \widetilde{M}(B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2 \alpha_k}{\nu_k^2} \log \mu_k. \tag{9}$$

Отметим, что в отличие от [8] мы определяем потенциальную функцию в том числе и для пустого множества Γ.

Для конечной точки z_0 комплексной сферы $\overline{\mathbf{C}}$ обозначим через $D(z_0, r)$ замкнутый круг с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$. В случае бесконечно удаленной точки определим $D(\infty, r) := \{z : |z| \geq 1/r\}$. Всюду ниже для заданной области $B \subset \overline{\mathbf{C}}$ и точки $z_0 \in B$ введем обозначение $E(z_0, r, B) = D(z_0, r)$, где r настолько мало, что $D(z_0, r) \subset B$; для достижимой граничной точки z_0 области

B обозначим через $E(z_0, r, B)$ замыкание в $\overline{B}$ связной компоненты пересечения $B \cap D(z_0, r)$, примыкающей к точке z_0. Обозначим также через $I(v, B)$ интеграл Дирихле функции v по множеству B:

$$I(v,\ B) := \iint\limits_{B} |\nabla v|^2\, dxdy,$$

а через B_r — разность множеств $B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E(z_k, \psi_k(r), B)$.

Следующие леммы практически повторяют леммы 1, 2 из работы [8].

Лемма 1. *Справедлива асимптотическая формула*

$$I(u, B_r) = -\pi \log r \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k^2}{\nu_k} + \pi \widetilde{M}(B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) + o(1), \quad r \to 0.$$

Доказательство. Учитывая конформную инвариантность интеграла Дирихле, можно считать, что область B ограничена кусочно аналитическими кривыми. Применяя формулу Грина и определение потенциальной функции, имеем

$$I(u, B_r) = -\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k(r)} u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds,$$

$\gamma_k(r) = \partial E(z_k, \psi_k(r), B) \cap B$, $k = 1, \dots, n$. Привлекая разложения (8), получаем

$$\int\limits_{\gamma_k(r)} u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int\limits_{\gamma_k(r)} \Big(-\frac{\delta_k}{\nu_k} \log \psi_k(r) + a_k + o(1) \Big) \Big(-\frac{\delta_k}{\nu_k} + o(1) \Big) d\varphi$$

$$= \pi \alpha_k \left[\frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} (\log \mu_k + \nu_k \log r) - a_k \frac{\delta_k}{\nu_k} \right] + o(1), \quad k = 1, \dots, n,$$

что приводит к асимптотической формуле

$$I(u, B_r) = -\pi \log r \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k^2}{\nu_k} - \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k^2}{\nu_k^2} \log \mu_k + \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k}{\nu_k} a_k + o(1), \quad r \to 0.$$

Воспользовавшись (9), приходим к утверждению леммы 1.

Вещественную функцию v назовем *допустимой* функцией для области B, множества Γ и совокупностей Z, Δ, Ψ, если она непрерывна в $\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{z_k\}$, равна нулю на Γ, удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки области B, за исключением, может быть, конечного числа таких точек, и если в окрестностях точек z_k имеют место разложения

$$v(z) = -\frac{\delta_k}{\nu_k} \log |z - z_k| + b_k + o(1), \quad z \to z_k,\ z \in B, \tag{10}$$

где b_k, $k = 1, \dots, n$, — некоторые вещественные постоянные [8].

Лемма 2. *Для потенциальной функции u с разложениями* (8) *и допустимой функции v с разложениями* (10) *имеет место равенство*

$$I(v - u, B) = I(v, B_r) - I(u, B_r) - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k}{\nu_k} (b_k - a_k) + o(1), \quad r \to 0. \tag{11}$$

Доказательство. Для всех достаточно малых $r > 0$ справедливы соотношения

$$I(v-u,B_r) = I(v,B_r) + I(u,B_r) + 2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k(r)} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$
$$= I(v,B_r) - I(u,B_r) + 2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k(r)} (v-u)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

где $\gamma_k(r) = \partial E(z_k,\psi_k(r),B)\cap B$, $k = 1,\dots,n$. Учитывая разложения (8), (10) и определение потенциальной функции u, получим

$$\int\limits_{\gamma_k(r)} (v-u)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int\limits_{\gamma_k(r)} (b_k - a_k + o(1))\left(-\frac{\delta_k}{\nu_k} + o(1)\right)d\varphi = -\pi\frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k}(b_k - a_k) + o(1)$$

при $r \to 0$ для любого $k = 1,\dots,n$. Для доказательства леммы достаточно заметить, что функция $u - v$ не имеет особенностей в области B и $I(v-u,B) = I(v-u,B_r) + o(1)$. Лемма доказана.

Замечание. Леммы 1 и 2 остаются справедливыми в том случае, если в определении множества B_r круги $D(z_k,r)$ заменить «почти кругами» (см. например, [4, с. 38]).

§ 2. Основные результаты

Пусть z_1, z_2 — достижимые граничные точки областей B_1, B_2 соответственно, $\check{z}_1$, $\check{z}_2$ — изображающие их точки [23, с. 38]. Будем говорить, что z_1 *совпадает с* z_2 *как точка плоскости*, если $\check{z}_1 = \check{z}_2$. Если $\check{z}_1 = \check{z}_2$ и найдется круг $D(\check{z}_1,\epsilon)$, для которого $B_1\cap D(\check{z}_1,\epsilon) = B_2\cap D(\check{z}_2,\epsilon)$, то будем говорить, что z_1 *совпадает с* z_2 *как достижимая граничная точка*.

