Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 517.5

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В L_2

М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов

Аннотация. Найдены точные значения различных n-поперечников для классов дифференцируемых периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$, удовлетворяющих ограничению

$$\int_0^h t\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)}; t)\, dt \leq \Phi(h),$$

где $h > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\widetilde{\Omega}_m(f^{(r)}; t)$ — обобщенный модуль непрерывности m-го порядка производной $f^{(r)} \in L_2[0, 2\pi]$, $\Phi(t)$ — произвольная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$.

Ключевые слова: пространство интегрируемых с квадратом функций, наилучшее приближение, экстремальная характеристика, обобщенный модуль непрерывности, поперечник.

1. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел вещественной оси. Обозначим через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ пространство интегрируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\mathscr{T}_{n-1}$ — подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Известно, что для произвольной $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

величина ее наилучшего приближения элементами $T_{n-1} \in \mathscr{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathscr{T}_{n-1}\}$$
$$= \|f - S_{n-1}(f, x)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2}, \quad \rho_k^2 := a_k^2 + b_k^2,\ k \geq n, \quad (1)$$

где $S_{n-1}(f, x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье $f(x)$.

Равенством
$$\omega_m(f,t) = \sup\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : |h| \le t\} \tag{2}$$
определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$, где
$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kh)$$
— разность m-го порядка функции $f(x)$ с шагом h.

Под $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^0 = L_2$) понимаем множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат L_2.

При решении экстремальных задач теории аппроксимации в L_2 вопросы вычисления точных констант
$$K_{m,n,r}(t) = \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\omega_m(f^{(r)}, t/n)};\ f \in L_2^{(r)},\ f \ne \mathrm{const}\right\} \tag{3}$$
в неравенствах типа Джексона
$$E_{n-1}(f) \le \chi n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, t/n)$$
исследовались многими авторами (см., например, [1–14] и приведенную там литературу). Использование других характеристик гладкости 2π-периодических функций, например тригонометрических модулей непрерывности и $\mathscr{K}$-функционалов, рассмотренных в [7, 8], позволили получить новые содержательные результаты, связанные с оптимизацией неравенств типа Джексона в пространстве L_2. При решении некоторых задач теории приближения вместо модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(f;t)$ функции $f \in L_2$ иногда удобнее использовать следующую эквивалентную характеристику:
$$\Omega_m(f;t) = \left\{\frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\bar h}^m f(\cdot)\|^2 \, dh_1 \cdots dh_m\right\}^{1/2}, \quad t > 0, \tag{4}$$
где $\bar h = (h_1, \dots, h_m)$, $\Delta_{\bar h}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \dots \circ \Delta_{h_m}^1$, $\Delta_{h_j}^1 f = f(\cdot + h_j) - f(\cdot)$, $j = \overline{1,m}$, которую называют *обобщенным модулем непрерывности m-го порядка* (см., например, [15, с. 93; 16]). Интересные применения модуля непрерывности (4) в задачах аппроксимации $f \in L_2$ имеются в работах С. Б. Вакарчука [11] и С. Б. Вакарчука и В. И. Забутной [12]. В частности, в [11] рассматривается аппроксимационная экстремальная характеристика
$$\mathscr{K}_{m,n,r}(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)}; t/n)} : f \in L_2^{(r)},\ f \ne \mathrm{const}\right\} \tag{5}$$
и доказывается, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и произвольной $t \in (0, \pi/2]$ справедливы равенства
$$\mathscr{K}_{m,n,r}(t) = \left\{2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-m/2}.$$

Следуя [10], далее полагаем
$$F_h f(x) := f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt, \quad h > 0,$$

— функция Стеклова функции $f \in L_2$. Определим разности первого и высших порядков следующим образом:

$$\widetilde{\Delta}_h(f;x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f;x) = \widetilde{\Delta}_h\big(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f;x);x\big) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^k f(x),$$

где

$$F_h^0 f(x) = f(x), \quad F_h^k f(x) = F_h\big(F_h^{k-1} f(x)\big), \quad k = \overline{1,m},\ m \in \mathbb{N},$$

E — единичный оператор в L_2.

