Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 517.958

ПОЛИХРОМАТИЧЕСКИЙ ИНДИКАТОР НЕОДНОРОДНОСТИ НЕИЗВЕСТНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ РЕНТГЕНОВСКОЙ ТОМОГРАФИИ

Д. С. Аниконов, Е. Ю. Балакина

Аннотация. Ставится и исследуется задача рентгеновской томографии, являющаяся обратной задачей для дифференциального уравнения переноса. При этом учитываются поглощение частиц средой и их однократное рассеяние. Постановка проблемы соответствует поэтапному зондированию неизвестной среды, что обычно имеет место на практике. Еще одним шагом в сторону реалистичности задачи является использование в качестве известных данных интегралов по энергии от плотности выходящего потока излучения в отличие от задания плотности потока для каждого уровня энергии, как это принято в томографии. Искомым объектом являются поверхности разрывов коэффициентов уравнения, что соответствует поиску границ между различными веществами, входящими в состав зондируемой среды. Доказывается теорема единственности решения при довольно общих предположениях и при условии, гарантирующем существование искомых поверхностей. Доказательство имеет отчетливо конструктивный характер и пригодно для построения численного алгоритма.

Ключевые слова: неизвестная граница, уравнение переноса, обратные задачи, томография.

§ 1. Обозначения, вспомогательная задача

Рассматривается стационарное линейное дифференциальное уравнение:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega,E) + \mu(r,E) f(r,\omega,E) = J(r,\omega,E), \tag{1.1}$$

где r — пространственная переменная, $r \in G$, G — выпуклая ограниченная область в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$; $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{E}^3 : |\omega| = 1\}$; E — числовая переменная, $E \in I = [E_{\min}, E_{\max}]$.

В этом уравнении $f(r,\omega,E)$ интерпретируется как плотность потока частиц, в частности фотонов, в точке r с энергией E, летящих в направлении ω. Функции μ, J характеризуют среду G, при этом $\mu(r,E)$ означает коэффициент полного взаимодействия (эта величина обратна свободному пробегу и складывается из коэффициента рассеяния и коэффициента поглощения), $J(r,\omega,E)$ означает плотность внутренних источников.

Для характеристики неоднородности среды G введем в рассмотрение подмножество G_0 области G, которое является объединением конечного числа областей:

$$G_0 = \bigcup_{i=1}^{p} G_i,\ p < \infty, \quad G_i \cap G_j = \varnothing \text{ при } i \neq j; \quad \overline{G}_0 = \overline{G}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10–01–00384–a, 11–08–00286–a), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 16.740.11.0127).

Область G_i можно интерпретировать как часть неоднородной среды G, заполненную i-м веществом.

Также G_0 предполагается обобщенно выпуклым множеством [1–3], т. е. для любых $r \in G_0$, $\omega \in \Omega$ луч $L_{r,\omega} = \{r + t\omega : t \geqslant 0\}$ пересекает границы областей G_i, $i = 1, \dots, p$, в конечном числе точек $r + t_j(r, \omega)\omega$, и множество $L_{r,\omega} \cap G_0$, кроме точки r, состоит из промежутков $\{r + t\omega,\ t \in (t_{j-1}(r, \omega), t_j(r, \omega))\}$, $j = 1, \dots, l(r, \omega)$, каждый из которых принадлежит некоторой области G_i, $t_0(r, \omega) = 0$.

Пусть функции $\mu(r, E)$ и $J(r, \omega, E)$ непрерывны при $r \in G_0$, $E \in I_0$, где $I_0 = I \setminus \widetilde{I}_0$, $\widetilde{I}_0$ состоит из конечного числа точек, и в $\widetilde{I}_0$ могут претерпевать по E разрыв первого рода. Это включает естественный с точки зрения физики случай резонанса.

Пусть Y — произвольное ограниченное множество в $\mathbb{E}^m$, ∂Y — его граница. К классу $\mathbf{D}(Y)$ отнесем вещественные функции $\varphi(y)$, непрерывные и ограниченные на Y и доопределенные в граничных точках $z \in \overline{Y} \setminus Y$, в которых они не определены, нижним пределом функции $\varphi(y)$ при $y \to z$.

Определим следующие множества:

$$\Gamma_\omega^\pm = \{r \in \partial G : L_{r,\mp\omega} \cap G_0 \neq \varnothing\}; \quad \Gamma^\pm = \bigl\{(r, \omega, E) \in \partial G \times \Omega \times I_0 : r \in \Gamma_\omega^\pm\bigr\};$$

$$\mathscr{X} = \{(r, \omega, E) : (r, \omega, E) \in \overline{G} \times \Omega \times I_0,\ L_{r,\omega} \cap G_0 \neq \varnothing\}.$$

Введем функцию $d(r, \omega)$ — расстояние от точки $r \in \overline{G}$ до границы ∂G в направлении ω:

$$d(r, \omega) = \int_0^d \chi(r + \nu\omega)\, d\nu,$$

где $\chi(r)$ — характеристическая функция области G, $d = \operatorname{diam} G$. Тогда для любой точки $(r, \omega, E) \in G_0 \times \Omega \times I_0$ точка $(r + d(r, \omega)\omega, \omega, E)$ принадлежит Γ^+, точка $(r - d(r, -\omega)\omega, \omega, E)$ принадлежит Γ^-.

Для функции $d(r, \omega)$ справедлива следующая

Лемма 1.1 [1, с. 102]. *Пусть ∂G — гладкая поверхность класса $\mathscr{C}^2$. Для градиента функции $d(r, \omega)$ верно равенство*

$$\nabla_r d(r, \omega) = -\frac{n(y)}{n(y) \cdot \omega}, \quad y = r + d(r, \omega)\omega, \quad (r, \omega) \in G \times \Omega,$$

где $n(y)$ — единичный вектор внутренней нормали к поверхности ∂G в точке $y \in \partial G$.