Теорема 1. *Пусть множества B,Γ, совокупности $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$, $\Psi = \{\mu_k r^{\nu_k}\}_{k=1}^n$, как в определении приведенного модуля $\widetilde{M} = \widetilde{M}(B,\Gamma,Z,\Delta,\Psi)$, $u(z)$ — потенциальная функция для B, Γ, Z, Δ, Ψ. Пусть $B_i\subset B$ — попарно не пересекающиеся подобласти B, Γ_i, $Z_i = \{z_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, $\Delta_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, $\Psi_i = \{\mu_{ij}r^{\nu_{ij}}\}_{j=1}^{n_i}$ из определения приведенных модулей $\widetilde{M}_i = \widetilde{M}(B_i,\Gamma_i,Z_i,\Delta_i,\Psi_i)$, $u_i(z)$ — потенциальная функция для B_i, Γ_i, Z_i, Δ_i, Ψ_i, $i = 1,\dots,m$. Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) $(B\cap\partial B_i)\subset\Gamma_i$, $i = 1,\dots,m$;

2) $\Gamma\subset\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Gamma_i\right)\cup\left[\overline{\mathbf{C}}\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}\overline{B}_i\right)\right]$;

3) *каждая точка $z_k\in Z$ совпадает с некоторой точкой $z_{ij}\in Z_i$ при $k = k(i,j)$ (в случае $z_k\in\partial B$ имеется в виду совпадение достижимых граничных точек), $\delta_k = \delta_{ij}$, $\mu_k = \mu_{ij}$, $\nu_k = \nu_{ij}$, где $k = k(i,j)$;*

4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\delta_k^2/\nu_k = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}\delta_{ij}^2/\nu_{ij}$.

Тогда имеет место неравенство

$$\widetilde{M} \ge \sum_{i=1}^{m}\widetilde{M}_i + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m} I(u-u_i,B_i). \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим в области B функцию

$$v(z)=\begin{cases} u_i(z), & \text{если } z\in B\cap B_i,\\ 0, & \text{если } z\in B\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}B_i\right).\end{cases}$$

Условие 1 гарантирует, что функция $v(z)$ непрерывна в $\overline{B}\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n}\{z_k\}$. Из условий 2 и 3 следует, что $v(z)=0$ при $z\in\Gamma$ и в окрестности z_k, $k=1,\dots,n$, имеет место разложение (10). Применяя лемму 2, получаем

$$I(v-u,B)=I(v,B_r)-I(u,B_r)-2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k}(b_k-a_k)+o(1),\quad r\to 0. \tag{13}$$

По лемме 1

$$I(v,B_r)=-\pi\log r\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\alpha_{ij}\delta_{ij}^2}{\nu_{ij}}+\pi\sum_{i=1}^{m}\widetilde{M}_i+o(1),$$

$$I(u,B_r)=-\pi\log r\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k\delta_k^2}{\nu_k}+\pi\widetilde{M}+o(1),\quad r\to 0.$$

Заметим, что в случае совпадения точек z_k и z_{ij} выполняется равенство $\alpha_k=\alpha_{ij}$. Таким образом, справедливы соотношения

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\alpha_{ij}\delta_{ij}^2}{\nu_{ij}}\log\mu_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k\delta_k^2}{\nu_k}\log\mu_k,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k}b_k=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\alpha_{ij}\delta_{ij}}{\nu_{ij}}a_{ij},$$

где $b_k:=a_{ij}$, если $z_k=z_{ij}$. Учитывая (9), имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k}(b_k-a_k)=\left(\sum_{i=1}^{m}\widetilde{M}_i\right)-\widetilde{M}.$$

Подставляя полученные соотношения в (13), убеждаемся в справедливости неравенства

$$\sum_{i=1}^{m}I(u-u_i,B_i)\le I(v-u,B)=\pi\left(\widetilde{M}-\sum_{i=1}^{m}\widetilde{M}_i\right)+o(1),\quad r\to 0. \tag{14}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть множества B,Γ, совокупности $Z=\{z_k\}_{k=1}^n$, $\Delta=\{\delta_k\}_{k=1}^n$, $\Psi=\{\mu_k r^{\nu_k}\}_{k=1}^n$, как в определении приведенного модуля $\widetilde{M}:=\widetilde{M}(B,\Gamma,Z,\Delta,\Psi)$, $u(z)$ — потенциальная функция для B, Γ, Z, Δ, Ψ. Пусть $B_i\subset B$, $i=1,\dots,m$, — попарно не пересекающиеся области, Γ_i, $Z_i=\{z_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, $\Delta_i=\{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, $\Psi_i=\{\mu_{ij}r^{\nu_{ij}}\}_{j=1}^{n_i}$ из определения приведенных модулей $\widetilde{M}_i=\widetilde{M}(B_i,\Gamma_i,\ Z_i,\ \Delta_i,\Psi_i)$, $u_i(z)$ — потенциальная функция для B_i, Γ_i, Z_i, Δ_i, Ψ_i, $i=1,\dots,m$. Предположим, что каждая точка z_{ij} из совокупности Z_i совпадает (как точка комплексной плоскости) с точкой $z_k\in Z$ при некотором $k=k(i,j)$, для любых i и j имеют место равенства $\delta_{ij}=\delta_k$, $\mu_{ij}=\mu_k$, $\nu_{ij}=\nu_k$, где $k=k(i,j)$, и, кроме того, $\Gamma_i\subset\Gamma$, $i=1,\dots,m$,*

