Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 512.541

О ПРОЕКТИВНОМ КОММУТАНТЕ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

А. Р. Чехлов

Аннотация. Даны описания проективного коммутанта и проективного центра нередуцированных групп, а также сепарабельных, векторных, алгебраически компактных и некоторых других абелевых групп.

Ключевые слова: нормальное кольцо эндоморфизмов, коммутатор эндоморфизмов, вполне инвариантный подмодуль, проективно необразующий элемент, проективно полупервичный подмодуль.

Все модули в статье предполагаются унитарными, кольца — ассоциативными, группы — абелевыми (т. е. модулями над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$). Напомним, что если R — кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b. Если $a_1, \dots, a_n \in R$, то $[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$; $Z(R)$ — центр кольца R; $\operatorname{Id} R = \{\pi \in R \mid \pi^2 = \pi\}$.

Через M будем обозначать некоторый модуль; $E(M)$ — кольцо его эндоморфизмов; $Pr(M) = \operatorname{Id}(E(M))$; $\langle H \rangle$ — подмодуль, порожденный подмножеством $H \subseteq M$. Запись $H \leq M$ означает, что H — подмодуль в M; $H \leq fi\, M$ означает, что H — вполне инвариантный подмодуль в M, т. е. $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(M)$. Если $f\colon A \to B$ — гомоморфизм, то $f|H$ — ограничение f на $H \subseteq A$. Если B, G — модули и $\varnothing \neq X \subseteq B$, то через $\operatorname{Hom}(B, G)X$ обозначим подмодуль в G, порожденный всеми подмножествами fX, где $f \in \operatorname{Hom}(B, G)$. Через 1_M обозначим тождественный автоморфизм модуля M. Если $H \leq M$ и $\pi H \subseteq H$ для всех $\pi \in Pr(M)$, то подмодуль H называется *проективно инвариантным* (кратко *pi-подмодулем*) и обозначается через $H \leq pi\, M$. В [1–3] автор изучал проективно инвариантные подгруппы. Если $[\xi, \eta]H \subseteq H$ для любых $\xi, \eta \in E(M)$, то подмодуль H называется *ci-подмодулем*; *ci*-подгруппы изучались в [4–8]. Напомним, что кольцо называется *нормальным* [9], если все его идемпотенты центральны.

Пусть A — абелева группа. Тогда $r(A)$ обозначает ее ранг; $o(a)$ — порядок ее элемента a; $A^1 = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} nA$; если не оговорено противное, то A_p — ее p-компонента, а $t(A)$ — периодическая часть; $\Pi(t(A)) = \{p \in P \mid A_p \neq 0\}$; если A — периодическая группа, то будем писать просто $\Pi(A)$. Если A — группа без кручения, то $t_A(a)$ — тип, а $\chi_A(a)$ — характеристика ее элемента a, индекс A иногда убирается; далее, если t — некоторый тип и χ — характеристика, то $A(t) = \{a \in A \mid t(a) \geq t\}$, $A(\chi) = \{a \in A \mid \chi(a) \geq \chi\}$. Если A — однородная группа без кручения, то $t(A)$ — ее тип. Если $0 \neq A$ — ограниченная p-группа, то наименьшее натуральное m со свойством $p^m A = 0$ называется *экспонентой*

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт П 937 от 20 августа 2009 г.).

© 2012 Чехлов А. Р.

группы A и обозначается через $e(A)$. Если A — p-группа, $a \in A$ и $o(a) = p^k$, то $e(a) = k$.

Подгруппа H группы A называется *чистой*, если $nH = H \cap nA$ для каждого натурального n, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, P — множество всех простых чисел, $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел, Z_{p^∞} — квазициклическая p-группа, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — группа целых p-адических чисел и Z_n — циклическая группа порядка n.

Подмодуль $H \leq M$ назовем *коммутаторно-проективно инвариантным* (кратко *cpi-подмодулем*), если $[\xi, \eta]H \subseteq H$ для любых $\xi, \eta \in Pr(M)$. Ясно, что если $H \leq pi\, M$, то $H \leq cpi\, M$.

Проективным центром (кратко *P-центром*) модуля M назовем следующий его подмодуль: $PZ(M) = \{a \in M \mid [\xi, \eta]a = 0$ для всех $\xi, \eta \in Pr(M)\}$. Если $G \leq fi\, M$, то $PZ(G) \subseteq PZ(M)$; в частности, если кольцо $E(G)$ нормально, то $G \subseteq PZ(M)$. Если M — модуль такой, что все его ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами, и $E(M)$ — кольцо, не являющееся нормальным, то $PZ(M) = 0$.

Подмодуль $P(M) = \langle [\varphi, \psi]M \mid \varphi, \psi \in Pr(M)\rangle$ назовем *проективным коммутантом* (кратко, *P-коммутантом*) модуля M. Ясно, что если $P(M) \subseteq H \leq M$, то $H \leq cpi\, M$. Определим по индукции $P_0(M) = M$, $P_1(M) = P(M), \ldots, P_{n+1}(M) = \langle [\varphi, \psi]P_n(M) \mid \varphi, \psi \in Pr(M)\rangle$ и $P_\alpha(M) = \bigcap\limits_{\sigma<\alpha} P_\sigma(M)$ при предельном ординале α.

Модуль M назовем *P-разрешимым*, если $P_n(M) = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Наименьшее такое n назовем *классом* (или *ступенью*) P-разрешимости модуля M. Прямые слагаемые P-разрешимых модулей P-разрешимы.

Если $H \leq cpi\, M$, то положим $PZ(M/H) = \{\bar{a} \in M/H \mid [\pi, \theta]\bar{a} = 0$ для всех $\pi, \theta \in Pr(M)\}$. Полагаем

$$PZ_0(M) = 0, \quad PZ_1(M) = PZ(M), \ldots, PZ_{n+1}(M)/PZ_n(M) = PZ(M/PZ_n(M))$$

и $PZ_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\rho<\alpha} PZ_\rho(M)$ при предельном ординале α.

Если все проекции подмодуля G продолжаются до проекций самого модуля M, то считаем, что $P_n(G) \subseteq P_n(M)$.

Приведем следующие простые свойства.

1. *Если $\pi \in Pr(M)$, то $\pi \in Z(E(M))$ в точности тогда, когда $(1-\pi)M \leq fi\, M$ и $\pi M \leq fi\, M$ (в [9, утверждение 3.15] подобное свойство отмечается для случая, когда $Pr(M) \subseteq Z(E(M))$).*

2. *Пусть $\theta \in Pr(M)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) $G = \theta M \leq fi\, M$;

(б) *$\xi\theta = \theta\xi$ для любого $\xi \in Pr(M)$ со свойством $\ker\theta \subseteq \ker\xi$;*

(в) *$(1-\theta)\xi\theta = 0$ для любого $\xi \in Pr(M)$.*

Если R — кольцо с 1 и $(1-\theta)\xi\theta = 0$ для некоторых $\xi, \theta \in \operatorname{Id} R$, то $\theta\xi\theta \in \operatorname{Id} R$ и $(1-\theta)\xi(1-\theta) \in \operatorname{Id} R$.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) очевидна. Пусть выполнено (б). Если $\varphi \in E(M)$, то $\xi = \theta + (1-\theta)\varphi\theta \in Pr(M)$ и $\ker\theta \subseteq \ker\xi$. Из условия $\xi = \xi\theta = \theta\xi = \theta$ следует равенство $(1-\theta)\varphi\theta = 0$, что в силу произвольности φ влечет (а) и (в).

Пусть выполнено (в) и $M = B \oplus G$, где $B = \pi M$, $\pi = 1-\theta$. Если $f \in \operatorname{Hom}(G, B)$, то $\xi = \pi + \pi f\theta \in Pr(M)$ и $\pi\xi\theta = \pi f\theta = 0$. Это влечет равенство $\operatorname{Hom}(G, B) = 0$. Следовательно, (в) $\Rightarrow$ (а).