Отсюда видно, что функция $d(r, \omega)$ имеет непрерывные производные по r_i в области G, которые имеют особенности только при r, стремящемся к ∂G.

Везде в дальнейшем будем считать, что ∂G — двумерная поверхность класса $\mathscr{C}^2$.

Обозначим частную производную функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ по переменной x_i, $i = 1, \dots, k$, через $D_i\varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

К уравнению (1) можно присоединить граничное условие

$$f(\xi, \omega, E) = h(\xi, \omega, E), \quad (\xi, \omega, E) \in \Gamma^-. \tag{1.2}$$

Здесь функция $h(\xi, \omega, E)$ имеет смысл плотности падающего (входящего) потока. Рассмотрим вспомогательную прямую задачу.

Прямая задача. *Определить функцию f из* (1.1), (1.2) *при известных μ, J, h.*

Аналогично [1–4] назовем функцию f *решением прямой задачи*, если она удовлетворяет условиям:

а) $f(r,\omega,E)\in \mathbf{D}(G_0\times\Omega\times I_0)$;

б) для всех $(r,\omega,E)\in G_0\times\Omega\times I_0$ выполняется

$$\frac{df(r+t\omega,\omega,E)}{dt}\bigg|_{t=0}+\mu(r,E)f(r,\omega,E)=J(r,\omega,E);$$

в) для всех $(r,\omega,E)\in G_0\times\Omega\times I_0$ функция $f(r+t\omega,\omega,E)$ непрерывна по t при $t\in[-d(r,-\omega),d(r,\omega)]$ и имеет непрерывную производную по переменной t при $t\in(t_{j-1}(r,\omega),t_j(r,\omega))$, $j=1,\dots,l(r,\omega)$;

г) $f(\xi,\omega,E)=h(\xi,\omega,E)$, где $\xi=r-d(r,-\omega)\omega$ для $(r,\omega,E)\in G_0\times\Omega\times I_0$.

Введем вспомогательную функцию

$$\tilde h(r,\omega,E)=h(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E)=h(\xi,\omega,E),\quad \text{где } \xi=r-d(r,-\omega)\omega,$$

и вместо функции $h(\xi,\omega,E)$ будем иногда рассматривать функцию $\tilde h(r,\omega,E)$, которая определена на $G\times\Omega\times I_0$.

Сформулируем ограничения на функции μ, J, $\tilde h$:

1) $\mu(r,E)\in\mathbf{D}(G_0\times I_0)$ и $J(r,\omega,E)\in\mathbf{D}(G_0\times\Omega\times I_0)$ имеют равномерно непрерывные частные производные по r_m, $m=1,2,3$, в G_i, $i=1,\dots,p$, до второго порядка включительно, причем их нормы в пространстве $\mathscr{C}^2(G_i)$, $i=1,\dots,p$, ограничены константой, не зависящей от ω, E;

2) $\tilde h(r,\omega,E)\in\mathbf{D}(G_0\times\Omega\times I_0)$;

3) функции μ и J неотрицательны и продолжаются по r нулем вне $\overline{G}$.

Теорема. *Решение прямой задачи существует, единственно и представимо в виде*

$$f(r,\omega,E)=\exp\left(-\int_0^{d(r,-\omega)}\mu(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right)h(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E)$$
$$+\int_0^{d(r,-\omega)}\exp\left(-\int_0^{t}\mu(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right)J(r-t\omega,\omega,E)\,dt \tag{1.3}$$

для всех $(r,\omega,E)\in\mathscr{X}$.

Эта теорема является частным случаем теоремы, доказанной в [1, с. 28], при каждом фиксированном E.

§ 2. Постановка задачи, вспомогательные утверждения

Рассмотрим следующую обратную задачу, соответствующую многократному зондированию среды G.

Задача. *Найти* ∂G_0 — *границу множества* G_0 — *из уравнений*

$$\omega\cdot\nabla_r f_q(r,\omega,E)+\mu(r,E)f_q(r,\omega,E)=J(r,\omega,E),\quad q=1,\dots,K, \tag{2.1}$$

и краевых условий

$$f_q(\xi,\omega,E)=h_q(\xi,\omega,E),\quad (\xi,\omega,E)\in\Gamma^-,\quad q=1,\dots,K, \tag{2.2}$$

$$\int_{E_1}^{E_2} f_q(\eta,\omega,E)\,dE=H_q(\eta,\omega),\quad [E_1,E_2]\subset[E_{\min},E_{\max}], \tag{2.3}$$

$$(\eta,\omega)\in\Gamma^+_\omega\times\Omega,\quad q=1,\dots,K,$$

где известными являются поверхность ∂G и функции $H_q(\eta,\omega)$, $q=1,\dots,K$.

Как и в [1], предметом поиска являются границы областей G_i, $i=1,\dots,p$, существенно характеризующие строение неизвестной среды. В то же время постановка задачи (2.1)–(2.3) отличается от рассмотренной в [1, с. 141] тем, что здесь уравнение переноса не содержит интеграла столкновения, однако сделано продвижение в направлении постановки более реальной задачи томографии, а именно, вместо задания выходящего излучения для каждого уровня энергии задается интеграл по энергии и, кроме того, предполагается поэтапное зондирование среды, что принято на практике.