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\delta_k^2/\nu_k=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}\delta_{ij}^2/\nu_{ij}. \tag{15}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \widetilde{M}_i \geq \widetilde{M} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{m} I(u - u_i, B_i). \tag{16}$$

Доказательство. Сопоставим каждому индексу k, $1 \leq k \leq n$, множество $I_k \subset \mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$ такое, что $z_{ij} = z_k$ тогда и только тогда, когда $(i, j) \in I_k$. Если $I_k \neq \varnothing$, то из геометрического смысла α_k получаем неравенство

$$\sum_{(i,j) \in I_k} \alpha_{ij} \leq \alpha_k.$$

При пустом множестве I_k можно считать, что $\sum\limits_{(i,j) \in I_k} \alpha_{ij} := 0$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \delta_{ij}^2 / \nu_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{(i,j) \in I_k} \alpha_{ij} \Big) \delta_k^2 / \nu_k \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_k^2 / \nu_k.$$

Поэтому равенство (15) выполняется в том и только в том случае, когда при $\delta_k \neq 0$ множество I_k непусто и

$$\sum_{(i,j) \in I_k} \alpha_{ij} = \alpha_k.$$

Тогда очевидно выполнение равенств

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \frac{\delta_{ij}^2}{\nu_{ij}} \log \mu_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{(i,j) \in I_k} \alpha_{ij} \Big) \frac{\delta_k^2}{\nu_k} \log \mu_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\delta_k^2}{\nu_k} \log \mu_k, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \frac{\delta_{ij}^2}{\nu_{ij}} a_{k(i,j)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\delta_k^2}{\nu_k} a_k, \tag{18}$$

где a_k — константы из разложений (8) функции $u(z)$.

В силу (8) потенциальная функция $u(z)$ является допустимой для B_i, Γ_i, Z_i, Δ_i, Ψ_i, и по лемме 2 справедливы соотношения

$$I(u - u_i, B_i) = I(u, (B_i)_r) - I(u_i, (B_i)_r) - 2\pi \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij} \delta_{ij}}{\nu_{ij}} (a_{k(i,j)} - a_{ij}) + o(1), \quad r \to 0. \tag{19}$$

Просуммировав (19) по $i = 1, \ldots, m$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} I(u - u_i, B_i) \leq I(u, B_r) - \sum_{i=1}^{m} I(u_i, (B_i)_r) - 2\pi \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij} \delta_{ij}}{\nu_{ij}} (a_{k(i,j)} - a_{ij}) + o(1).$$

Ввиду (9), (17) и (18) последнее неравенство равносильно неравенству

$$\sum_{i=1}^{m} I(u - u_i, B_i) \leq I(u, B_r) - \sum_{i=1}^{m} I(u_i, (B_i)_r) - 2\pi \left(\widetilde{M} - \sum_{i=1}^{m} \widetilde{M}_i \right) + o(1), \quad r \to 0. \tag{20}$$

По лемме 1

$$I(u, B_r) = -\pi \log r \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \delta_k^2}{\nu_k} + \pi \widetilde{M} + o(1), \quad r \to 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} I(u_i, B_r) = -\pi \log r \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}\delta_{ij}^2}{\nu_{ij}} + \pi \left(\sum_{i=1}^{m} \widetilde{M}_i \right) + o(1), \quad r \to 0.$$

Подставляя в (20) полученные соотношения и используя (15), имеем

$$\sum_{i=1}^{m} I(u - u_i, B_i) \leq \pi \left(\left(\sum_{i=1}^{m} \widetilde{M}_i \right) - \widetilde{M} \right).$$

Теорема доказана.

Как следствия в условиях теоремы 1 получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \widetilde{M}_i \leq \widetilde{M} \tag{21}$$

и неравенство в другую сторону при выполнении предположений теоремы 2:

$$\sum_{i=1}^{m} \widetilde{M}_i \geq \widetilde{M}. \tag{22}$$

Соотношения (21) и (22) доказаны ранее в работе В. Н. Дубинина, Н. В. Эйрих [7, теоремы 5, 6] (см. также [4, теорема 2.14]) с использованием асимптотической формулы для емкости конденсатора и названы принципами композиции. Частные случаи принципов композиции, известные ранее в литературе, подробно изложены в [7, примеры 5.1–5.3]. Отметим, что теоремы 1, 2 данной работы в случае $m = 1$ дают некоторое уточнение принципа монотонности [7, теорема 1]. А именно, при расширении $B_1 \subset B$ за счет части границы B_1 справедливо неравенство

$$\widetilde{M}(B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) \geq \widetilde{M}(B_1, \Gamma_1, Z, \Delta, \Psi) + \frac{1}{\pi} I(u - u_1, B_1).$$