Из доказательства следует, что в (б) и (в) условие $\xi \in Pr(M)$ можно заменить условием $\xi \in E(M)$.

Докажем последнее утверждение. Из $(1-\theta)\xi\theta = 0$ следует, что $\xi\theta = \theta\xi\theta$. Поэтому если $\xi\theta\xi\theta - \xi\theta \neq 0$, то $\theta\xi\theta - \xi\theta \neq 0$; противоречие. Аналогично если $\pi\xi\pi\xi\pi - \pi\xi\pi \neq 0$, где $\pi = 1-\pi$, то $\pi\xi - \pi\xi\pi = \pi\xi(1-\pi) \neq 0$.

3. *Пусть R — кольцо с 1. Следующие условия эквивалентны:*
(а) $\operatorname{Id} R$ *состоит из перестановочных между собой элементов;*
(б) множество $\operatorname{Id} R$ *мультипликативно замкнуто;*
(в) $\operatorname{Id} R \subseteq Z(R)$, *т. е. кольцо R нормально.*

Импликации (а) $\Rightarrow$ (б), (в) $\Rightarrow$ (а) очевидны. Докажем, что (б) $\Rightarrow$ (в). Пусть $\pi \in \operatorname{Id} R$ и $\pi x - x\pi \neq 0$ для некоторого $x \in R$. Если $\pi(\pi x - x\pi) \neq 0$, то $\pi x(1-\pi) \neq 0$ и $\pi x(1-\pi) = (\pi + \pi x(1-\pi))(1-\pi)$, где $\pi + \pi x(1-\pi), 1-\pi \in \operatorname{Id} R$. По условию $\pi x(1-\pi) \in \operatorname{Id} R$. Однако $(\pi x(1-\pi))^2 = 0 \neq \pi x(1-\pi)$. Если же $\pi(\pi x - x\pi) = 0$, то $-(1-\pi)x\pi = (1-\pi)(\pi x - x\pi) \neq 0$. Аналогичным образом приходим к противоречию.

Из свойства 3 следует, что кольцо $E(M)$ нормально в точности тогда, когда $P(M) = 0$, а из доказательства импликации (б) $\Rightarrow$ (в) вытекает справедливость следующего свойства.

4. *Если $H \leq cpi\, M$, то $\pi\varphi(1-\pi)H \subseteq H$, в частности, $\pi[\pi,\varphi]H \subseteq H$ для любых $\pi \in Pr(M)$ и $\varphi \in E(M)$.*

Из свойства 4 непосредственно следует, что всякое *cpi*-прямое слагаемое вполне инвариантно.

5. *$PZ(M), P(M) \leq pi\, M$.*

Действительно, пусть $a \in PZ(M)$, $\pi, \xi, \eta \in Pr(M)$, $x \in M$. Согласно свойству 4 $\pi[\xi,\eta](1-\pi)a = 0$ и $(1-\pi)[\xi,\eta]\pi a = 0$. Так как $[\xi,\eta]a = 0$, то $\pi[\xi,\eta]\pi a = 0$. Откуда $[\xi,\eta]\pi a = 0$, т. е. $\pi PZ(M) \subseteq PZ(M)$. Имеем $\pi[\xi,\eta](1-\pi)x \in P(M)$ и $(1-\pi)[\xi,\eta]\pi x \in P(M)$. Поскольку $[\xi,\eta]\pi x \in P(M)$, то $\pi[\xi,\eta]\pi x \in P(M)$. Отсюда $\pi[\xi,\eta]x \in P(M)$, т. е. $\pi P(M) \subseteq P(M)$.

6. *В группе без кручения A любая ее cpi-подгруппа ранга 1 лежит в P-центре.*

Доказательство. Пусть $B \leq cpi\, A$, $r(B) = 1$ и G — чистая подгруппа в A, порожденная B. Если G проективно инвариантна в A, то утверждение очевидно. Допустим, что $x = \pi a \notin G$ для некоторых $\pi \in Pr(M)$ и $a \in B$. Если теперь $\theta \in Pr(M)$, то $[1-\pi,\theta]a \in G$. Значит, $n[1-\pi,\theta]a = ma$ для некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$. Допустим, что $m \neq 0$. Тогда $mx = m\pi a = n\pi[1-\pi,\theta]a = n(\pi\theta(1-\pi))a \in G$; противоречие. Если же $[1-\pi,\theta]a = -[\pi,\theta]a = 0$, то $[\pi,\theta]G = 0$, т. е. $B \subseteq G \subseteq P(A)$.

Лемма 1. *Пусть $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, $\pi_i \colon M \to M_i$ — соответствующие проекции и $H \leq M$. Тогда*

1) *$H \leq cpi\, M$ в том и только в том случае, когда $\operatorname{Hom}(M_i, M_j)\pi_i H \subseteq H \cap M_j$ и $[\pi_i\xi, \pi_i\eta]\pi_i H \subseteq H$ для любых $\xi, \eta \in Pr(M)$, где $i, j \in I$ и $j \neq i$;*

2) *если $M_i \leq fi\, M$ и $B_i \leq M_i$, то $B = \bigoplus_{i\in I} B_i \leq cpi\, M$ в том и только в том случае, когда $B_i \leq cpi\, M_i$ для всех $i \in I$;*

3) *cpi-подмодуль H модуля M является его fi-подмодулем в том и только в том случае, когда $\pi_i H = H \cap M_i$ и $H \cap M_i \leq fi\, M_i$ для каждого $i \in I$.*

Доказательство. 1. Включение $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)\pi_i H \subseteq H \cap M_j$ следует из свойства 4. Пусть теперь $x \in H$, $\xi, \eta \in Pr(M)$. Имеем

$$[\xi, \eta]x = \Big[\Big(\sum_{i\in I}\pi_i\Big)\xi\Big(\sum_{j\in I}\pi_j\Big), \Big(\sum_{k\in I}\pi_k\Big)\eta\Big(\sum_{s\in I}\pi_s\Big)\Big]x$$
$$= \sum_{i\in I}[\pi_i\xi, \pi_i\eta]\pi_i x + \sum_{i,j,k,s\in I}[\pi_i\xi\pi_j, \pi_k\eta\pi_s]x, \quad (1)$$

где в последней сумме i, j, k, s не принимают одно и то же значение одновременно. Второе слагаемое в (1) содержится в $\sum\limits_{i,j\in I(i\neq j)} \mathrm{Hom}(M_i, M_j)\pi_i H$, что доказывает необходимость. Достаточность вытекает из (1). Утверждения 2 и 3 вытекают из п. 1.

В модуле, являющемся прямой суммой вполне инвариантных подмодулей с нормальными кольцами эндоморфизмов, всякий подмодуль будет *cpi*-подмодулем. Если модуль является прямой суммой подмодулей с коммутативными кольцами эндоморфизмов, то из леммы 1 и леммы 1 в [8] следует, что *cpi*-подмодули являются *ci*-подмодулями.

Пусть $A = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$ и $H = \langle a + pb\rangle$, где $o(a) = p$, $o(b) = p^3$. Для подгруппы H выполнены условия п. 1 леммы 1, поэтому $H \leq cpi\, A$. Однако $H \not\leq fi\, A$.

Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 2. *Пусть $H \leq cpi\, M$. Тогда*

1) *если B — прямое слагаемое модуля M и π — проекция M на B, то $H \cap B$, $\pi H \leq cpi\, B$;*

2) *если $M = \bigoplus M_i$, $\pi_i\colon M \to M_i$ — соответствующие проекции и $H_0 = \bigoplus(H \cap M_i)$, $H^0 = \bigoplus(\pi_i H)$, то $H_0, H^0 \leq cpi\, M$, $H_0 \leq H \leq H^0$ и $H_0 = H^0$ если и только если $H = \bigoplus(H \cap M_i)$.*

Несложно проверяется, что если $H \leq fi\, G$ и $G \leq cpi\, A$, то $H \leq cpi\, A$; если $H \leq cpi\, G$ и $G \leq fi\, A$, то $H \leq cpi\, A$. Как показывает пример 2 из [8], может случиться так, что $H \leq cpi\, G$, $G \leq cpi\, A$, но $H \not\leq cpi\, A$.

Лемма 3. 1. *Пусть каждый элемент модуля M содержится в таком его прямом слагаемом $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, что для каждого M_i найдется M_j $(j \neq i)$ со свойством $M_i \cong M_j$. Тогда все cpi-подмодули модуля M вполне инвариантны.*

2. *Пусть $M = B \oplus G$, $\pi\colon M \to B$ — проекция, $\theta = 1 - \pi$ и $G \leq fi\, M$. Подмодуль $H \leq M$ является cpi-подмодулем тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}(B, G)\pi H \subseteq H \cap G$, а πH и θH — подмодули модулей B и G соответственно такие, что $[\xi, \eta]\pi H \subseteq H \cap B$, $[\alpha, \beta]\theta H \subseteq H \cap G$ для любых $\xi, \eta \in Pr(B)$, $\alpha, \beta \in Pr(G)$.*

Доказательство. 1. Если $H \leq cpi\, M$, то в данном случае $H = \bigoplus(H \cap M_i)$. Действительно, если π — проекция M на M_i и $\pi h = a \neq 0$ для некоторого $h \in H$, то при условии, что $\varphi\colon M_i \to M_j$ и $\psi\colon M_j \to M_i$ — взаимно обратные изоморфизмы, ввиду леммы 1 имеем $b = \varphi a \in H \cap M_j$ и $a = \psi b \in H \cap M_i$. Аналогично показывается, что $fa \in H \cap M_i$ для любого $f \in E(M_i)$. Этого в силу п. 3 леммы 1 достаточно для вполне инвариантности H.

2. Вытекает из леммы 1 и свойства 2.

Напомним, что *n-м инвариантом Ульма — Капланского* группы A [10] называется кардинальное число $f_A(n) = r(p^n A[p]/p^{n+1}A[p])$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Будем говорить, что p-группа A *удовлетворяет условию* $(*)$, если найдутся такие $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $r \in \mathbb{N}$, что $f_A(k) = 1$, $f_A(k+1) = \cdots = f_A(k+r) = 0$ и $f_A(k+r+1) = 1$.

В такой группе A существуют *cpi*-подгруппы, не являющиеся вполне инвариантными. Действительно, пусть $a \in p^k A[p]$, $b \in p^{k+r+1}A[p]$ и $b = pc$. Тогда $c \in p^{k+r}A[p^2]$. Из леммы 1 следует, что $H = \langle a + c, p^{k+r+1}A[p^2]\rangle \le cpi\, A$. Однако $a \notin H$, поэтому $H \not\le pi\, A$.

Следствие 1. *Пусть A — сепарабельная p-группа, не удовлетворяющая условию $(*)$. Тогда все cpi-подгруппы группы A являются вполне инвариантными.*

Доказательство. Пусть $f_A(n) = \mathfrak{m}_n$. Тогда для $n \ge 1$ имеем $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n \oplus G_n$, где $A_n \cong \bigoplus\limits_{\mathfrak{m}_{n-1}} Z_{p^n}$, а $G_n = A_{n+1} \oplus G_{n+1}$ [10, доказательство предложения 20.13]. В силу сепарабельности каждый элемент группы A содержится в прямом слагаемом $A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если группа A не удовлетворяет условию $(*)$ и $H \le cpi\, A$, то из лемм 1, 3 следует, что $\pi H \subseteq H$ для проекции π на каждое циклическое прямое слагаемое. В силу п. 3 леммы 1 подгруппа H вполне инвариантна.

Предложение 1. *В группе A каждая ее подгруппа является cpi-подгруппой тогда и только тогда, когда $E(A)$ — нормальное кольцо.*

Доказательство. Необходимость. Так как прямые слагаемые группы A вполне инвариантны, все ее p-компоненты A_p коциклические. Значит, для каждого $m \in \mathbb{N}$ имеет место разложение $A = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m} \oplus B_m$, где $B_m[p_j] = 0$ при $j = 1, \dots, m$. Отсюда следует, что периодичность A влечет коммутативность кольца $E(A)$. Если a — элемент конечного порядка, то $a \in A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m}$ для некоторого m, а поскольку кольцо $E(A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m})$ коммутативно, $[\alpha, \beta]a = 0$ для любых $\alpha, \beta \in E(A)$. Пусть теперь a — элемент бесконечного порядка. Имеем $[\varphi, \psi]a \in \langle a\rangle$ для любых $\varphi, \psi \in Pr(A)$. Поэтому $[\varphi, \psi]a = na$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\varphi[\varphi, \psi]a \in \langle a\rangle$ по свойству 4, имеем $\varphi na = sa$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$. Аналогично $n\psi a = ka$, где $k \in \mathbb{Z}$. Можно считать, что $a \in B_m$, где m такое натуральное, что B_m не содержит элементов, порядки которых делятся на простые делители числа n. Поэтому равенство $n^2[\varphi, \psi]a = 0$ влечет $[\varphi, \psi]a = 0$, что ввиду свойства 3 доказывает нормальность $E(A)$.

Достаточность очевидна.

Из леммы 3 вытекает, что в делимой группе $D = t(D) \oplus D_0$ каждая *cpi*-подгруппа H либо является периодической вполне инвариантной подгруппой в D, либо имеет вид $H = t(D) \oplus H_1$ для некоторой подгруппы $0 \ne H_1 \le D_0$, причем $H_1 = D_0$, если группа D_0 разложима.

Если D — делимая часть p-группы $A = B \oplus D$, $H \le cpi\, A$, $\theta\colon A \to D$ — проекция и $r(D) > 1$, то из леммы 1 в силу инъективности D следует, что $H \cap D = \theta H$. Если же $r(D) = 1$, то возможен случай, когда $H \cap D \ne \theta H$. Например, если $B = \langle b\rangle$ — циклическая группа, $e(b) = k \ge 1$, $d \in D$ и $e(d) = n \ge 2k$, то $H = \langle b + d\rangle \le cpi\, A$. Однако $\theta H = \langle d\rangle \ne H \cap D = \langle p^k d\rangle$. Подобная ситуация рассматривается в следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть $A = B \oplus D$, где B — редуцированная, а D — делимая группы, $\pi\colon A \to B$ — проекция и $H \le A$. Тогда*

1) *если πH — периодическая группа и $D \cong \mathbb{Q}$, то $H \le cpi\, A$ если и только если $[\varphi, \psi]H \subseteq H \cap B$ для любых $\varphi, \psi \in Pr(A)$;*

2) *если $D \cong \bigoplus\limits_{p \in \Pi} Z_{p^\infty}$, где Π — некоторое множество простых чисел, то $H \le cpi\, A$ если и только если $[\varphi, \psi]H \subseteq (H \cap B) \oplus (H \cap D)$ для любых $\varphi, \psi \in Pr(A)$;*

3) *если A — p-группа и H — ее неограниченная cpi-подгруппа, то $D \subseteq H$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Поскольку $D \leq fi\, A$ и $E(D)$ — коммутативное кольцо, то $[\varphi,\psi]H = [\varphi,\psi](\pi H)$. Следовательно, $[\varphi,\psi]H$ — периодическая подгруппа, значит, она содержится в $H \cap B$.

Достаточность очевидна.