Заметим, что функции $h_q(\xi,\omega,E)$, $q=1,\dots,K$, являются неизвестными, условие (2.2) здесь лишь подчеркивает принадлежность этих функций определенному классу, указанному ниже.

Вообще, томография была и остается областью интенсивных исследований, которой посвящены многочисленные публикации во многих странах мира. Не претендуя на обзор этих работ, отметим лишь некоторые из них, наиболее близкие к настоящему исследованию [5–12]. Часто постановки задач томографии выводятся непосредственно из соответствующих физических предположений. Как правило, аналогичного результата можно добиться, рассматривая определенные обратные задачи для уравнения переноса излучения. Впервые подобная постановка задачи выполнена в [13].

Для упрощения обозначений введем функции

$$\widetilde{H}_q(r,\omega)=H_q(r+d(r,\omega)\omega,\omega)=H_q(\eta,\omega),\quad \text{где } \eta=r+d(r,\omega)\omega,$$

и вместо функций $H_q(\eta,\omega)$ будем иногда рассматривать функции $\widetilde{H}_q(r,\omega)$, которые определены на $G\times\Omega$, $q=1,\dots,K$.

Аналогично $\tilde{h}(r,\omega,E)$ при $q=1,\dots,K$ обозначим

$$\tilde{h}_q(r,\omega,E)=h_q(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E)=h_q(\xi,\omega,E),\quad \xi=r-d(r,-\omega)\omega.$$

Будем предполагать, что функции $\tilde{h}_q(r,\omega,E)$, $q=1,\dots,K$, удовлетворяют условиям для функции $\tilde{h}(r,\omega,E)$ и, кроме того, их частные производные по r_m, $m=1,2,3$, непрерывны в $G\times\Omega\times I_0$ и могут быть неограниченными только при r, близких к ∂G.

Считаем, что граница ∂G_i, $i=1,\dots,p$, является непрерывной кусочно-гладкой двумерной поверхностью класса $\mathscr{C}^2$. Точнее говоря, сделаем следующие предположения.

Условимся обозначать координаты точек r, y, z, ω в основной системе координат через (r_1,r_2,r_3), (y_1,y_2,y_3), (z_1,z_2,z_3), $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ соответственно. Базис для этой системы координат состоит из ортонормированной системы векторов $\{e_1,e_2,e_3\}$. Пусть $z\in\partial G_l\cap\partial G_j$ и в некоторой окрестности $V(z)$ этой точки нет точек областей G_i, кроме G_l и G_j. Пусть в точке z существует касательная плоскость $P(z)$, общая для ∂G_l и ∂G_j. Обозначим единичный вектор внутренней нормали к ∂G_l в точке z через $n_l(z)$. Возьмем цилиндр $C_\delta(z)$ высоты 2δ с центральной осью вдоль $n_l(z)$, основанием которого является круг в плоскости $P(z)$: $\{y: y\in P(z),\ |y-z|\le\delta,\ 0<\delta<1\}$, т. е. $C_\delta(z)=\{y: y\in\mathbb{E}^3,\ |y-z|^2-(y-z,n_l(z))^2\le\delta^2,\ |((y-z),n_l(z))|\le\delta\}$. Часть поверхности ∂G_l внутри $C_\delta(z)$ обозначим $\partial G_{l,z}$. Пусть $\partial G_{l,z}=\partial G_{j,z}$ для достаточно малого δ. Возьмем декартову систему координат в $\mathbb{E}^3$ с началом в точке z, у которой первые две оси расположены в $P(z)$, а третья направлена вдоль $n_l(z)$.

Координаты точек в этой системе координат будем обозначать через $(\zeta_1, \zeta_2, \vartheta)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\vartheta \in \mathbb{R}^1$.

Предположим, что поверхность $\partial G_{l,z}$ представляется в виде графика $(\zeta, \varphi(\zeta))$, $|\zeta| \leq \delta$, где функция φ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и $\varphi(0) = D_1\varphi(0) = D_2\varphi(0) = 0$.

Тогда справедливы оценки $|D_k\varphi(\zeta)| \leq \mathrm{const}\,|\zeta|, k = 1, 2$, $|\varphi(\zeta)| \leq \mathrm{const}\,|\zeta|^2$.

Такие точки z будем называть *контактными* и предположим, что они образуют множество, плотное в $\partial G_0 \backslash \partial G$.

Как и в [1], в целом ∂G_i для любого i считается липшицевой.

Пусть $z \in \partial G_i$, тогда существуют конечные пределы при $r \to z$, $r \in G_i$, функций $\mu(r, E)$ и $J(r, \omega, E)$, которые обозначим через $[\mu(z, E)]_i$ и $[J(z, \omega, E)]_i$. Возьмем точку $z \in \partial G_0$, являющуюся граничной только для двух множеств G_l и G_j. *Величиной скачка функций* μ и J в точке z назовем $[\mu(z, E)]_{l,j} = [\mu(z, E)]_l - [\mu(z, E)]_j$, $[J(z, \omega, E)]_{l,j} = [J(z, \omega, E)]_l - [J(z, \omega, E)]_j$.

Введем обозначение $F_q(r, \omega, E) = f_q(r + d(r, \omega)\omega, \omega, E) = f_q(\eta, \omega, E)$, $(r, \omega, E) \in G_0 \times \Omega \times I_0$, $\eta = r + d(r, \omega)\omega$, $q = 1, \dots, K$.