При расширении B_1 за счет дополнения до Γ_1 имеет место неравенство в другую сторону:

$$\widetilde{M}(B_1, \Gamma_1, Z, \Delta, \Psi) \geq \widetilde{M}(B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) + \frac{1}{\pi} I(u - u_1, B_1).$$

В случае, когда Z состоит из одной точки и множество Γ непусто, аналогичные неравенства получены в работах С. Р. Насырова [16, 24]. При этом слагаемое $\frac{1}{\pi} I(u - u_1, B_1)$ было заменено слагаемым, пропорциональным площади варьируемого участка в некоторой экстремальной метрике. Данные результаты были применены к исследованию обобщенной задачи М. А. Лаврентьева о нахождении формы дужки заданной длины максимальной подъемной силы при ограничениях на кривизну. Отметим также, что из указанных неравенств легко следует строгая монотонность приведенных модулей. Например, для двуугольников, имеющих равные углы при вершинах P_1, P_2, при строгом включении $D_1 \subset D_2$ приведенный модуль D_1 строго больше приведенного модуля D_2 [2, лемма 1.1]. Теперь можно дополнить принципы композиции (21) и (22) описанием случаев равенства.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы* 1 *равенство в* (21) *имеет место тогда и только тогда, когда* $\bigcup_{i=1}^{m} \overline{B}_i = \overline{B}$ *и* $u_i(z) = u(z) + C$ *в области* B_i, $i = 1, \dots, m$, *где* $C = 0$ *при* $\Gamma \neq \varnothing$ *и* C — *произвольная постоянная при* $\Gamma = \varnothing$.

Доказательство. Пусть функция $v(z)$ определена, как в доказательстве теоремы 1:

$$v(z) = \begin{cases} u_i(z), & \text{если } z \in B \cap B_i, \\ 0, & \text{если } z \in B \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i\right). \end{cases}$$

Из соотношения (14) следует, что равенство в (21) возможно, если $I(v-u,B) = 0$. Это означает, что $u(z) - v(z) \equiv C$ в области B. На множестве Γ функции $v(z)$ и $u(z)$ равны нулю, следовательно, $C = 0$ для непустого множества Γ. По определению $v(z)$ имеем $u(z) = u_i(z)+C$ в B_i, $i = 1,\dots,m$, а также $u(z) = C$ при $z \in \overline{B} \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{q} \overline{B}_i\right)$. Так как $u(z)$ гармоническая в $B \setminus Z$ и в окрестности полюсов имеет логарифмическую особенность, она не может равняться константе ни в какой подобласти B, значит, $\overline{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{B}_i$. Необходимость условий равенства доказана.

Пусть теперь $u_i(z) = u(z) + C$ в области B_i, $i = 1,\dots,m$, причем $C = 0$ для непустого Γ. Тогда $a_{ij} = a_k + C$ $(z_k = z_{ij})$ и

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}\delta_{ij}}{\nu_{ij}} a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k} a_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k} C.$$

Замечая, что при пустом множестве Γ приведенный модуль существует при дополнительном условии (4), получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}\delta_{ij}}{\nu_{ij}} a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k} a_k.$$

Принимая во внимание (9), убеждаемся, что

$$\sum_{i=1}^{m} \widetilde{M}_i = \widetilde{M}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *В условиях теоремы* 2 *равенство в* (22) *имеет место в том и только в том случае, когда* $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{B}_i = \overline{B}$ *и в области* B_i *выполняется* $u(z) = u_i(z) + C_i$, *где* $C_i = 0$ *при* $\Gamma_i \neq \varnothing$ *и* C_i — *произвольная постоянная при* $\Gamma_i = \varnothing$, $i = 1,\dots,m$.

Доказательство. Пусть выполняется равенство в (21). Из теоремы 1 следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} I(u - u_i, B_i) = 0.$$

Поэтому в области B_i имеем $u(z) = u_i(z) + C_i$, $i = 1,\dots,m$. Так как $u(z) = u_i(z) = 0$ на Γ_i, очевидно, что $C_i = 0$ при $\Gamma_i \neq \varnothing$. Допустим, найдется область $\widetilde{B} \subset B$, не пересекающаяся с $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{B}_i$. Поскольку $u(z)$ гармоническая в $B \setminus Z$ и не постоянна в $B \setminus Z$, она отлична от константы и на множестве $\widetilde{B}$. Следовательно, $I(u, \widetilde{B}) := \varepsilon > 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} I(u, (B_i)_r) \le I(u, B_r) - I(u, \widetilde{B}) = I(u, B_r) - \varepsilon.$$

Повторяя доказательство теоремы 2, взамен неравенства (20) имеем право применить неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} I(u-u_i, B_i) \leq I(u, B_r)-\varepsilon-\sum_{i=1}^{m} I(u_i, (B_i)_r)-2\pi\left(\widetilde{M}-\sum_{i=1}^{m}\widetilde{M}_i\right)+o(1), \quad r\to 0.$$

В итоге неравенство (22) становится строгим. Таким образом, области $\widetilde{B}$ не существует, и, значит, $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{B}_i = \overline{B}$.