2. Необходимость. Пусть $h = b + d \in H$, где $b \in B$, $d \in D$ и $\theta = 1 - \pi$. Тогда $[\varphi,\psi](b+d) = [\varphi,\psi]b = [(\pi+\theta)\varphi,(\pi+\theta)\psi]b = [\pi\varphi,\pi\psi]b + [\pi\varphi,\theta\psi]b + [\theta\varphi,\pi\psi]b + [\theta\varphi,\theta\psi]b$. Согласно лемме 1 первое слагаемое содержится в $H \cap B$, а остальные в $H \cap D$ (учитывая, что $\pi\varphi\theta\psi b = 0$ и $\pi\psi\theta\varphi b = 0$).

Достаточность очевидна.

3. Если πH — неограниченная подгруппа в B, то $\mathrm{Hom}(B,D)\pi H = D$ и $D \subseteq H$ по лемме 1. Если же $p^n(\pi H) = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $p^n H$ — неограниченная подгруппа в D. Поскольку всякая собственная подгруппа в Z_{p^∞} ограниченная, условие $D \cong Z_{p^\infty}$ сразу влечет, что $D \subseteq H$. Если же $r(D) > 1$, то D является прямой суммой групп, изоморфных Z_{p^∞}. Поэтому $D \subseteq H$.

Отметим, что если $0 \neq H$ — непериодическая подгруппа группы A, D — делимая группа, то $\mathrm{Hom}(A,D)H = D$. Если же H — периодическая подгруппа группы A, то $\mathrm{Hom}(A,D)H = \bigoplus D_p[p^{m_p}]$, где $m_p = \sup\{e(h) \mid h \in H_p\}$. Здесь $m_p = 0$, если $H_p = 0$ и, значит, $D_p[p^{m_p}] = 0$.

Теорема 1. *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая часть группы A и $H \leq A$. Тогда $H \leq cpi\, A$ в том и только в том случае, когда H совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *$H = F \oplus (\bigoplus_p D_p[p^{k_p}])$, где F — периодическая cpi-подгруппа группы B и $k_p \geq \sup\{e(b) \mid b \in F_p\}$;*

2) *$H = G \oplus (\bigoplus_{p\in\Pi_1} D_p[p^{k_p}])$, где G — периодическая cpi-подгруппа в группе $B \oplus (\bigoplus_{p\in\Pi} D_p)$ такая, как в п. 2 леммы 4, $k_p \geq \sup\{e(g) \mid g \in G_p\}$ и $\Pi_1 \cap \Pi = \varnothing$;*

3) *$H = C \oplus D$, где $C \leq cpi\, B$;*

4) *$H = E \oplus t(D)$, $r(D_0) = 1$ и E — непериодическая cpi-подгруппа в группе $B \oplus D_0$ такая, как в п. 1 леммы 4.*

Доказательство. Необходимость. Если $\pi\colon A \to B$, $\theta_p\colon A \to D_p$, $\theta_0\colon A \to D_0$ — проекции, то

$$(H \cap B) \oplus \Big(\bigoplus_p (H \cap D_p)\Big) \oplus (H \cap D_0) \leq H \leq \pi H \oplus \Big(\bigoplus_p (\theta_p H)\Big) \oplus (\theta_0 H).$$

Так как $\mathrm{Hom}(B,D)\pi H \subseteq H \cap D$ (лемма 1), непериодичность подгруппы πH влечет равенство $H \cap D = D$, т. е. $D \subseteq H$. Аналогично если $\theta_0 H \neq 0$, то из $\mathrm{Hom}(D_0, t(D))(\theta_0 H) = t(D) = H \cap t(D)$ следует, что $t(D) \subseteq H$. Из условия $\theta_0 H \neq 0$ и $r(D_0) > 1$ вытекает включение $D_0 \subseteq H$. Для доказательства п. 3 осталось заметить, что если $D \subseteq H$, то $H = C \oplus D$, где $C = H \cap B \leq cpi\, B$ по лемме 2. Если же $t(D) \subseteq H$ и $\theta_0 H \neq 0$, но $D_0 \nsubseteq H$, то $r(D_0) = 1$ и $H = E \oplus t(D)$, где $E = H \cap (B \oplus D_0) \leq cpi\, (B \oplus D_0)$, что доказывает п. 4.

Ввиду включения $\mathrm{Hom}(B,D)\pi H \subseteq H \cap D$ условие $\theta_0 H = 0$ влечет периодичность группы πH. Поскольку $\mathrm{Hom}(B, D_p)\pi H \subseteq H \cap D_p$, то $D_p[p^{m_p}] \subseteq H \cap D_p$, где $m_p = \sup\{e(b) \mid b \in (\pi H)_p\}$. Заметим, что если D_p — разложимая группа, то $\theta_p H = D_p[p^{k_p}] = H \cap D_p$ для некоторого $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ ($k_p \geq m_p$). Если $\theta_p H = H \cap D_p$ для каждого простого p, то $H = F \oplus (\bigoplus_p D_p[p^{k_p}])$, где

$F = B \cap H = \pi H \leq cpi\, B$, это доказывает п. 1. В противном случае пусть Π_1 — множество всех простых p с условием $\theta_p H = H \cap D_p$, а $\Pi = \{p \in P \setminus \Pi_1 \mid D_p \neq 0\}$. Тогда $H = G \oplus (\bigoplus\limits_{p\in\Pi_1} D_p[p^{k_p}])$, где $G = H \cap (B \oplus (\bigoplus\limits_{p\in\Pi} D_p)) \leq cpi\,(B \oplus (\bigoplus\limits_{p\in\Pi} D_p))$, это доказывает п. 2.

Достаточность вытекает из п. 2 леммы 3.

Теорема 2. *В разложимой редуцированной сепарабельной группе без кручения A все cpi-подгруппы вполне инвариантны тогда и только тогда, когда для каждого прямого слагаемого B ранга 1 группы A в дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое G, изоморфное B.*

Доказательство. Необходимость. Обозначим через $\Omega(A)$ множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A. Типы $s, t \in \Omega(A)$ будем считать *эквивалентными*, если существуют такие $r_1, \ldots, r_n \in \Omega(A)$, что типы r_i, r_{i+1} сравнимы для всех $i = 0, \ldots, n$, где $r_0 = s$, $r_{n+1} = t$. Если теперь $\Omega(A) = \bigcup\limits_{k\in K} \Omega_k$ — разбиение множества $\Omega(A)$ на классы эквивалентности, то $A = \bigoplus\limits_{k\in K} A_k$, где A_k — сепарабельные группы, $\Omega(A_k) = \Omega_k$, слагаемые A_k вполне инвариантны в A [10, § 19, упражнение 7]. Допустим, что в $\Omega(A)$ все типы несравнимы. Тогда $A = \bigoplus\limits_{t\in\Omega(A)} A_t$, где $r(A_t) = 1$ и типы групп A_t несравнимы. В этом случае кольцо $E(A)$ коммутативно и каждая подгруппа группы A будет cpi-подгруппой, однако A имеет не вполне инвариантные подгруппы. Допустим теперь, что $B \oplus G$ — прямое слагаемое в A, $r(B) = r(G) = 1$ и $t(B) < t(G)$. Поскольку A — редуцированная группа, $pB \neq B$ и $pG \neq G$ для некоторого простого p. Если $b \in B$, $g \in G \setminus pG$ и $A = B \oplus C$ $(G \subseteq C)$, то пусть $H = \langle pb + g\rangle + E$, где $E = \mathrm{Hom}(B, C)\langle pb\rangle$. Тогда $E = C(\chi(pb)) \leq fi\, C$. Если θ — проекция A на C, то так как в C нет прямых слагаемых, изоморфных B, будет $\mathrm{Hom}(C, B)\theta H = 0$. Следовательно, по лемме 1 $H \leq cpi\, A$. Однако $g \notin H$ и, значит, $\theta H \nsubseteq H$, т. е. $H \nleq fi\, A$.