Из равенства (1.3) следует, что функция $F_q(r, \omega, E)$, $q = 1, \dots, K$, представима в виде

$$F_q(r, \omega, E) = \exp\left(-\int_0^{d(r,\omega)} \mu(r + \alpha\omega, E)\, d\alpha\right) f_q(r, \omega, E) + \int_0^{d(r,\omega)} \exp\left(\int_{d(r,\omega)}^{t} \mu(r + \alpha\omega, E)\, d\alpha\right) J(r + t\omega, \omega, E)\, dt. \tag{2.4}$$

Возьмем вспомогательные функции $\beta_q(r, \omega)$, $q = 1, \dots, K$, класса $\mathscr{C}^2(G \times \Omega)$. Далее будем рассматривать функции $P_q(r, \omega, E) = \beta_q(r, \omega) F_q(r, \omega, E)$, $S_q(r, \omega) = \beta_q(r, \omega) \widetilde{H}_q(r, \omega)$, $q = 1, \dots, K$, и зададим функцию

$$\mathrm{Ind}(r) = \sum_{q=1}^{K} \left| \nabla \int_{\Omega} \int_{E_1}^{E_2} P_q(r, \omega, E)\, dE d\omega \right|. \tag{2.5}$$

Используя представление (2.4), легко заметить, что $\mathrm{Ind}(r)$ явно вычисляется по данным обратной задачи:

$$\mathrm{Ind}(r) = \sum_{q=1}^{K} \left| \nabla \int_{\Omega} \beta_q(r, \omega) H_q(r, \omega)\, d\omega \right|.$$

Исследуем функцию $\mathrm{Ind}(r)$, представленную в (2.5). Для этого будем изучать элементарное слагаемое в (2.5) и рассматривать частную производную по r_m, $m = 1, 2, 3$, выражения, стоящего под знаком градиента.

Предварительно введем следующие обозначения: $\Pi_i^{\varepsilon} = \{r : r \notin G_i,\ \rho(r, \partial G_i) < \varepsilon\}$, $G_i^{\varepsilon} = \Pi_i^{\varepsilon} \cup G_i$.

Пусть V — произвольная окрестность в $\mathbb{E}^3$, замыкание которой содержится в множестве G_0, $\overline{V} \subset G_0$. Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\sup_{r \in \overline{V},\, \omega \in \Omega} \mathrm{mes}_1 \left(L_{r,\omega} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} \Pi_i^{\varepsilon} \right) \right) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0, \quad \mathrm{mes}_3\, \Pi_i^{\varepsilon} < \mathrm{const}\ \varepsilon, \tag{2.6}$$

здесь mes_k — лебегова мера в евклидовом k-мерном пространстве.

Считая, что функции $\mu(r,E)$ и $J(r,\omega,E)$ допускают гладкое продолжение по r вне каждой области G_i, аналогично [1, 14] введем функции $\mu^\varepsilon(r,E)$ и $J^\varepsilon(r,\omega,E)$ такие, что

$$\mu^\varepsilon(r,E)=\sum_{i=1}^{p}\mu_i^\varepsilon(r,E),$$

где $\mu_i^\varepsilon(r,E)$ — функция, имеющая при $(r,E)\in G\times I_0$ непрерывные и ограниченные частные производные по r_m, $m=1,2,3$, до второго порядка включительно, совпадающая с $\mu(r,E)$ при $r\in G_i$ и равная нулю при $r\notin G_i^\varepsilon$;

$$J^\varepsilon(r,\omega,E)=\sum_{i=1}^{p}J_i^\varepsilon(r,\omega,E),$$

где $J_i^\varepsilon(r,\omega,E)$ — функция, при $(r,\omega,E)\in G\times\Omega\times I_0$ имеющая непрерывные и ограниченные частные производные по r_m, $m=1,2,3$, до второго порядка включительно, совпадающая с $J(r,\omega,E)$ при $r\in G_i$ и равная нулю при $r\notin G_i^\varepsilon$. Предположим также, что нормы функций $\mu^\varepsilon(r,E)$ и $J^\varepsilon(r,\omega,E)$ в пространстве $\mathscr{C}^2(G_i)$, $i=1,\dots,p$, ограничены константой, не зависящей от ω, E.

Нетрудно показать, что для $\mu^\varepsilon(r,E)$ и $J^\varepsilon(r,\omega,E)$ справедливы оценки

$$|D_m\mu^\varepsilon(r,E)|<\mathrm{const}/\varepsilon,\quad |D_mJ^\varepsilon(r,\omega,E)|<\mathrm{const}/\varepsilon. \tag{2.7}$$

Далее обозначим

$$\begin{aligned} f_q^\varepsilon(r,\omega,E)&=\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,-\omega)}\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right)h_q(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E)\\ &+\int\limits_0^{d(r,-\omega)}\exp\left(-\int\limits_0^{t}\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right)J^\varepsilon(r-t\omega,\omega,E)\,dt,\quad q=1,\dots,K, \end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} P_q^\varepsilon(r,\omega,E)&=\beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)f_q^\varepsilon(r,\omega,E)\\ &+\beta_q(r,\omega)\int\limits_0^{d(r,\omega)}\exp\left(\int\limits_{d(r,\omega)}^{t}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)J^\varepsilon(r+t\omega,\omega,E)\,dt,\quad q=1,\dots,K. \end{aligned}$$

Очевидна равномерная сходимость при $(r,\omega,E)\in\overline{V}\times\Omega\times I_0$, $\varepsilon\to0$, функций $\mu^\varepsilon(r,E)$, $J^\varepsilon(r,\omega,E)$, $f_q^\varepsilon(r,\omega,E)$ и $P_q^\varepsilon(r,\omega,E)$ к функциям $\mu(r,E)$, $J(r,\omega,E)$, $f_q(r,\omega,E)$ и $P_q(r,\omega,E)$ соответственно, $q=1,\dots,K$.