Обратно, пусть в области B_i выполняются условия $u(z) = u_i(z)+C_i$, причем $C_i = 0$ для непустого Γ_i, $i = 1,\dots,m$. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k} a_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}\delta_{ij}}{\nu_{ij}}(a_{ij}+C_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}\delta_{ij}}{\nu_{ij}} a_{ij}. \tag{23}$$

Здесь используем, что при пустом множестве Γ_i выполняются условия (4) существования приведенных модулей $\sum\limits_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}\delta_{ij}}{\nu_{ij}} = 0$. Остается заметить, что с учетом (9) соотношение (23) эквивалентно равенству в (22). Теорема доказана.

§ 3. О произведении радиусов Робена неналегающих областей

Теоремы 3, 4 позволяют изучить случаи равенства в задачах об экстремальном разбиении, вытекающих из принципов композиции. Например, хорошо известное неравенство Лаврентьева

$$r(B_1, z_1)r(B_2, z_2) \leq |z_1-z_2|^2 \tag{24}$$

о произведении внутренних радиусов неналегающих областей (см., например, [4]) следует из теоремы 1 при $B = \overline{\mathbf{C}}_z$, $Z = \{z_1, z_2\}$, $\Delta = \{1, -1\}$, $\Psi = \{r, r\}$. По теореме 3 равенство в (24) выполняется в том и только в том случае, когда общая граница областей B_1 и B_2 представляет собой окружность или прямую вида $|z-z_1| = C|z-z_2|$, $C > 0$. Если области B_1, B_2 не пересекаются и лежат в единичном круге $U := \{z : |z| < 1\}$, то согласно неравенству Куфарева

$$r(B_1, z_1)r(B_2, z_2) \leq \frac{|z_1-z_2|^2(1-|z_1|)^2(1-|z_2|^2)}{|1-\bar{z}_1 z_2|^2}. \tag{25}$$

При этом равенство в (25) выполняется тогда и только тогда, когда $\overline{B}_1\cup\overline{B}_2 = \overline{U}$ и расположенная в круге общая часть ∂B_1 и ∂B_2 описывается уравнением

$$\left|\frac{1-\bar{z}_1 z}{z-z_1}\right| = \left|\frac{1-\bar{z}_2 z}{z-z_2}\right|.$$

Результат Куфарева следует также из теорем 1 и 3 в случае $B = U$, $\Gamma = \partial U$, $Z = \{z_1, z_2\}$, $\Delta = \{1, -1\}$, $\Psi = \{r, r\}$. Для вычисления приведенных модулей и потенциальной функции в этом случае используем функцию Грина единичного круга [4]:

$$g_U(z, z_0) = \log\left|\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}\right|. \tag{26}$$

В [6], в частности, получены некоторые неравенства для произведений радиусов Робена (взамен внутренних радиусов) неналегающих областей в круге и кольце. В настоящем параграфе дополним указанные результаты описанием экстремальных конфигураций и обобщим их на случай конечносвязной области.

Пусть непересекающиеся области B_1, B_2 лежат в единичном круге U. Пусть $z_1 \in B_1$ и $z_2 \in B_2$, а граничные множества $\Gamma_i \subset \partial B_i$ удовлетворяют условию $((\partial B_i) \cap U) \subset \Gamma_i$, $i = 1, 2$. Тогда справедливо неравенство [6, теорема 1]

$$r(B_1, \Gamma_1, z_1) r(B_2, \Gamma_2, z_2) \le \frac{|z_1 - z_2|^2 |1 - \bar{z}_1 z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}. \tag{27}$$

Теорема 5. *Равенство в* (27) *достигается тогда и только тогда, когда* $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 = \overline{U}$, $\Gamma_i = \overline{(\partial B_i) \cap U}$ *и на множествах* Γ_i, $i = 1, 2$, *выполняется условие*

$$\frac{|z - z_1||1 - \bar{z}_1 z|}{|z - z_2||1 - \bar{z}_2 z|} = C, \tag{28}$$

где C *— произвольная положительная постоянная.*

Доказательство. Пусть $z_1 \in B_1$, $z_2 \in B_2$. Полагая в теореме 1 $Z_1 = \{z_1\}$, $\Delta_1 = \{1\}$, $\Psi_1 = \{r\}$, $Z_2 = \{z_2\}$, $\Delta_2 = \{-1\}$, $\Psi_2 = \{r\}$, $B = U$, $\Gamma = \varnothing$, $Z = \{z_1, z_2\}$, $\Delta = \{1, -1\}$, $\Psi = \{r, r\}$, получим

$$\widetilde{M}(B_1, \Gamma_1, Z_1, \Delta_1, \Psi_1) + \widetilde{M}(B_2, \Gamma_2, Z_2, \Delta_2, \Psi_2) \le \widetilde{M}(U, \varnothing, Z, \Delta, \Psi). \tag{29}$$

Воспользовавшись явным выражением двухполюсной функции Неймана [9] для единичного круга

$$n_U(z, z_2; z_1) = \log \frac{|z - z_1||1 - \bar{z}_1 z||z_2 - z_1||1 - \bar{z}_2 z_1|}{|z - z_2||1 - \bar{z}_2 z|(1 - |z_1|^2)}, \tag{30}$$