Наряду с величинами (2) и (4) *обобщенным модулем непрерывности m-го порядка функции* $f \in L_2$ называют также величину [10]

$$\widetilde{\Omega}_m(f;t) = \sup\big\{\big\|\widetilde{\Delta}_h^m(f;\cdot)\big\| : |h| \le t\big\} = \sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^k f(\cdot)\right\| : |h| \le t\right\}. \tag{6}$$

Легко заметить, что функция (6) обладает всеми свойствами модуля непрерывности m-го порядка. Поэтому несомненный интерес представляют вычисления следующих экстремальных характеристик:

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{m,n,r}(t) \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\widetilde{\Omega}_m(f^{(r)}, t/n)} : f \in L_2^{(r)},\ f \ne \text{const}\right\}, \tag{7}$$

$$\mathscr{M}_{m,n,r}(h) \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h t\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)}, t)\,dt\right)^m} : f \in L_2^{(r)},\ f \ne \text{const}\right\}. \tag{8}$$

$$\mathbb{K}_{m,n,r,p}(h) \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\frac{n^{r-\frac{1}{p}} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \widetilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}, t)\,dt\right)^{1/p}} : f \in L_2^{(r)},\ f \ne \text{const}\right\}, \tag{9}$$

где $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ p, h \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любых чисел $0 < t \le \pi/2$ справедливы равенства*

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{m,n,r}(t) = \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{-m}. \tag{10}$$

Доказательство. В [10] доказано, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < nt \le \pi/2$ и произвольного $f \in L_2^{(r)}$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}^2(f) \le \big(E_{n-1}^2(f)\big)^{1-1/2m} n^{-r/m}\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)};t) + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\sin kt}{kt}\rho_k^2. \tag{11}$$

Поскольку при $0 < nt \le \pi/2$ справедливо равенство

$$\max\left\{\frac{\sin\tau}{\tau} : \tau > nt\right\} = \frac{\sin nt}{nt},$$

из (11) с учетом (1) имеем

$$\left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)E_{n-1}^2(f) \le \big(E_{n-1}^2(f)\big)^{1-1/2m} n^{-r/m}\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)};t).$$

Отсюда

$$\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^m n^r E_{n-1}(f)\le\widetilde{\Omega}_m(f^{(r)};t). \tag{12}$$

Полученное неравенство запишем в виде

$$\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\widetilde{\Omega}_m(f^{(r)},t)}\le\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{-m},$$

откуда с учетом определения величины (7) приходим к оценке сверху

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{m,n,r}(t)\le\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{-m}. \tag{13}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x)=\sin nx\in L_2$. Поскольку

$$E_{n-1}(f_0)=1,\quad \widetilde{\Omega}_m\big(f_0^{(r)},t/n\big)=n^r\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^m,$$

имеем

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{m,n,r}(t)\ge\frac{n^r E_{n-1}(f_0)}{\widetilde{\Omega}_m\big(f_0^{(r)},t/n\big)}=\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{-m}. \tag{14}$$

Сопоставляя неравенства (13) и (14), получаем (10), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и h — произвольное число, удовлетворяющее условию $0<h\le\pi/n$. Тогда*

$$\mathscr{M}_{m,n,r}(h)=2^m h^{-2m}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m}, \tag{15}$$

$$\left(1-\frac{\sin h}{h}\right)^{-m}\le\widetilde{\mathscr{K}}_{m,n,r}(h)\le\left\{1-\left(\frac{2}{h}\sin\frac{h}{2}\right)^2\right\}^{-m}. \tag{16}$$

Доказательство. В самом деле, если $f\in L_2^{(r)}$ и

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— ряд Фурье функции $f(x)$, то

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}_m^2(f^{(r)},h)&=\sup\big\{\big\|\widetilde{\Delta}_t^m(f^{(r)};\cdot)\big\|^2:|t|\le h\big\}\\&=\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{2m}:|t|\le h\right\}.\end{aligned} \tag{17}$$

Умножая обе части неравенства (11) на $t>0$ и интегрируя полученное неравенство в пределах $t\in[0,h]$, будем иметь

$$\frac{h^2}{2}E_{n-1}^2(f)\le\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\frac{1-\cos kh}{k^2}+\big(E_{n-1}^2(f)\big)^{1-\frac{1}{2m}}\frac{1}{n^{r/m}}\int_0^h t\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)};t)\,dt. \tag{18}$$