В силу произвольности множества V функции $f_q(r,\omega,E)$ непрерывны и ограничены при $(r,\omega,E)\in G_0\times\Omega\times I_0$, $q=1,\dots,K$.

Рассмотрим функции

$$v_q^{(\varepsilon)}(r)=\int\limits_\Omega\int\limits_{E_1}^{E_2}P_q^\varepsilon(r,\omega,E)\,dEd\omega,\quad v_q(r)=\int\limits_\Omega\int\limits_{E_1}^{E_2}P_q(r,\omega,E)\,dEd\omega,\quad q=1,\dots,K.$$

Лемма 2.1. *Для любой окрестности V, $\overline{V}\subset G_0$, непрерывные функции $v_q^{(\varepsilon)}(r)$ при $\varepsilon\to0$ стремятся к $v_q(r)$ равномерно по $r\in\overline{V}$, $q=1,\dots,K$. Для любого $m=1,2,3$ непрерывные производные $D_mv_q^{(\varepsilon)}(r)$ равномерно в $\overline{V}$ стремятся* *к* $D_m v_q(r)$ *при* $\varepsilon \to 0, \quad q = 1, \dots, K$. *Для всех* $r \in G_0$ *имеет место равенство*

$$D_m v_q(r) = \sum_{i=1}^{p} \int_{E_1}^{E_2} \int_{\partial G_i} \frac{(n_i(y), e_m)}{|r-y|^2} R_i(r,y,E) d_y\sigma\, dE + \Psi_q(r),$$

где интеграл по множеству ∂G_i *в правой части понимается как поверхностный интеграл первого рода, функция* $R_i(r,y,E)$ *представляется в виде*

$$R_i(r,y,E) = \beta_q\left(r, \frac{y-r}{|y-r|}\right) \exp\left(-\int_0^{d(r,\frac{y-r}{|y-r|})} -\mu\left(r + \alpha\frac{y-r}{|y-r|}, E\right) d\alpha\right)$$
$$\times \left\{ -\mu_i(y,E) f_q\left(r, \frac{y-r}{|y-r|}, E\right) + J_i\left(y, \frac{y-r}{|y-r|}, E\right)\right\}$$
$$+ \beta_q\left(r, \frac{r-y}{|r-y|}\right) \exp\left(-\int_0^{d(r,\frac{r-y}{|r-y|})} -\mu\left(r + \alpha\frac{r-y}{|r-y|}, E\right) d\alpha\right)$$
$$\times \left\{ -\mu_i(y,E) f_q\left(r, \frac{r-y}{|r-y|}, E\right) + J_i\left(y, \frac{r-y}{|r-y|}, E\right)\right\}, \quad y \in \partial G_0,$$

$\Psi_q(r)$ — *непрерывная в* G_0 *функция, которая может быть неограниченной только вблизи поверхности* ∂G, $q = 1, \dots, K$.

Доказательство. Для начала рассмотрим частную производную по r_m, $m = 1, 2, 3$, функции $P_q^\varepsilon(r,\omega,E)$:

$$\frac{\partial P_q^\varepsilon(r,\omega,E)}{\partial r_m} = \frac{\partial}{\partial r_m}\left\{ \beta_q(r,\omega) \exp\left(-\int_0^{d(r,\omega)} \mu^\varepsilon(r+\alpha\omega, E)\, d\alpha\right) f_q^\varepsilon(r,\omega,E)\right.$$
$$\left. + \beta_q(r,\omega) \int_0^{d(r,\omega)} \exp\left(\int_{d(r,\omega)}^{t} \mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\, d\alpha\right) J^\varepsilon(r+t\omega,\omega,E)\, dt\right\}$$
$$= Q_1^\varepsilon(r,\omega,E) + Q_2^\varepsilon(r,\omega,E), \quad (2.9)$$

$$Q_1^\varepsilon(r,\omega,E) = \frac{\partial}{\partial r_m}\left\{ \beta_q(r,\omega) \exp\left(-\int_0^{d(r,\omega)} \mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\, d\alpha\right) f_q^\varepsilon(r,\omega,E)\right\},$$

$$Q_2^\varepsilon(r,\omega,E) = \frac{\partial}{\partial r_m}\left\{ \beta_q(r,\omega) \int_0^{d(r,\omega)} \exp\left(\int_{d(r,\omega)}^{t} \mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\, d\alpha\right)\right.$$
$$\left. \times J^\varepsilon(r+t\omega,\omega,E)\, dt\right\}.$$

Преобразуем функции $Q_1^\varepsilon(r,\omega,E)$ и $Q_2^\varepsilon(r,\omega,E)$. Рассмотрим $Q_1^\varepsilon(r,\omega,E)$ и распишем в ней частную производную функции $f_q^\varepsilon(r,\omega,E)$, воспользовавшись формулой (2.8). В результате группировки слагаемых получим $Q_1(r,\omega,E) =$