вычисляем по формуле (6) приведенные модули

$$\widetilde{M}(U, \varnothing, Z, \Delta, \Psi) = 2 \log \frac{|z_1 - z_2|^2 |1 - \bar{z}_1 z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)};$$

$$M(B_1, \Gamma_1, Z_1, \Delta_1, \Psi_1) = 2 \log r(B_1, \Gamma_1, z_1),$$

$$M(B_2, \Gamma_2, Z_2, \Delta_2, \Psi_2) = 2 \log r(B_2, \Gamma_2, z_2)$$

и убеждаемся, что (27) эквивалентно (29). По теореме 3 равенство в (29) выполняется тогда и только тогда, когда $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 = \overline{U}$ и для потенциальных функций справедливо $u_i(z) = u(z) + C$, $i = 1, 2$. Из определения потенциальных функций следует, что $u_1(z) = g_B(z, z_1, \Gamma_1) \ge 0$, $u_2(z) = -g_B(z, z_2, \Gamma_2) \le 0$ и $u(z) = -n_U(z, z_2; z_1)$. Если $\Gamma_i \cap \partial U$ содержит некоторую дугу, то во внутренних точках z этой дуги одновременно имеем $u_i(z) = 0$ и $\partial u_i(z)/\partial n = \partial u(z)/\partial n = 0$. Это противоречит лемме Хопфа. Тем самым $\Gamma_i = \overline{(\partial B_i) \cap U}$ и на множестве Γ_i функция $u(z)$ равна C, $i = 1, 2$. Соотношение (28) с учетом (30) следует из определения потенциальной функции $u(z)$. Теорема доказана.

Обозначим через $K(t)$ концентрическое круговое кольцо $\{t < |z| < 1\}$ и через $T(z)$ — любое конформное отображение $K(t)$ на плоскость с разрезами по действительной оси. Пусть непересекающиеся области B_1, B_2 лежат в кольце $K(t)$ и граничные множества $\Gamma_i \subset \partial B_i$ удовлетворяют условию $((\partial B_i) \cap K(t)) \subset \Gamma_i$, $i = 1, 2$. Тогда для точек $z_1 \in B_1$ и $z_2 \in B_2$ справедливо неравенство

$$r(B_1, \Gamma_1, z_1) r(B_2, \Gamma_2, z_2) \le \frac{|T(-|z_1|) - T(|z_2|)|^2}{|T'(-|z_1|) T'(|z_2|)|} \tag{31}$$

[6, теорема 3].

Теорема 6. *Равенство в (31) достигается тогда и только тогда, когда точки z_1, z_2 вещественны и имеют разные знаки, $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 = \overline{K(t)}$, $\Gamma_i = \overline{(\partial B_i) \cap K(t)}$, и на множествах Γ_i, $i = 1, 2$, выполняется*

$$\frac{|T(z_1) - T(z)|}{|T(z_2) - T(z)|} = C,$$

где C — произвольная положительная постоянная.

Доказательство. Полагая в теореме 1 $Z_1 = \{z_1\}$, $\Delta_1 = \{-1\}$, $\Psi_1 = \{r\}$, $Z_2 = \{z_2\}$, $\Delta_2 = \{1\}$, $\Psi_2 = \{r\}$, $B = K(t)$, $\Gamma = \varnothing$, $Z = \{z_1, z_2\}$, $\Delta = \{1, -1\}$, $\Psi = \{r, r\}$, получим

$$\widetilde{M}(B_1, \Gamma_1, Z_1, \Delta_1, \Psi_1) + \widetilde{M}(B_2, \Gamma_2, Z_2, \Delta_2, \Psi_2) \leq \widetilde{M}(K(t), \varnothing, Z, \Delta, \Psi). \tag{32}$$

Без ограничения общности можем считать, что $z_2 > 0$, $z_1 = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Применим к кольцу $K(t)$ поляризацию [4, с. 73] относительно прямой, содержащей луч $\arg z = \frac{\pi+\theta}{2}$. Получим

$$\widetilde{M}(K(t), \varnothing, Z, \Delta, \Psi) \leq \widetilde{M}(K(t), \varnothing, \{-|z_1|, |z_2|\}, \{-1, 1\}, \{r, r\}). \tag{33}$$

Легко видеть, что на вещественной оси производная по нормали функции $-\log|z - z_0|$ равна нулю при вещественных z_0 и на границе $K(t)$ такое же условие выполняется для функции $\log|T(z) - T(z_0)|$. Таким образом, двухполюсная функция Неймана имеет вид

$$n_{K(t)}(z, |z_2|; -|z_1|) = -\log \frac{|T(z) - T(|z_2|)||T'(-|z_1|)|}{|T(z) - T(-|z_1|)||T(-|z_1|) - T(|z_2|)|}.$$

По формуле (6) вычисляем

$$\widetilde{M}(K(t), \varnothing, \{-|z_1|, |z_2|\}, \{-1, 1\}, \{r, r\}) = 2\log \frac{|T(-|z_1|) - T(|z_2|)|^2}{|T'(-|z_1|)T'(|z_2|)|}.$$

Неравенство (31) вытекает из неравенств (32) и (33). При этом равенство выполняется в том и только в том случае, когда одновременно выполняется равенство в (32) и (33). По теореме 6 из [8] заключаем, что равенство в (33) возможно тогда и только тогда, когда точки z_1, z_2 вещественны и имеют разные знаки. Утверждение о равенстве в (32) следует из теоремы 3 аналогично доказательству равенства в (28) с заменой U на $K(t)$. Теорема доказана.