Достаточность. Пусть $h \in H \leq cpi\, A$. Тогда $h = a_1 + \cdots + a_n$, где $a_i \in A_i$, $r(A_i) = 1$ и A_i — прямые слагаемые в A. Поскольку для каждого A_i в дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое $A_j \cong A_i$, то так же, как в лемме 3, следует, что $a_i \in H$ и, кроме того, $f(a_i) \in H$ для каждого $f \in E(A)$, т. е. $f(h) \in H$ и, значит, $H \leq fi\, A$.

Теорема 3. *В редуцированной алгебраически компактной группе без кручения A каждая ее cpi-подгруппа является вполне инвариантной тогда и только тогда, когда все p-адические компоненты группы A разложимы.*

Доказательство. Необходимость. Группа A представима в виде $A = \prod A_p$, где каждая A_p является p-адической алгебраически компактной группой и называется *p-адической компонентой* группы A. Можно считать, что $A_p \leq A$. Пусть $B = \prod\limits_{p\in\Pi_1} A_p$ — прямое произведение всех неразложимых групп A_p. Тогда кольцо $E(B)$ коммутативно, а так как $B \leq fi\, A$, то каждая подгруппа группы B будет cpi-подгруппой в A. Поскольку B содержит не вполне инвариантные подгруппы, это доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть $h \in H \leq cpi\, A$, $f \in E(A)$, $h = (\ldots, a_p, \ldots)$, где $a_p \in A_p$. Запишем A_p в виде $A_p = B_p \oplus G_p$, где $a_p \in B_p$, $G_p \neq 0$. Тогда $A = B \oplus G$, где $B = \prod B_p$. Имеем $f(a) = b + g$, где $b = (\ldots, b_p, \ldots) \in B$, $g = (\ldots, g_p, \ldots) \in G$. По лемме 1 $g \in H \cap G$. Осталось показать, что $b \in H$.

Найдутся $\varphi_p, \psi_p \in E(A_p)$ со свойствами $\varphi_p(b_p) \in H \cap G_p$ и $\psi_p(\varphi_p(b_p)) = b_p$. Если теперь $\varphi = (\dots, \varphi_p, \dots)$, $\psi = (\dots, \psi_p, \dots)$, то $\varphi \in \mathrm{Hom}(B, G)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(G, B)$. Поэтому $\varphi b \in H \cap G$ и $b = \psi(\varphi b) \in H \cap B$.

Так же, как теорема 5 и лемма 6 в [8], доказываются следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть $A = B \oplus C$.*

1. *Наименьшая cpi-подгруппа группы A, содержащая C, является fi-подгруппой и совпадает с*

(а) $\mathrm{Hom}(C, B)C \oplus C$*;*

(б) *суммой всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A.*

2. *Наибольшая cpi-подгруппа группы A, содержащаяся в C, является fi-подгруппой и совпадает с*

(а) $\bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(C,B)} \ker \varphi$*;*

(б) *пересечением всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A.*

Лемма 5. *Пусть A — неограниченная p-группа. Тогда если $0 \neq H \leq cpi\, A$, то $H \cap p^n A \neq 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.*

Из леммы 5 следует, что в неограниченной сепарабельной p-группе нет минимальных cpi-подгрупп. Действительно, если H — минимальная cpi-подгруппа, то $H = H \cap p^n A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $H = H \cap (\bigcap\limits_n p^n A) = 0$. Если p-длина редуцированной p-группы равна $\sigma + 1$ и $p^\sigma A$ — неразложимая группа, то $p^\sigma A$ — минимальная cpi-подгруппа. Если же p-группа нередуцированная и D — ее делимая часть, то $D[p]$ — минимальная cpi-подгруппа.

Если A — ограниченная p-группа, $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где A_i — прямые суммы некоторого числа циклических групп порядка p^{k_i}, $k_1 < \dots < k_m$, то $A_m[p]$ — минимальная cpi-подгруппа. Если $H \leq cpi\, A$, то $nH \leq cpi\, A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что редуцированные группы без кручения, а также группы без кручения с неразложимой делимой частью не имеют минимальных cpi-подгрупп. У нередуцированной группы без кручения с разложимой делимой частью D подгруппа D будет минимальной cpi-подгруппой.

Если A — неограниченная редуцированная p-группа, то у нее нет максимальных cpi-подгрупп (доказательство аналогично соответствующему утверждению для ci-подгрупп [8, свойство 3 после леммы 6]).

Если A — ограниченная p-группа и $e(A) = k \geq 2$, то $A[p^{k-1}]$ — наибольшая cpi-подгруппа. Действительно, если $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где A_i — прямые суммы некоторого числа циклических групп порядка p^{k_i}, $k_1 < \dots < k_m = k$, то $A[p^{k-1}] = (A_1 \oplus \dots \oplus A_{m-1}) \oplus pA_m$. Поэтому из леммы 1 следует, что всякая cpi-подгруппа, строго содержащая $A[p^{k-1}]$, совпадает с A. Пусть теперь $H \leq cpi\, A$ и $h \in H \setminus A[p^{k-1}]$. Тогда $e(h) = k$ и, значит, $\langle h \rangle$ — прямое слагаемое в A, $A = \langle h \rangle \oplus B$. Имеем $\mathrm{Hom}(\langle h \rangle, B)\langle h \rangle = B$. Отсюда ввиду леммы 1 получаем, что $H = A$. Это доказывает, что $A[p^{k-1}]$ — наибольшая cpi-подгруппа в A. В элементарной p-группе каждая cpi-подгруппа совпадает с самой группой. Если же A — нередуцированная p-группа с неограниченной редуцированной частью, то максимальных cpi-подгрупп опять нет, а если редуцированная часть — ограниченная группа, то наибольшая cpi-подгруппа совпадает с суммой делимой части и наибольшей cpi-подгруппой ее ограниченной части. В делимой p-группе максимальных cpi-подгрупп нет.

Если $\varphi, \psi \in Pr(M)$, то их *P-централизатором* назовем подмодуль $C_{\varphi,\psi} = \{a \in M \mid [\varphi,\psi]a = 0\}$. Ясно, что $PZ(M) = \bigcap_{\varphi,\psi\in Pr(M)} C_{\varphi,\psi}$. Если $H \subseteq M$, то $PN(H) = \{a \in M \mid [\varphi,\psi]a \in H, \varphi,\psi \in Pr(M)\}$ назовем *P-нормализатором* подмножества H в M. Если $0 \in H$, то $PZ(M) = PN(0) \subseteq PN(H)$, а если $0 \notin H$, то $PN(H) = \varnothing$. Если H — подмодуль в M, то $PN(H)$ также является подмодулем в M, содержащим $PZ(M)$. Очевидно, что если $H \le M$, то $H \subseteq PN(H)$ в точности тогда, когда $H \le cpi\,M$, и в этом случае $PN(H)$ также является *cpi*-подмодулем в M.