Заметив, что

$$\max\left\{\frac{1-\cos kh}{k^2}:k\ge n\right\}=\frac{1-\cos nh}{n^2},$$

из (18) имеем

$$E_{n-1}(f) \le \left\{\frac{2n^2}{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}\right\}^m \cdot \frac{1}{n^r}\left(\int_0^h t\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)};t)\,dt\right)^m. \tag{19}$$

Используя определение величины (8), из (19) приходим к оценке сверху

$$\mathscr{M}_{m,n,r}(h) \le \left\{\frac{2n^2}{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}\right\}^m \overset{\text{def}}{=} 2^m h^{-2m}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m}. \tag{20}$$

Для получения оценки снизу достаточно рассмотреть функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, воспользоваться определением величины (8) и следующими легко проверяемыми соотношениями:

$$\begin{gathered} E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \widetilde{\Omega}_m\big(f_0^{(r)};t\big) = n^r\left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^m, \\ \left(\int_0^h t\widetilde{\Omega}_m^{1/m}\big(f_0^{(r)};t\big)\,dt\right)^m = n^r\left\{\frac{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}{2n^2}\right\}^m. \end{gathered} \tag{21}$$

В самом деле, ввиду (21)

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_{m,n,r}(h) &\ge n^r E_{n-1}(f_0)\left(\int_0^h t\Omega_m^{1/m}\big(f_0^{(r)},t\big)\,dt\right)^{-m} \\ &= \left\{\frac{2n^2}{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}\right\}^m = 2^m h^{-2m}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m}. \end{aligned} \tag{22}$$

Равенство (15) получается из сопоставления неравенств (20) и (22). Для произвольной функции $f(x) \in L_2^{(r)}$ из неравенства (19) имеем

$$E_{n-1}(f) \le \left\{\frac{2n^2}{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}\right\}^m \left(\frac{h^2}{2}\right)^m \frac{1}{n^r}\widetilde{\Omega}_m(f^{(r)};h).$$

Отсюда следует оценка сверху в неравенстве (16):

$$\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\widetilde{\Omega}_m(f^{(r)};h/n)} \le \left\{\frac{(h)^2}{(h)^2 - 2(1-\cos h)}\right\}^m = \left\{1 - \left(\frac{2}{h}\sin\frac{h}{2}\right)^2\right\}^{-m}. \tag{23}$$

Для рассмотренной выше экстремальной функции $f_0(x) \in L_2^{(r)}$ согласно неравенству (14) получаем оценку снизу

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{m,n,r}(h) \ge \frac{n^r E_{n-1}(f_0)}{\widetilde{\Omega}_m\big(f_0^{(r)};h/n\big)} = \left(1 - \frac{\sin h}{h}\right)^{-m}. \tag{24}$$

Двойное неравенство (16) вытекает из (23) и (24). Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 2 *справедливы соотношения*

$$\mathscr{M}_{m,n,r}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left(\frac{2n^2}{\pi^2 - 4}\right)^m, \quad 1 \le \widetilde{\mathscr{K}}_{m,n,r}(\pi) \le \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)^{-m}. \tag{25}$$

Отметим, что равенство (25) ранее было получено в [10].

Теорема 3. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$ и h — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < h \le \pi/n$. Тогда справедливы равенства*

$$\mathbb{K}_{m,n,r,p}(h) = \left\{ \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}. \tag{26}$$

Доказательство. В самом деле, из равенства (17) следует, что

$$\widetilde{\Omega}_m^2(f^{(r)}; t) \ge \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^{2m}. \tag{27}$$

Воспользовавшись следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского (см., например, [17, с. 104]):

$$\left(\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \ge \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int\limits_0^h |f_k(t)|^p \, dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}, \quad 0 < p \le 2,$$

и неравенством (27), получаем

$$\left(\int\limits_0^h \widetilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}; t) \, dt \right)^{1/p} \ge \left(\int\limits_0^h \left[\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^{2m} \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p}$$

$$\ge \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left(k^{pr} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp} dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}. \tag{28}$$