$N_1^\varepsilon(r,\omega,E)+N_2^\varepsilon(r,\omega,E)+N_3^\varepsilon(r,\omega,E)$, где

$$N_1^\varepsilon(r,\omega,E) = -\beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)\frac{\partial d(r,\omega)}{\partial r_m}$$

$$\times\,\mu^\varepsilon(r+d(r,\omega),\omega,E) - \beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)$$

$$\times\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,-\omega)}\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right)\frac{\partial d(r,-\omega)}{\partial r_m}\mu^\varepsilon(r-d(r,-\omega)\omega,E)$$

$$+\,\beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)\frac{\partial d(r,-\omega)}{\partial r_m}J^\varepsilon(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E);$$

$$N_2^\varepsilon(r,\omega,E) = \frac{\partial\beta_q(r,\omega)}{\partial r_m}\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)f_q^\varepsilon(r,\omega,E)$$

$$+\,\beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)$$

$$\times\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,-\omega)}\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right)D_m\tilde{h}_q(r,\omega,E);$$

$$N_3^\varepsilon(r,\omega,E) = -\beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)$$

$$\times\int\limits_0^{d(r,\omega)}D_m\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha f_q^\varepsilon(r,\omega,E) - \beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)$$

$$\times\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,-\omega)}\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right)\int\limits_0^{d(r,-\omega)}D_m\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu h_q(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E)$$

$$-\,\beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)\int\limits_0^{d(r,-\omega)}\exp\left(-\int\limits_0^t\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right)$$

$$\times\int\limits_0^t D_m\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu J^\varepsilon(r-t\omega,\omega,E)\,dt+\beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)$$

$$\times\int\limits_0^{d(r,-\omega)}\exp\left(-\int\limits_0^t\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right)D_mJ^\varepsilon(r-t\omega,\omega,E).$$

Здесь функции $N_1^\varepsilon(r,\omega,E)$ и $N_2^\varepsilon(r,\omega,E)$ вследствие леммы 1.1 непрерывны, ограничены и равномерно сходятся при $(r,\omega,E)\in\overline{V}\times\Omega\times I_0$, $\varepsilon\to 0$, к непрерывным ограниченным функциям $N_1(r,\omega,E)$ и $N_2(r,\omega,E)$, запись которых отличается от $N_1^\varepsilon(r,\omega,E)$ и $N_2^\varepsilon(r,\omega,E)$ лишь отсутствием ε.

Теперь исследуем слагаемое $Q_2^\varepsilon(r,\omega,E)$ в выражении (2.9). Продифференцировав выражение в скобках и сгруппировав слагаемые, получаем

$$Q_2^\varepsilon(r,\omega,E)=N_4^\varepsilon(r,\omega,E)+N_5^\varepsilon(r,\omega,E)+N_6^\varepsilon(r,\omega,E),$$

где

$$\begin{aligned}N_4^\varepsilon(r,\omega,E)&=\beta_q(r,\omega)\frac{\partial d(r,\omega)}{\partial r_m}J^\varepsilon(r+d(r,\omega)\omega,\omega,E)\\&\quad-\beta_q(r,\omega)\int\limits_0^{d(r,\omega)}\exp\left(\int\limits_{d(r,\omega)}^{t}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)\\&\qquad\times\frac{\partial d(r,\omega)}{\partial r_m}\mu^\varepsilon(r+d(r,\omega)\omega,E)J^\varepsilon(r+t\omega,\omega,E)\,dt;\end{aligned}$$

$$N_5^\varepsilon(r,\omega,E)=\frac{\partial\beta_q(r,\omega)}{\partial r_m}\int\limits_0^{d(r,\omega)}\exp\left(\int\limits_{d(r,\omega)}^{t}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)J^\varepsilon(r+t\omega,\omega,E)\,dt;$$

$$\begin{aligned}N_6^\varepsilon(r,\omega,E)&=\beta_q(r,\omega)\int\limits_0^{d(r,\omega)}\left\{\exp\left(\int\limits_{d(r,\omega)}^{t}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)\right.\\&\qquad\left.\times\int\limits_{d(r,\omega)}^{t}D_m\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha J^\varepsilon(r+t\omega,\omega,E)\right\}dt\\&\quad+\beta_q(r,\omega)\int\limits_0^{d(r,\omega)}\exp\left(\int\limits_{d(r,\omega)}^{t}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)D_mJ^\varepsilon(r+t\omega,\omega,E)\,dt.\end{aligned}$$

Здесь функции $N_4^\varepsilon(r,\omega,E)$ и $N_5^\varepsilon(r,\omega,E)$ вследствие леммы 1.1 непрерывны, ограничены и равномерно сходятся при $(r,\omega,E)\in\overline{V}\times\Omega\times I_0$, $\varepsilon\to 0$, к непрерывным ограниченным функциям $N_4(r,\omega,E)$ и $N_5(r,\omega,E)$, запись которых отличается от $N_4^\varepsilon(r,\omega,E)$ и $N_5^\varepsilon(r,\omega,E)$ лишь отсутствием ε.

В результате (2.9) переписывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial(P_q^\varepsilon(r,\omega,E))}{\partial r_m}&=-\varphi_1(r,\omega,E)-\varphi_2(r,\omega,E)-\varphi_3(r,\omega,E)\\&\quad+\varphi_4(r,\omega,E)-\varphi_5(r,\omega,E)+\varphi_6(r,\omega,E)+N_7^\varepsilon(r,\omega,E).\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\varphi_1(r,\omega,E)&=\beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right)\\&\qquad\times\int\limits_0^{d(r,\omega)}D_m\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha f_q^\varepsilon(r,\omega,E);\end{aligned}$$

$$\varphi_2(r,\omega,E) = \beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)} \mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right) \times \exp\left(-\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right) \times \int\limits_0^{d(r,-\omega)} D_m\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\, h_q(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E);$$

$$\varphi_3(r,\omega,E) = \beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)} \mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right) \times \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\int\limits_0^t \mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right)\int\limits_0^t D_m\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\, J^\varepsilon(r-t\omega,\omega,E)\,dt;$$

$$\varphi_4(r,\omega,E) = \beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)} \mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right) \times \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\int\limits_0^t \mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\,d\nu\right) D_m J^\varepsilon(r-t\omega,\omega,E)\,dt;$$