Приведем аналог теоремы 5 для произвольной конечносвязной области B без вырожденных граничных точек. Рассмотрим конформное однолистное отображение B на плоскость с радиальными разрезами, причем такое, что заданные различные конечные точки z_1, z_2 переходят соответственно в 0 и ∞ и в окрестности z_2 имеет место разложение $1/(z - z_2) + a_0 + a_1(z - z_2) + \dots$. Обозначим это отображение через $\varphi_B(z; z_1, z_2)$. Применяя лемму 1 из [3] (см. также [12, теорема 4]), имеем

$$n_B(z, z_1; z_2) = -\log|\varphi_B(z; z_1, z_2)|,$$

следовательно,

$$M(B, \varnothing, \{z_1, z_2\}, \{1, -1\}, \{r, r\}) = -2\log|\varphi'_B(z_1; z_1, z_2)|.$$

Заменяя в доказательстве теоремы 5 круг U областью B, получаем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть непересекающиеся области B_1, B_2 лежат в B и граничные множества $\Gamma_i \subset \partial B_i$ удовлетворяют условию $((\partial B_i)\cap B) \subset \Gamma_i$, $i = 1, 2$. Тогда для конечных точек $z_1 \in B_1$ и $z_2 \in B_2$ справедливо неравенство*

$$r(B_1, \Gamma_1, z_1)r(B_2, \Gamma_2, z_2) \leq |\varphi'_B(z_1; z_1, z_2)|^{-1}. \tag{34}$$

Равенство в (34) достигается тогда и только тогда, когда $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 = \overline{B}$, $\Gamma_i = \overline{(\partial B_i) \cap B}$ и на множестве Γ_i, $i = 1, 2$, выполняется

$$|\varphi_B(z; z_1, z_2)| = C,$$

где C — произвольная положительная постоянная.

В заключение приведем нижнюю оценку произведения радиусов Робена неналегающих и расположенных в единичном круге областей.

Теорема 8. *Пусть непересекающиеся области B_1, B_2 лежат в единичном круге U. Пусть $z_1 \in B_1$ и $z_2 \in B_2$, а граничные множества $\Gamma_i \subset \partial B_i$ удовлетворяют условиям $\Gamma_i \subset \partial U$, $\Gamma_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2$. Тогда справедливо неравенство*

$$r(B_1, \Gamma_1, z_1)r(B_2, \Gamma_2, z_2) \geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)|1 - \bar{z}_1 z_2|^2}{|z_1 - z_2|^2}. \tag{35}$$

Равенство в (35) достигается тогда и только тогда, когда $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 = \overline{U}$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial U$ и множество $(\partial B_i) \cap U$, $i = 1, 2$, представляет собой лежащую в круге U часть окружности или прямой, заданную параметрическим уравнением

$$z = z(t) = \frac{e^{i\varphi}(a + it) + z_1(1 + ati)}{1 + ati + e^{i\varphi}(a + it)\bar{z}_1}, \tag{36}$$

где t — вещественный параметр,

$$\varphi = \arg((z_2 - z_1)/(1 - \bar{z}_1 z_2)), \quad r = |(z_2 - z_1)/(1 - \bar{z}_1 z_2)|, \quad a = (1 - \sqrt{1 - r^2})/r.$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{2} \widetilde{M}(B_i, \Gamma_i, \{z_i\}, \{1\}, \{r\}) \geq \widetilde{M}(U, \partial U, \{z_1, z_2\}, \{1, 1\}, \{r, r\}). \tag{37}$$

Вычисляя приведенные модули, убеждаемся, что неравенство (35) эквивалентно (37).

Рассмотрим случай равенства. Пусть $w = f(z)$ — дробно-линейное отображение круга U на себя, переводящее z_1 и z_2 в некоторые вещественные симметричные точки $-a$, a, $D_i := f(B_i)$, $\widehat{\Gamma}_i := f(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$. Учитывая поведение приведенного модуля при конформном отображении [4, с. 63], заключаем, что (37) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(D_1, \widehat{\Gamma}_1, \{-a\}, \{1\}, \{r\}) + \widetilde{M}(D_2, \widehat{\Gamma}_2, \{a\}, \{1\}, \{r\}) \\ \geq \widetilde{M}(U, \partial U, \{-a, a\}, \{1, 1\}, \{r, r\}). \end{aligned} \tag{38}$$

По теореме 4 равенство в (38) выполняется тогда и только тогда, когда $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 = \overline{U}$ и для соответствующих потенциальных функций $u_i(w) = u(w)$, $i = 1, 2$. Привлекая лемму Хопфа, убеждаемся, что в этом случае $\widehat{\Gamma}_1 \cup \widehat{\Gamma}_2 = \partial U$. Из определения потенциальных функций и равенства (26) имеем

$$u(w) = \log\left|\frac{1 - aw}{w - a}\right|\left|\frac{1 + aw}{w + a}\right| = \log\left|\frac{1 - a^2w^2}{w^2 - a^2}\right|.$$