Докажем, что функция натурального аргумента

$$\psi(k) = k^{pr} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp} dt$$

строго возрастает в области $Q = \{k : k \ge n\}$, а потому

$$\min\{\psi(k) : k \in Q\} = \psi(n) = n^{pr} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} dt. \tag{29}$$

Действительно, вычислив производную $\psi'(u)$, для $u \ge n$ имеем

$$\psi'(u) = u^{rp-1} \left\{ h \left(1 - \frac{\sin uh}{uh}\right)^{mp} + (rp - 1) \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin ut}{ut}\right)^{mp} dt \right\} > 0,$$

и соотношение (29) доказано.

Таким образом, из (28) с учетом (1) следует, что

$$\left(\int\limits_0^h \widetilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}; t) \, dt \right)^{1/p} \ge n^r E_{n-1}(f) \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} dt \right)^{1/p}$$

$$= n^{r - \frac{1}{p}} E_{n-1}(f) \left(\int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \right)^{1/p}. \tag{30}$$

Из неравенства (30) имеем

$$\frac{n^{r-\frac{1}{p}}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\Omega}_m^p(f^{(r)};t)\,dt\right)^{1/p}} \le \left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p},$$

откуда сразу выводим оценку сверху величины (9):

$$\mathbb{K}_{m,n,r,p}(h) \le \left\{\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}. \tag{31}$$

Оценку снизу величины (9) получим для функции $g_0(x) = \sin nx \in L_2^{(r)}$. Так как

$$E_{n-1}(g_0) = 1, \quad \widetilde{\Omega}_m\big(g_0^{(r)};t\big) = n^r\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^m,$$

то

$$\mathbb{K}_{m,n,r,p}(h) \ge \frac{n^{r-\frac{1}{p}}E_{n-1}(g_0)}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\Omega}_m^p\big(g_0^{(r)},t\big)\,dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}. \tag{32}$$

Утверждение теоремы 3 следует из сопоставления неравенств (31) и (32).

2. Известно, что точное вычисление величин (3) и (5) дает возможность вычислить различные n-поперечники в L_2 (см., например, [1, 2, 11–13]). Покажем, что аналогичная ситуация имеет место для величин (8) и (9).

Пусть S — единичный шар в L_2; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n и $\mathscr{L}^\perp : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\},$$
$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\sup\{\|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset L_2\},$$
$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f-g\|_2 : g \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$
$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f-\mathscr{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\} : \mathscr{L}L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$
$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f-\mathscr{L}^\perp f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\} : \mathscr{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\}$$

называют соответственно *бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным n-поперечниками в пространстве L_2*. Поскольку L_2 — гильбертово пространство, справедливы следующие соотношения между вышеперечисленными величинами (см., например, [17, 18]):

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \le d^n(\mathfrak{M}, L_2) \le d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi(\mathfrak{M}, L_2). \tag{33}$$

Пусть $\Phi(t)$, $t \ge 0$, — возрастающая функция такая, что $\lim\{\Phi(t) : t \to 0\} = \Phi(0) = 0$. Для любых $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и произвольного $h \in \mathbb{R}_+$ полагаем

$$W_m^{(r)}(h) = \left\{f \in L_2^{(r)} : \int\limits_0^h t\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)};t)\,dt \le 1\right\},$$

$$W_m^{(r)}(\Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \int\limits_0^h t\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)}; t)\,dt \le \Phi(h) \right\},$$

и пусть для $m, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$ и $h \in \mathbb{R}_+$

$$W_{m,p}^{(r)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \int\limits_0^h \widetilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}; t)\,dt \le 1 \right\}.$$

Следуя работам [12, 19], обозначим через t_* величину аргумента $t \in \mathbb{R}_+$ функции $\sin t/t$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $t = \operatorname{tg} t$ $(4,49 < t_* < 4,51)$. При этом

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* := \left\{ 1 - \frac{\sin t}{t}, \text{ если } 0 < t \le t_*;\ 1 - \frac{\sin t_*}{t_*}, \text{ если } t \ge t_* \right\}. \tag{34}$$

Теорема 4. *Если мажоранта $\Phi(t)$ при любых $t \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)} \ge \frac{1}{\pi^2 - 4} \int\limits_0^{nt} \tau \left(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\right)_* d\tau, \tag{35}$$

то для произвольных $m, r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2m$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} p_{2n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\big) &= p_{2n}\big(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\big) \\ &= E_{n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big) = \frac{1}{n^r}\left\{ \frac{2n^2}{\pi^2 - 4} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^m, \end{aligned} \tag{36}$$

где $p_k(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$ или $\Pi_k(\cdot)$.