$$\varphi_5(r,\omega,E) = \beta_q(r,\omega)\int\limits_0^{d(r,\omega)} \left\{\exp\left(-\int\limits_t^{d(r,\omega)} \mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right) \times \int\limits_t^{d(r,\omega)} D_m\mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\, J^\varepsilon(r+t\omega,\omega,E)\right\} dt;$$

$$\varphi_6(r,\omega,E) = \beta_q(r,\omega)\int\limits_0^{d(r,\omega)} \exp\left(-\int\limits_t^{d(r,\omega)} \mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\,d\alpha\right) \times D_m J^\varepsilon(r+t\omega,\omega,E)\,dt;$$

$$N_7^\varepsilon(r,\omega,E) = N_1^\varepsilon(r,\omega,E) + N_2^\varepsilon(r,\omega,E) + N_4^\varepsilon(r,\omega,E) + N_5^\varepsilon(r,\omega,E).$$

Функции $N_7^\varepsilon(r,\omega,E)$ непрерывны, ограничены и равномерно сходятся при $(r,\omega,E)\in\overline{V}\times\Omega\times I_0$, $\varepsilon\to 0$, к непрерывной ограниченной функции $N_7(r,\omega,E) = N_1(r,\omega,E) + N_2(r,\omega,E) + N_4(r,\omega,E) + N_5(r,\omega,E)$.

Теперь проинтегрируем по переменным $E\in[E_1,E_2]$ и $\omega\in\Omega$ частную производную функции $P_q^\varepsilon(r,\omega,E)$:

$$\int\limits_\Omega \int\limits_{E_1}^{E_2} \frac{\partial P_q^\varepsilon(r,\omega,E)}{\partial r_m}\, dEd\omega = \int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_\Omega \frac{\partial P_q^\varepsilon(r,\omega,E)}{\partial r_m}\, d\omega dE = -\int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_\Omega \varphi_1(r,\omega,E)\, d\omega dE$$
$$-\int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_\Omega \varphi_2(r,\omega,E)\, d\omega dE - \int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_\Omega \varphi_3(r,\omega,E)\, d\omega dE + \int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_\Omega \varphi_4(r,\omega,E)\, d\omega dE$$
$$-\int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_\Omega \varphi_5(r,\omega,E)\, d\omega dE + \int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_\Omega \varphi_6(r,\omega,E)\, d\omega dE + \int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_\Omega N_7^\varepsilon(r,\omega,E)\, d\omega dE. \tag{2.10}$$

Рассмотрим слагаемые в правой части равенства (2.10). В первом из них сделаем замену переменных $y = r + \alpha\omega$, тогда

$$\int\limits_\Omega \varphi_1(r,\omega,E)\, d\omega = \int\limits_G \frac{D_m\mu^\varepsilon(y,E)}{|r-y|^2}\Theta_1^\varepsilon(r,y,E)\, dy,$$

$$\Theta_1^\varepsilon(r,y,E) = \beta_q\biggl(r, \frac{y-r}{|y-r|}\biggr) \exp\Biggl(-\int\limits_0^{d(r,\frac{y-r}{|y-r|})} \mu^\varepsilon\biggl(r + \alpha\frac{y-r}{|y-r|}, E\biggr)\, d\alpha\Biggr) \times f_q^\varepsilon\biggl(r, \frac{y-r}{|y-r|}, E\biggr).$$

В третьем слагаемом правой части соотношения (2.10) изменим порядок интегрирования. Обращаясь к подробной записи выражения $\varphi_3(r,\omega,E)$, вместо интегрирования сначала по ν, $0 < \nu < t$, а потом по t, $0 < t < d(r,\omega)$, сначала проинтегрируем по t, $\nu < t < d(r,\omega)$, а затем по ν, $0 < \nu < d(r,\omega)$. Получим

$$\int\limits_\Omega \varphi_3(r,\omega,E)\, d\omega = \int\limits_\Omega \int\limits_0^{d(r,\omega)} D_m\mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)$$
$$\times \int\limits_\nu^{d(r,-\omega)} \Biggl\{ \exp\biggl(-\int\limits_0^t \mu^\varepsilon(r-\nu\omega,E)\, d\nu\biggr)\beta_q(r,\omega)$$
$$\times \exp\Biggl(-\int\limits_0^{d(r,\omega)} \mu^\varepsilon(r+\alpha\omega,E)\, d\alpha\Biggr) J^\varepsilon(r-t\omega,\omega,E)\Biggr\}\, dt d\nu d\omega.$$

Произведя замену переменных $y = r - \nu\omega$, имеем

$$\int\limits_\Omega \varphi_3(r,\omega,E)\, d\omega = \int\limits_G \frac{D_m\mu^\varepsilon(y,E)}{|r-y|^2}\Theta_3^\varepsilon(r,y,E)\, dy,$$

$$\Theta_3^\varepsilon(r,y,E)=\beta_q\biggl(r,\frac{r-y}{|r-y|}\biggr)\exp\Biggl(-\int\limits_0^{d(r,\frac{r-y}{|r-y|})}\mu^\varepsilon\biggl(r+\alpha\frac{r-y}{|r-y|},E\biggr)\,d\alpha\Biggr)$$

$$\times\int\limits_{|r-y|}^{d(r,-\frac{r-y}{|r-y|})}\exp\Biggl(-\int\limits_0^t\mu^\varepsilon\biggl(r-\alpha\frac{r-y}{|r-y|},E\biggr)\,d\alpha\Biggr)J^\varepsilon\biggl(r-t\frac{r-y}{|r-y|},\frac{r-y}{|r-y|},E\biggr)\,dt.$$