Возьмем точку $w_0 \in \gamma_i := (\partial D_i) \cap U$, не являющуюся точкой ветвления линии уровня функции $u(w)$, и пусть $v(w)$ — сопряженная к $u(w)$ гармоническая функция в окрестности w_0. Так как в D_i функция $v(w)$ является сопряженной и к $u_i(w)$, в окрестности w_0 множество γ_i представляет собой кривую, на которой $v(w) = \text{const}$, или

$$\arg\left(\frac{1-a^2w^2}{w^2-a^2}\right) = \text{const}\,. \tag{39}$$

Полагая $w^2 = \alpha + i\beta$, заключаем, что (39) выполняется в случае $\beta = 0$ либо

$$C\{(a\alpha)^2 - (a^4+1)\alpha + a^2(1+\beta^2)\} = \beta(1-a^4), \tag{40}$$

где C — некоторая вещественная постоянная, $C \neq 0$. Отметим, что все кривые (40) проходят через точку $w^2 = a^2$, а области D_1, D_2 должны содержать внутри себя точки $-a$, a. Поэтому остается рассмотреть случай $\beta = 0$ или $\operatorname{Im} w^2 = 0$ на $(\partial D_i) \cap U$, $i = 1, 2$. В этом случае с точностью до переобозначения индекса $D_1 = U \cap \{\operatorname{Re} w < 0\}$, $D_2 = U \cap \{\operatorname{Re} w > 0\}$. Нетрудно проверить, что $z = f^{-1}(w)$ имеет вид

$$z = \frac{e^{i\varphi}(a+w) + z_1(1+aw)}{1 + aw + e^{i\varphi}(a+w)\bar{z}_1},$$

где

$$\varphi = \arg((z_2 - z_1)/(1 - \bar{z}_1 z_2)), \quad r = |(z_2 - z_1)/(1 - \bar{z}_1 z_2)|, \quad a = (1 - \sqrt{1-r^2})/r.$$

Учитывая, что $B_i = f^{-1}(D_i)$, $i = 1, 2$, получаем утверждение о равенстве. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузьмина Г. В.* Методы геометрической теории функций. I, II // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 3. С. 41–103; № 5. С. 1–50.
2. *Солынин А. Ю.* Модули и экстремально-метрические проблемы // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 1. С. 3–86.
3. *Емельянов Е. Г.* О квадратичных дифференциалах в многосвязных областях, являющихся полными квадратами. II // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2007. Т. 350. С. 40–51.
4. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. Владивосток: Дальнаука, 2009.
5. *Дубинин В. Н.* Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2003. Т. 302. С. 38–51.
6. *Дубинин В. Н., Кириллова Д. А.* К задачам об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2008. Т. 357. С. 54–74.
7. *Дубинин В. Н., Эйрих Н. В.* Обобщенный приведенный модуль // Дальневост. мат. журн. 2002. Т. 3, № 2. С. 135–147.
8. *Дубинин В. Н., Прилепкина Е. Г.* О сохранении обобщенного приведенного модуля при геометрических преобразованиях плоских областей // Дальневост. мат. журн. 2005. Т. 6, № 1–2. С. 39–56.
9. *Karp D., Prilepkina E.* Reduced modules with free boundary and its applications // Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 2009. V. 34. P. 353–378.
10. *Дубинин В. Н., Эйрих Н. В.* Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 52–75.
11. *Дубинин В. Н., Ковалев Л. В.* Приведенный модуль комплексной сферы // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 1998. Т. 254. С. 76–94.
12. *Прилепкина Е. Г.* Теоремы искажения для однолистных функций в многосвязных областях // Дальневост. мат. журн. 2009. Т. 9, № 1–2. С. 140–149.
13. *Duren P., Pfaltzgraff J., Thurman E.* Physical interpretation and further properties of Robin capacity // Алгебра и анализ. 1997. V. 9, N 3. P. 211–219.

14. *Duren P., Schiffer M.* Robin functions and energy functionals of multiply connected domains // Pacific J. Math. 1991. V. 148. P. 251–273.
15. *O'Neill M. D., Thurman R. E.* Extremal domains for Robin capacity // Complex Variables. 2000. V. 41. P. 91–109.
16. *Nasyrov S.* Robin capacity and lift of infinitely thin airfoils // Complex Variables. 2002. V. 47, N 2. P. 93–107.
17. *Stiemer M.* A representation formula for the Robin function // Complex Variables. 2003. V. 48, N 5. P. 417–427.
18. *Vasil'ev A. Yu.* Robin's modulus in a Hele–Shaw problem // Complex Variables. 2004. V. 49, N 7–9. P. 663–672.
19. *Gaier D., Hayman W.* On the computation of modules of long quadrilaterals // Constr. Approx. 1991. V. 7. P. 453–467.
20. *Хейман В. К.* Многолистные функции. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
21. *Кузьмина Г. В.* Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с полосообразными областями в структуре траекторий // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 154. С. 110–129.
22. *Емельянов Е. Г.* К задачам об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 154. С. 76–89.
23. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
24. *Насыров С. Р.* Вариации емкостей Робена и их приложения // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1128–1146.

Статья поступила 29 сентября 2010 г.

Прилепкина Елена Гумаровна
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
pril-elena@yandex.ru