Множество функций $\Phi(t)$, удовлетворяющих условию (35), непусто.

Доказательство. Полагая в неравенстве (19) $h = \pi/n$, для произвольной функции $f \in W_m^{(r)}(\Phi)$ будем иметь

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{n^r}\left\{ \frac{2n^2}{\pi^2 - 4} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^m. \tag{37}$$

Из неравенства (37) с учетом (33) для вышеперечисленных n-поперечников получим оценку сверху

$$\begin{aligned} p_{2n}\big(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\big) &\le p_{2n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\big) \\ &\le d_{2n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\big) \le E_{n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big) \le \frac{1}{n^r}\left\{ \frac{2n^2}{\pi^2 - 4} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^m. \end{aligned} \tag{38}$$

Для получения соответствующей оценки снизу бернштейновского n-поперечника рассмотрим в $\mathscr{T}_n \cap L_2$ шар

$$\mathscr{S}_{2n+1} \overset{\text{def}}{=} \left\{ T_n \in \mathscr{T}_n : \|T_n\| \le \frac{1}{n^r}\left(\frac{2n^2}{\pi^2 - 4} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)^m \right\}$$

и покажем, что $\mathscr{S}_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(\Phi)$. Для этого убедимся, что для произвольного $T_n \in \mathscr{S}_{2n+1}$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t \tau \widetilde{\Omega}_m^{1/m}\big(T_n^{(r)}, \tau\big)\,d\tau \le \Phi(t).$$

Чтобы удостовериться в этом, заметим, что для произвольного $T_n \in \mathscr{T}_n$ выполняется неравенство [19]

$$\widetilde{\Omega}_m^{1/m}\big(T_n^{(r)}, \tau\big) \le n^{r/m}\bigg(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\bigg)_* \|T_n\|^{1/m}. \tag{39}$$

Используя (39) и условие (35), для произвольного $T_n \in \mathscr{S}_{2n+1}$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ запишем

$$\int\limits_0^t \tau\widetilde{\Omega}_m^{1/m}\big(T_n^{(r)}, \tau\big)\,d\tau \le n^{r/m}\|T_n\|^{1/m}\int\limits_0^t \tau\bigg(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\bigg)_* d\tau$$

$$= n^{r/m-2}\|T_n\|^{1/m}\int\limits_0^{nt} \tau\bigg(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\bigg)_* d\tau \le \frac{\Phi(\pi/n)}{\pi^2 - 4}\int\limits_0^{nt} \tau\bigg(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\bigg)_* d\tau \le \Phi(t).$$

Следовательно, $\mathscr{S}_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(\Phi)$. В силу неравенств (33) и определения бернштейновского n-поперечника имеем

$$p_{2n}\big(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\big) \ge b_{2n}\big(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\big) \ge b_{2n}(\mathscr{S}_{2n+1}; L_2) \ge \frac{1}{n^r}\bigg\{\frac{2n^2}{\pi^2 - 4}\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\bigg\}^m. \tag{40}$$

Сопоставляя неравенства (38) и (40), приходим к равенству (36).

Покажем, что функция $\Phi_*(t) = t^\alpha$, где

$$\alpha = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}, \quad 3{,}38 < \alpha < 3{,}40, \tag{41}$$

удовлетворяет ограничению (35). Подставляя Φ_* в (35), получим неравенство

$$\Big(\frac{nt}{\pi}\Big)^\alpha \ge \frac{1}{\pi^2 - 4}\int\limits_0^{nt} \tau\bigg(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\bigg)_* d\tau, \tag{42}$$

которое требуется доказать. С этой целью, полагая $nt = \mu\pi$, $0 \le \mu < +\infty$, запишем неравенство (42) в виде

$$\mu^\alpha \ge \frac{1}{\pi^2 - 4}\int\limits_0^{\mu\pi} \tau\bigg(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\bigg)_* d\tau. \tag{43}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) = \mu^\alpha - \frac{1}{\pi^2 - 4}\int\limits_0^{\mu\pi} \tau\bigg(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\bigg)_* d\tau, \quad 0 \le \mu < +\infty. \tag{44}$$

Покажем, что $\varphi(\mu) \ge 0$ при любых $\mu \in [0, +\infty)$.