Лемма 6. *Пусть $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, где $|I| > 1$, $G_i = \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} M_j$ и $\pi_i\colon M \to M_i$ — соответствующие проекции.*

1. *Если для всякого $i \in I$ и любого $0 \ne a \in M_i$ существует $\varphi \in \operatorname{Hom}(M_i, G_i)$ со свойством $\varphi a \ne 0$, то $PZ(M) = 0$.*
2. *$PZ(M) = \bigoplus_{i\in I}(PZ(M) \cap M_i)$.*
3. *$\varphi(PZ(M) \cap M_i) = 0$ для любого $\varphi \in \operatorname{Hom}(M_i, G_i)$.*
4. *$PZ(M) \cap M_i \subseteq PZ(M_i)$. Равенство $PZ(M) \cap M_i = PZ(M_i)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(PZ(M_i)) = 0$ и $[\pi_i\alpha, \pi_i\beta]PZ(M_i) = 0$ для любых $\varphi \in \operatorname{Hom}(M_i, G_i)$ и $\alpha, \beta \in Pr(M)$.*

Доказательство. 1. Пусть $a = a_1 + \dots + a_n \in M$, где $0 \ne a_j \in M_{i_j}$ $(j = 1,\dots,n,\ i_j \in I)$, $\theta\colon M \to G_{i_1}$ — проекция и $\varphi \in \operatorname{Hom}(M_{i_1}, G_{i_1})$ такой, что $\varphi a_1 \ne 0$. Считаем, что $\varphi \in E(M)$, полагая $\varphi \mid M_{i_1} = \varphi$, $\varphi \mid G_{i_1} = 0$. Тогда $\xi = (1-\theta) + \theta\varphi(1-\theta) \in Pr(M)$ и $[\theta,\varphi]a = \varphi a_1 \ne 0$. Следовательно, $a \notin PZ(M)$. Поэтому $PZ(M) = 0$.

2. Следует из проективной инвариантности P-центра.

3. Вытекает из доказательства п. 1.

4. Включение $PZ(M) \cap M_i \subseteq PZ(M_i)$ очевидно. Если $PZ(M_i) \subseteq PZ(M)$, то из п. 3 $\varphi(PZ(M_i)) = 0$ для любого $\varphi \in \operatorname{Hom}(M_i, G_i)$. Оставшиеся утверждения необходимости следуют из леммы 1. Пусть теперь $\pi\colon M \to M_i$, $\theta\colon M \to G_i$ — проекции, $\alpha, \beta \in Pr(M)$ и $a \in PZ(M_i)$. Имеем

$$[\alpha,\beta]a = [(\pi+\theta)\alpha, (\pi+\theta)\beta]a = [\pi\alpha,\pi\beta]a + [\pi\alpha,\theta\beta]a + [\theta\alpha,\pi\beta]a + [\theta\alpha,\theta\beta]a.$$

Здесь $[\pi\alpha,\pi\beta]a = 0$, а оставшиеся три слагаемые равны 0, поскольку в $[\pi\alpha,\theta\beta]$, $[\theta\alpha,\pi\beta]$, $[\theta\alpha,\theta\beta]$ входят эндоморфизмы $\theta\alpha$, $\theta\beta$, действующие на элементах из M_i как гомоморфизмы из $\operatorname{Hom}(M_i, G_i)$. Итак, $PZ(M_i) \subseteq PZ(M)$.

Из леммы 6, в частности, следует, что для гомоморфизма $f\colon M \to B$ не обязательно $f(PZ(M)) \subseteq PZ(B)$. Кроме того, если $M = \bigoplus M_i$ $(M = \prod M_i)$, где $M_i \le fi\,M$, то $PZ(M) = \bigoplus PZ(M_i)$ $(PZ(M) = \prod PZ(M_i))$. Если $M = \bigoplus M_i$ $(M = \prod M_i)$, где $|I| > 1$ и $M_i \cong M_j$ при $i, j \in I$, то $PZ(M) = 0$. Следовательно, если $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая группа, где $0 \ne t(D)$ — ее периодическая часть, а D_0 — часть без кручения, то $Z(D) = \bigoplus_{p\in\Pi_1} D_p$, здесь $\Pi_1 = \{p \in P \mid r(D_p) = 1\}$. Если $t(D) = 0$, то $PZ(D) = 0$ при $r(D) > 1$ и $PZ(D) = D$ при $r(D) = 1$.

Лемма 7. *Если $M = B \oplus C$, где $C \le fi\,M$, то $PZ(M) = G \oplus PZ(C)$, где $G = PZ(B) \cap \bigl(\bigcap_{\varphi\in\operatorname{Hom}(B,C)} \ker\varphi\bigr)$.*

Доказательство. Согласно пп. 2, 4 леммы 6 $PZ(M) = (PZ(M) \cap B) \oplus (PZ(M) \cap C)$, где $PZ(M) \cap C = PZ(C)$. В силу п. 3 леммы 6 $PZ(M) \cap B \subseteq G$, а из п. 4 и свойства 2 следует обратное включение $G \subseteq PZ(M) \cap B$.

Следствие 2. 1. *Если $A = B \oplus D$ — нередуцированная группа без кручения, где D — ее делимая часть, то $PZ(A) = D$ при условии $r(D) = 1$, в противном случае $PZ(A) = 0$.*

2. *Если $T = t(A)$ и $A = T \oplus R$ — расщепляющаяся группа, то $PZ(A) = PZ(T)$ при условии, что T — нередуцированная группа, в противном случае $PZ(A) = PZ(T) \oplus (PZ(R) \cap \big(\bigcap\limits_{p\in\Pi} p^{m_p}R\big))$, где $\Pi = \{p \in P \mid T_p \neq 0\}$, $m_p = \sup\{e(a) \mid a \in T_p\}$.*

Доказательство. 1. Проверяется непосредственно.

2. Имеем $PZ(A) = (PZ(A) \cap T) \oplus (PZ(A) \cap R)$. Согласно лемме 7 $PZ(A) \cap T = PZ(T)$, $PZ(A) \cap R = PZ(R) \cap \big(\bigcap\limits_{\varphi\in \mathrm{Hom}(R,T)} \ker\varphi\big)$. Обозначим для краткости $E = PZ(A) \cap R$, $F = PZ(R) \cap \big(\bigcap\limits_{p\in\Pi} p^{m_p}R\big)$. Если T — нередуцированная группа, то для любого $0 \neq x \in R$ найдется $\varphi \in \mathrm{Hom}(R, T)$ со свойством $\varphi x \neq 0$. Поэтому по лемме 6 $PZ(A) \cap R = 0$. Если же T — редуцированная группа, то $\varphi(F) = 0$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(R, T)$, поэтому $F \subseteq E$. Если $x \in PZ(A) \cap R$, $h_p(x) < m_p$, то $\varphi x \neq 0$ для некоторого $\varphi \in \mathrm{Hom}(R, T)$. Следовательно, $E \subseteq F$.

Теорема 5. *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — ненулевая делимая часть группы A, и пусть $G = PZ(B) \cap \big(\bigcap\limits_{\varphi\in \mathrm{Hom}(B,D)} \ker\varphi\big)$. Тогда G является периодической подгруппой, $G = \bigoplus\limits_{p\in\Pi} G_p$ ($G_p \neq 0$ при $p \in \Pi$), $D_p = 0$ для каждого $p \in \Pi$, а $PZ(A)$ совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *если $t(D) \neq 0$, то $PZ(A) = G \oplus \big(\bigoplus\limits_{p\in\Pi_1} D_p\big)$, где $\Pi_1 = \{p \in P \mid r(D_p) = 1\}$;*

2) *если $t(D) = 0$, то либо $PZ(A) = G$, либо, если $r(D_0) = 1$, $PZ(A) = G \oplus D_0$.*

Доказательство. Имеем

$$PZ(A) = (PZ(A) \cap B) \oplus (PZ(A) \cap t(D)) \oplus (PZ(A) \cap D_0).$$

Так как $t(D) \leq fi\, A$, согласно лемме 6

$$PZ(A) \cap t(D) = PZ(t(D)) = \bigoplus_{p\in\Pi_1} D_p,$$

где $\Pi_1 = \{p \in P \mid r(D_p) = 1\}$. По той же лемме 6 $PZ(A) \cap D_0 = 0$, если $t(D) \neq 0$ или $r(D_0) > 1$. Всякая подгруппа $X \leq B$ со свойством $\mathrm{Hom}(B, D)X = 0$ является периодической, причем $X_p = 0$ при $D_p \neq 0$. Оставшиеся утверждения суть следствия леммы 6.