Рассуждения проведем для трех случаев:

(a) $0 \le \mu \le 1$,

(b) $1 \le \mu \le t_*/\pi$,

(c) $t_*/\pi \le \mu < +\infty$.

Пусть $0 \le \mu \le 1$. Учитывая соотношение (34) и вычисляя интеграл в правой части (44), функцию φ представим в виде

$$\varphi(\mu) = \mu^\alpha - \frac{\pi^2}{2(\pi^2 - 4)}\bigg[\mu^2 - \Big(\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\mu\Big)^2\bigg]. \tag{45}$$

Дифференцируя функцию (45), получаем

$$\varphi'(\mu) = \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\left[\mu(2\mu^{\alpha-2}-1) + \frac{1}{2}\sin\mu\pi\right] \geq 0$$

при всех значениях $\mu \in [0,1]$.

Пусть теперь $1 \leq \mu \leq t_*/\pi$. Непосредственным вычислением убедимся, что и в этом случае $\varphi'(\mu) > 0$. Этим неравенство (43) для случаев (a) и (b) доказано. Рассмотрим случай $t_*/\pi \leq \mu < +\infty$. Используя (34), имеем

$$\varphi(\mu) = \mu^\alpha - \frac{1}{2(\pi^2-4)}\left[t_*^2 - \left(2\sin\frac{t_*}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*}\right)\big((\mu\pi)^2 - t_*^2\big)\right],$$

откуда после дифференцирования при всех $\mu \in [t_*/\pi, +\infty)$ получаем

$$\varphi'(\mu) = \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\mu\left(2\mu^{\alpha-2} - 1 + \frac{\sin t_*}{t_*}\right) > 0,$$

чем и завершаем доказательство теоремы 4.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 4 *справедливы равенства*

$$\sup\bigl\{|a_n(f)|, |b_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(\Phi)\bigr\} = \frac{1}{n^r}\left\{\frac{2n^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^m, \quad r \geq 2m,$$

где $a_n(f)$ *и* $b_n(f)$ *суть косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции* $f(x)$ *соответственно.*

Доказательство. В самом деле, в силу ортогональности частичной суммы $S_{n-1}(f;x)$ и функции $\cos nx$ коэффициент Фурье $a_n(f)$ запишем в виде

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x) - S_{n-1}(f;x)]\cos nx\,dx. \tag{46}$$

Применяя к интегралу в правой части (46) неравенство Гёльдера, с учетом (1) и (37) получим оценку сверху

$$\begin{aligned}\sup\bigl\{|a_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(\Phi)\bigr\} &\leq \sup\bigl\{E_n(f) : f \in W_m^{(r)}(\Phi)\bigr\} \\ &= E_n\bigl(W_m^{(r)}(\Phi)\bigr) \leq \frac{1}{n^r}\left\{\frac{2n^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^m. \end{aligned}\tag{47}$$

С целью получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{n^r}\left\{\frac{2n^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^m \cos nx.$$

Легко заметить, что $f_1(x) \in W_m^{(r)}(\Phi)$, а потому

$$\sup\bigl\{|a_n(f)| : f(x) \in W_m^{(r)}(\Phi)\bigr\} \geq |a_n(f_1)| = \frac{1}{n^r}\left\{\frac{2n^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^m. \tag{48}$$

Сравнивая неравенства (47) и (48), получаем

$$\sup\bigl\{|a_n(f)| : f(x) \in W_m^{(r)}(\Phi)\bigr\} = \frac{1}{n^r}\left\{\frac{2n^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^m.$$

Следствие 2 доказано.

Теорема 5. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $h > 0$ *и выполнено условие* $nh \le t_*$. *Тогда имеют место равенства*

$$p_{2n-1}\big(W_m^{(r)}(h); L_2\big) = p_{2n}\big(W_m^{(r)}(h); L_2\big) = E_{n-1}\big(W_m^{(r)}(h)\big)$$
$$= n^{-r}\bigg\{\frac{2n^2}{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}\bigg\}^m = 2^m n^{-r} h^{-2m}\bigg\{1 - \bigg(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\bigg)^2\bigg\}^{-m}, \quad (49)$$

где $p_k(\cdot)$ *— любой из рассмотренных выше* k*-поперечников.*

Доказательство. Используя определение класса $W_m^{(r)}(h)$, а также неравенства (19) и (33), будем иметь

$$p_{2n}\big(W_m^{(r)}(h); L_2\big) \le p_{2n-1}\big(W_m^{(r)}(h); L_2\big) \le d_{2n-1}\big(W_m^{(r)}(h); L_2\big)$$
$$\le E_{n-1}\big(W_m^{(r)}(h)\big) \le n^{-r}\bigg\{\frac{2n^2}{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}\bigg\}^m. \quad (50)$$

Для нахождения оценок снизу n-поперечников класса $W_m^{(r)}(h)$ рассмотрим в $\mathscr{T}_n \cap L_2$ шар

$$\sigma_{2n+1} \overset{\text{def}}{=} \bigg\{T_n(x) \in \mathscr{T}_n : \|T_n\| \le n^{-r}\bigg(\frac{2n^2}{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}\bigg)^m\bigg\}.$$

Для произвольного полинома $T_n(x) \in \sigma_{2n+1}$ при условии $nh \le t_*$ из (34) будем иметь

$$\int_0^h t\widetilde{\Omega}_m^{1/m}\big(T_n^{(r)}, t\big)\,dt \le n^{r/m}\|T_n\|^{1/m}\int_0^h t\bigg(1 - \frac{\sin nt}{nt}\bigg)\,dt$$
$$\le n^{r/m}n^{-r/m}\bigg\{\frac{2n^2}{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}\bigg\}\bigg\{\frac{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}{2n^2}\bigg\} = 1. \quad (51)$$

Учитывая определение класса $W_m^{(r)}(h)$ и неравенство (51), приходим к включению $\sigma_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(h)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника, получаем оценку снизу

$$p_{2n}\big(W_m^{(r)}(h); L_2\big) \ge p_{2n-1}\big(W_m^{(r)}(h); L_2\big)$$
$$\ge b_{2n-1}(\sigma_{2n+1}; L_2) \ge n^{-r}\bigg\{\frac{2n^2}{(nh)^2 - 2(1-\cos nh)}\bigg\}^m. \quad (52)$$

Теперь требуемое равенство (49) следует из сопоставления между собой неравенств (50) и (52). Теорема 5 доказана.

Следствие 3. *Если выполнены условия теоремы* 5, *то*

$$\sup\big\{|a_n(f)|, |b_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(h)\big\} = 2^m n^{-r} h^{-2m}\bigg\{1 - \bigg(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\bigg)^2\bigg\}^{-m},$$

где натуральное число n *удовлетворяет неравенству* $nh \le t_*$.

Теорема 6. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$, $nh \leq t_*$. *Тогда справедливы равенства*

$$p_{2n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(h); L_2\big) = p_{2n}\big(W_{m,p}^{(r)}(h); L_2\big) = E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(h)\big)$$
$$= n^{-r+\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}. \quad (53)$$

Доказательство. Для любой функции $f \in L_2^{(r)}$ из неравенства (30) вытекает, что

$$E_{n-1}(f) \leq n^{-r+\frac{1}{p}} \left(\int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \left(\int_0^h \widetilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}; t)\, dt \right)^{1/p}. \quad (54)$$

Из (54), используя определение класса $W_{m,p}^{(r)}(h)$ и соотношения (33), сразу получаем оценку сверху

$$p_{2n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(h); L_2\big) \leq p_{2n}\big(W_{m,p}^{(r)}(h); L_2\big)$$
$$\leq E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(h)\big) \leq n^{-r+\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}. \quad (55)$$

С целью получения оценки снизу вышеперечисленных n-поперечников, как и в предыдущих теоремах, рассмотрим шар

$$\mathbb{B}_{2n+1} = \left\{ T_n(x) \in \mathscr{T}_n : \|T_n\| \leq n^{-r+\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \right\}^{-1/p} \right\}$$

и покажем, что имеет место включение $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W_{m,p}^{(r)}(h)$.