Для $\pi \in Pr(M)$ и $B = \pi M$ введем обозначение $\underline{P(B)} = \langle[\pi\xi, \pi\eta]B \mid \xi, \eta \in Pr(M)\rangle$.

Лемма 8. *Пусть $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, где $|I| > 1$. Тогда*

1) $P(M) = \langle \mathrm{Hom}(M_i, M_j)M_i, \underline{P(M_i)} \mid i, j \in I, j \neq i\rangle$;

2) $P(M) = \bigoplus\limits_{i\in I} P(M_i)$ *в точности тогда, когда* $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)M_i \subseteq P(M_j)$ *и* $\underline{P(M_i)} = P(M_i)$ *для любых* $i, j \in I$, $j \neq i$.

Доказательство вытекает из леммы 1.

Из леммы 8 следует, что если модуль M является прямой суммой подмодулей с коммутативными кольцами эндоморфизмов, то $P(M) \leq fi\, M$.

Пусть $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая группа, где $t(D) = \bigoplus D_p$ — ее периодическая часть. Тогда из леммы 8 следует, что если $D_0 = 0$, то $P(D) = \bigoplus\limits_{p\in\Pi} D_p$, где $\Pi = \{p \in P \mid r(D_p) > 1\}$; если $r(D_0) = 1$, то $P(D) = t(D)$, а если $r(D_0) > 1$, то $P(D) = D$. Ввиду свойства 2 если $A = B \oplus C$, где $C \leq fi\, A$, то $P(A) = P(B) \oplus \langle \mathrm{Hom}(B, C)B, P(C)\rangle$. В частности, справедливо

Следствие 3. *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — ненулевая делимая часть группы A и $B \neq 0$. Тогда $P(A)$ совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) если B — непериодическая группа или $r(D_0) > 1$, то $P(A) = P(B) \oplus D$;

2) если B — периодическая группа и $D_0 = 0$, то

$$P(A) = P(B) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in\Pi} D_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in K} D_p[p^{m_p}]\Big),$$

где $\Pi = \{p \in P \mid r(D_p) > 1\}$, $K = \{p \in P \mid r(D_p) = 1$ и $B_p \neq 0\}$, $m_p = \sup\{e(b) \mid b \in B_p\}$;

3) если B — периодическая группа и $r(D_0) = 1$, то $P(A) = P(B) \oplus t(D)$.

Группу A назовем *cpi-простой*, если у нее нет нетривиальных ($\neq 0, A$) *cpi*-подгрупп. Ясно, что группа A с нормальным кольцом $E(A)$ является *cpi*-простой в точности тогда, когда она имеет простой порядок. Несложно установить, что *cpi*-простая группа является либо элементарной p-группой для некоторого простого числа p, либо разложимой делимой группой без кручения.

Если $A = Z_p \oplus \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел, то $PZ(A) = Z_p \oplus p\mathbb{Z}$, а $P(A) = Z_p$. В данном случае $PZ(A)$ — максимальная подгруппа в A. Покажем, что если в A нет прямых слагаемых, изоморфных Z_p для каждого простого числа p, то $PZ(A)$ не может быть максимальной подгруппой. Действительно, в противном случае $A/PZ(A)$ — группа простого порядка p, и так как $pA \subseteq PZ(A)$, то $A_p \neq 0$. Из леммы 6 следует, что A_p — неразложимая группа. Поэтому $A = A_p \oplus B$ для некоторой подгруппы B. Поскольку $A_p \subseteq PZ(A)$, то $PZ(A) = A_p \oplus (PZ(A) \cap B)$. Здесь $|B/(PZ(A) \cap B)| = p$, следовательно, $|A_p| = p$, что противоречит условию.

Если $A \subseteq M$, то подмодуль $\langle [\alpha, \beta]a \mid a \in A, \alpha, \beta \in Pr(M)\rangle$ назовем *P-коммутантом* подмножества A в M и обозначим через $P[A, M]$. Если $A \leq cpi\, M$, то $P[A, M] \leq cpi\, M$.

Обозначим $P[A, M]_1 = A + P[A, M]$, $P[A, M]_{n+1} = P[A, M]_n + P[P[A, M]_n, M]$ при $n \geq 1$. Тогда $\overline{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P[A, M]_n$ — наименьший *cpi*-подмодуль, содержащий A. Действительно, $\overline{A} \leq cpi\, M$ и всякий *cpi*-подмодуль, содержащий A, содержит и $\overline{A}$.

cpi-Подмодуль A модуля M назовем *P-малым*, если из $M = A + S$, где S — некоторый *cpi*-подмодуль, следует, что $S = A$.

Элемент $x \in M$ назовем *P-необразующим* модуля M, если $\overline{\langle x\rangle}$ — P-малый подмодуль. Очевидно, что любой *cpi*-подмодуль, содержащийся в P-малом подмодуле, является P-малым; сумма конечного числа P-малых подмодулей является P-малым подмодулем. В силу сказанного сумма всех P-малых подмодулей совпадает с множеством P-необразующих элементов модуля M.

Обозначим через $\mathrm{prad}\, M$ пересечение всех максимальных *cpi*-подмодулей модуля M, если они существуют, и $\mathrm{prad}\, M = M$ в противном случае; через $\mathrm{psoc}\, M$ — сумму всех минимальных *cpi*-подмодулей модуля M. Если B — минимальный *cpi*-подмодуль в M, то $B \subseteq PZ(M)$ или $B \subseteq P(M)$, поэтому $\mathrm{psoc}\, M \subseteq PZ(M) + P(M)$.

Предложение 2. 1. *Множество S всех P-необразующих элементов модуля M совпадает с* $\operatorname{prad} M$.

2. $\operatorname{psoc} M$ *совпадает с пересечением Q всех существенных cpi-подмодулей модуля M.*

Доказательство. 1. $S \subseteq \operatorname{prad} A$. Если M не содержит максимальных *cpi*-подмодулей, то утверждение очевидно. Пусть теперь $x \in S$ и H — максимальный *cpi*-подмодуль в M. Если $x \notin H$, то $\overline{\langle x\rangle} + H = M$ и $H \neq M$. Это противоречит включению $x \in S$.

$\operatorname{prad} M \subseteq S$. Пусть, напротив, существуют $x \in \operatorname{prad} M$ и $B \leq cpi\, M$ такие, что $B \neq M$, но $\overline{\langle x\rangle} + B = M$. По лемме Цорна найдется *cpi*-подмодуль H модуля M, максимальный среди *cpi*-подмодулей, содержащих B и не содержащих x. Ясно, что H — максимальный *cpi*-подмодуль. Но тогда $x \in \operatorname{prad} M \subseteq H$; противоречие.

2. Если B — минимальный *cpi*-подмодуль, а A — существенный *cpi*-подмодуль, то $B \cap A = B$ и, значит, $\operatorname{psoc} M \subseteq A$.

Пусть теперь $N \leq Q$ и $N \leq cpi\, M$. Если K — максимальный элемент в множестве *cpi*-подмодулей модуля M таких, что $N \cap K = 0$, то $H = N + K$ — существенный *cpi*-подмодуль в M. Далее, $Q = N \oplus (K \cap Q)$. Таким образом, каждый *cpi*-подмодуль модуля M, содержащийся в Q, выделяется в Q прямым слагаемым. Отсюда следует, что $Q \subseteq \operatorname{psoc} M$. Действительно, конечно порожденный *cpi*-подмодуль, содержащийся в Q, включает максимальный *cpi*-подмодуль, а отсюда уже следует, что каждый $(\subseteq Q)$ ненулевой *cpi*-подмодуль содержит минимальный *cpi*-подмодуль. Несложно видеть, что Q является суммой минимальных *cpi*-подмодулей, т. е. $Q \subseteq \operatorname{psoc} M$.