В [19] доказано, что для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ справедливо неравенство

$$\widetilde{\Omega}_m\big(T_n^{(r)}, t\big) \leq n^r \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)_*^m \|T_n\|. \quad (56)$$

Ввиду неравенства (56) и соотношения (34) при $nh \leq t_*$ и $1/r < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$, для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ запишем

$$\int_0^h \widetilde{\Omega}_m^p\big(T_n^{(r)}, t\big)\, dt \leq n^{rp} \|T_n\|^p \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{mp} dt$$
$$= n^{rp-1} \|T_n\|^p \int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt = 1.$$

Следовательно, $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W_{m,p}^{(r)}(h)$. Поэтому с учетом (33) и определения бернштейновского n-поперечника приходим к неравенствам

$$p_{2n}\big(W_{m,p}^{(r)}(h); L_2\big) \geq b_{2n}\big(W_{m,p}^{(r)}(h); L_2\big)$$
$$\geq b_{2n}\big(\mathbb{B}_{2n+1}; L_2\big) \geq n^{-r+\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}. \quad (57)$$

Сопоставляя неравенства (55) и (57), получаем равенство (53), чем и завершаем доказательство теоремы 6.

Следствие 4. *В условиях теоремы* 6 *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$p_{2n-1}\big(W^{(r)}_{m,1/m}(h); L_2\big) = p_{2n}\big(W^{(r)}_{m,1/m}(h); L_2\big) = E_{n-1}\big(W^{(r)}_{m,1/m}(h)\big) = n^{-r}h^{-m}\left(1 - \frac{\mathrm{Si}(nh)}{nh}\right)^{-m}, \tag{58}$$

где $\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x t^{-1}\sin t\,dt$ *— интегральный синус.*

Отметим, что равенства (58) недавно получены в [19].

Следствие 5. *Если выполнены условия теоремы* 6, *то*

$$\sup\big\{|a_n(f)|, |b_n(f)| : f \in W^{(r)}_m(h)\big\} = n^{-r+\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_0^{nh}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt\right\}^{-1/p}.$$

Авторы благодарят рецензента за ценные советы и замечания, использованные в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513–522.
2. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 433–438.
3. *Юдин В. А.* Диофантовы приближения в экстремальных задачах // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 1. С. 54–57.
4. *Бабенко А. Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 651–664.
5. *Лигун А. А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1988. Т. 43, № 6. С. 757–769.
6. *Иванов В. И., Смирнов О. И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. Тула: ТулГУ, 1995.
7. *Бабенко А. Г., Черных Н. И., Шевалдин В. Т.* Неравенства Джексона — Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 928–932.
8. *Вакарчук С. Б.* $\mathscr{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 4. С. 494–499.
9. *Есмаганбетов М. Г.* Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 816–820.
10. *Абилов В. А., Абилова Ф. В.* Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 803–811.
11. *Вакарчук С. Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 792–796.
12. *Vakarchuk S. B., Zabutna V. I.* Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East J. Approx. 2008. V. 14, N 4. P. 411–421.
13. *Шабозов М. Ш.* Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 616–623.
14. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 // Докл. РАН. 2010. Т. 435, № 2. С. 178–181.
15. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 81–102.
16. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. 1975. Т. 98, № 3. С. 395–415.

17. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verl., 1985.
18. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
19. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Точное неравенство типа Джексона — Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 3. С. 328–336.

Статья поступила 11 января 2011 г., окончательный вариант — 10 мая 2011 г.

Шабозов Мирганд Шабозович
Институт математики АН Республики Таджикистан,
ул. Айни, 299/1, Душанбе 734063, Таджикистан
shabozov@mail.ru

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич
Таджикский национальный университет,
пр. Рудаки, 17, Душанбе 734025, Таджикистан
G_7777@mail.ru