Предложение 3. *Если M — P-разрешимый модуль и A — его cpi-подмодуль с условием $A + P(M) = M$, то $A = M$. В частности, $P(M) \subseteq \operatorname{prad} M$.*

Доказательство. Положим $A_i = A + Z_i$, где $Z_i = PZ(M)_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $A_m \subset M$ и $A_{m+1} = M$. Тогда

$$P(M) = P[M, M] = P[A, M] + P[Z_{m+1}, M] \subseteq A + Z_m = A_m,$$

откуда $A + P(M) \subseteq A_m \subset M$; противоречие. Включение $P(M) \subseteq \operatorname{prad} M$ следует из предложения 2.

cpi-Подмодуль H модуля M назовем *P-полупервичным*, если для любого подмодуля A модуля M из включения $P[A, M] \subseteq H$ вытекает, что $A \subseteq H$. Отметим, что включение $P[A, M] \subseteq H$ эквивалентно включению $P[\overline{A}, M] \subseteq H$.

Пересечение всех P-полупервичных подмодулей модуля M обозначим через $PP(M)$. Из определения следует, что $PZ(M) \subseteq PP(M)$, в частности, $M = PP(M)$ для P-разрешимого модуля M.

Элемент a модуля M назовем *строго P-нильпотентным*, если для любой последовательности $\{\alpha_n \in Pr(M) \mid n \in \mathbb{N}\}$ найдется такой номер m, что $[\alpha_{2m}, \alpha_{2m-1}] \dots [\alpha_2, \alpha_1] a = 0$.

Следующий результат является аналогом характеризации Левицкого первичного радикала кольца [11, предложение 26.5].

Предложение 4. *$PP(M)$ состоит из строго P-нильпотентных элементов.*

Доказательство. Пусть $a \notin PP(M)$. Поэтому $a \notin H$ для некоторого P-полупервичного подмодуля H. Тогда $P[\langle a\rangle, M] \nsubseteq H$, т. е. существует такой элемент $a_1 \in P[\langle a\rangle, M]$, что $a_1 \notin H$. Если $a_n \notin H$, то $P[\langle a_n\rangle, M] \nsubseteq H$. Значит, существует $a_{n+1} \in P[\langle a_n \rangle, M]$ со свойством $a_{n+1} \notin H$. В частности, элемент a не является строго P-нильпотентным.

Обратно, пусть элемент a не является строго P-нильпотентным, и пусть $T = \{a_n \mid n = 0, 1, \dots\}$ — последовательность элементов модуля M такая, что $a_0 = a$ и $0 \neq a_{n+1} \in P[\langle a_n \rangle, M]$ для каждого n. Тогда $0 \notin T$ и по лемме Цорна существует cpi-подмодуль G, максимальный среди cpi-подмодулей, не пересекающихся с T. Пусть теперь A — подмодуль в M такой, что $A \nsubseteq G$. В силу выбора подмодуля G имеем $(\overline{A} + G) \cap T \neq \varnothing$. Если теперь $a_n \in \overline{A} + G$, то $a_{n+1} \in P[\overline{A} + G, M] = P[\overline{A}, M] + P[G, M]$, где $P[G, M] \subseteq G$, откуда $P[\overline{A}, M] \nsubseteq G$. Значит, и $P[A, M] \nsubseteq G$. Таким образом, G — P-полупервичный подмодуль и $a_0 = a \notin G$. Следовательно, $a \notin PP(M)$.

Поскольку $PZ(M) \subseteq PP(M)$, условие $PP(M) = 0$ влечет $PZ(M) = 0$. Верно и обратное утверждение. Действительно, пусть $a_0 = a \neq 0$. По условию найдутся такие $\alpha_n, \beta_n \in Pr(M)$, что $a_{n+1} = [\alpha_n, \beta_n] a_n \neq 0$, $n = 0, 1, \dots$, т. е. элемент a не является строго P-нильпотентным.

Перейдем к редуцированным группам и приведем описание P-центров и P-коммутантов некоторых групп.

7. *Если A — неограниченная сепарабельная p-группа, то $PZ(A) = 0$ и $P(A) = A$.*

Элемент $0 \neq a \in A$ можно вложить в прямое слагаемое B группы A, являющееся ограниченной группой, $A = B \oplus G$. Поскольку G — неограниченная группа, то существует гомоморфизм $f\colon B \to G$ со свойством $f(a) \neq 0$ и $\mathrm{Hom}(G, B)G = B$. Согласно лемме 8 $a \notin PZ(A)$ и $B \subseteq P(A)$.

Если A — редуцированная p-группа и $A^1 \neq 0$, то возможен случай, когда $PZ(A) \neq 0$; например, если подгруппа A^1 циклическая, то $PZ(A) = A^1$.

8. *Пусть A — ограниченная p-группа, $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$, где B_i — прямые суммы некоторого числа копий группы $Z_{p^{k_i}}$, $k_1 < \dots < k_m$ и $i = 1, \dots, m$. Тогда $PZ(A) = p^{k_{m-1}} B_m$ и $P(A) = A[p^{k_{m-1}}]$, если B_m — циклическая группа и $PZ(A) = 0$, $P(A) = A$ в противном случае.*

9. *Пусть A — сепарабельная группа без кручения, $\Omega(A)$ — множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1. Тогда $PZ(A) = \sum\limits_{t \in C(A)} A(t)$, где $C(A)$ — множество всех таких типов $t \in \Omega(A)$, что $r(A(t)) = 1$, т. е. $PZ(A)$ совпадает с суммой всех вполне инвариантных прямых слагаемых ранга 1 группы A, а $P(A)$ совпадает с суммой тех прямых слагаемых A_i ранга 1, для которых в дополнительном прямом слагаемом есть прямое слагаемое ранга 1 типа $\leq t(A_i)$.*

10. *Пусть $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$ — векторная группа, где A_i — группы без кручения ранга 1. Тогда $PZ(A) = \prod\limits_{j \in J} A_j$, где J — множество всех таких $j \in I$, что $r(A(t(A_j))) = 1$ при $j \in J$, т. е. $PZ(A)$ совпадает с прямым произведением всех вполне инвариантных подгрупп A_j, а $P(A) = \prod\limits_{k \in K} A_k$, где K — множество всех таких $k \in I$, что в $I \setminus \{k\}$ найдется подгруппа A_s со свойством $t(A_s) \leq t(A_k)$.*

11. *Пусть $A = \prod A_p$ — алгебраически компактная группа без кручения, где A_p — p-адические компоненты группы A. Тогда $PZ(A) = \prod\limits_{p \in \Pi} A_p$, где $\Pi =$*

$\{p \in P \mid A_p$ — *неразложимая группа*$\}$, а $P(A) = \prod\limits_{p \in K} A_p$, где $K = \{p \in P \mid A_p$ — *разложимая группа*$\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чехлов А. Р.* О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 6. С. 211–218.
2. *Чехлов А. Р.* О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2009. № 1. С. 31–36.
3. *Чехлов А. Р.* Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 942–953.
4. *Чехлов А. Р.* О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2009. № 2. С. 78–84.
5. *Чехлов А. Р.* О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2009. № 2. С. 85–99.
6. *Чехлов А. Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 4. С. 520–539.
7. *Чехлов А. Р.* E-нильпотентные и E-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2010. № 1. С. 59–71.
8. *Чехлов А. Р.* О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1163–1174.
9. *Туганбаев А. А.* Теория колец (Арифметические модули и кольца). М.: МЦНМО, 2009.
10. *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал пресс, 2007.
11. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1979. Т. 2.

Статья поступила 5 апреля 2011 г.

Чехлов Андрей Ростиславович
Томский гос. университет,
механико-математический факультет, кафедра алгебры,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
cheklov@math.tsu.ru