Проводя такие же преобразования, получаем, что

$$\int\limits_\Omega\int\limits_{E_1}^{E_2}\frac{\partial P_q^\varepsilon(r,\omega,E)}{\partial r_m}\,dEd\omega=\int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_G\frac{D_m\mu^\varepsilon(y,E)}{|r-y|^2}Q_1^\varepsilon(r,y,E)\,dydE$$

$$+\int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_G\frac{D_mJ^\varepsilon\bigl(y,\frac{y-r}{|y-r|},E\bigr)}{|r-y|^2}Q_2^\varepsilon(r,y,E)\,dydE+\Psi_q^\varepsilon(r),\qquad(2.11)$$

$$Q_1^\varepsilon(r,y,E)=-\beta_q\biggl(r,\frac{y-r}{|y-r|}\biggr)\exp\Biggl(-\int\limits_0^{d(r,\frac{y-r}{|y-r|})}\mu^\varepsilon\biggl(r+\alpha\frac{y-r}{|y-r|},E\biggr)\,d\alpha\Biggr)$$

$$\times f_q^\varepsilon\biggl(r,\frac{y-r}{|y-r|},E\biggr)-\beta_q\biggl(r,\frac{r-y}{|r-y|}\biggr)\exp\Biggl(-\int\limits_0^{d(r,\frac{r-y}{|r-y|})}\mu^\varepsilon\biggl(r+\alpha\frac{r-y}{|r-y|},E\biggr)\,d\alpha\Biggr)$$

$$\times f_q^\varepsilon\biggl(r,\frac{r-y}{|r-y|},E\biggr);$$

$$Q_2^\varepsilon(r,y,E)=\beta_q\biggl(r,\frac{y-r}{|y-r|}\biggr)\exp\Biggl(-\int\limits_0^{d(r,\frac{y-r}{|y-r|})}\mu^\varepsilon\biggl(r+\alpha\frac{y-r}{|y-r|},E\biggr)\,d\alpha\Biggr)$$

$$+\beta_q\biggl(r,\frac{r-y}{|r-y|}\biggr)\exp\Biggl(-\int\limits_0^{d(r,\frac{r-y}{|r-y|})}\mu^\varepsilon\biggl(r+\alpha\frac{r-y}{|r-y|},E\biggr)\,d\alpha\Biggr);$$

$$\Psi_q^\varepsilon(r)=\int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_\Omega N_7^\varepsilon(r,\omega,E)\,d\omega dE.$$

Функции $\Psi_q^\varepsilon(r)$ непрерывны, ограничены и равномерно сходятся в $\overline{V}$ при $\varepsilon\to 0$ к непрерывным ограниченным функциям $\Psi_q(r)$, запись которых отличается от $\Psi_q^\varepsilon(r)$ только отсутствием ε.

Преобразуем первое слагаемое в правой части выражения (2.11), используя вид функции $\mu^\varepsilon(r,E)$:

$$\int\limits_G\frac{D_m\mu^\varepsilon(y,E)}{|r-y|^2}Q_1^\varepsilon(r,y,E)\,dy=\int\limits_G\frac{\sum\limits_{i=1}^pD_m\mu_i^\varepsilon(y,E)}{|r-y|^2}Q_1^\varepsilon(r,y,E)\,dy$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{G} \frac{D_m \mu_i^\varepsilon(y,E)}{|r-y|^2} Q_1^\varepsilon(r,y,E)\,dy = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{G_i^\varepsilon} \frac{D_m \mu_i^\varepsilon(y,E)}{|r-y|^2} Q_1^\varepsilon(r,y,E)\,dy$$

$$= N_9^\varepsilon(r,y,E) + N_{10}^\varepsilon(r,y,E),$$

$$N_9^\varepsilon(r,y,E) = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\Pi_i^\varepsilon} \frac{D_m \mu_i^\varepsilon(y,E)}{|r-y|^2} Q_1^\varepsilon(r,y,E)\,dy,$$

$$N_{10}^\varepsilon(r,y,E) = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{G_i} \frac{D_m \mu_i(y,E)}{|r-y|^2} Q_1^\varepsilon(r,y,E)\,dy.$$

Функции $N_{10}^\varepsilon(r,y,E)$ непрерывны, ограничены и равномерно сходятся при $(r,\omega,E) \in \overline{V} \times \Omega \times I_0$, $\varepsilon \to 0$, к непрерывной ограниченной функции $N_{10}(r,y,E)$, запись которой отличается от $N_{10}^\varepsilon(r,y,E)$ лишь отсутствием ε. В $N_9^\varepsilon(r,y,E)$ рассмотрим элементарное слагаемое. Здесь мы можем воспользоваться формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\Pi_i^\varepsilon} \frac{D_m \mu_i^\varepsilon(y,E)}{|r-y|^2} Q_1^\varepsilon(r,y,E)\,dy$$

$$= \int\limits_{\partial \Pi_i^\varepsilon} \frac{\mu_i^\varepsilon(y,E) Q_1^\varepsilon(r,y,E)(e_m,n_i)}{|r-y|^2}\,d_y\sigma - N_{11}^\varepsilon(r,y,E) - N_{12}^\varepsilon(r,y,E);$$

$$N_{11}^\varepsilon(r,y,E) = \int\limits_{\Pi_i^\varepsilon} \frac{\mu_i^\varepsilon(y,E)}{|r-y|^2} D_m Q_1^\varepsilon(r,y,E)\,dy;$$

$$N_{12}^\varepsilon(r,y,E) = \int\limits_{\Pi_i^\varepsilon} \mu_i^\varepsilon(y,E) Q_1^\varepsilon(r,y,E) \frac{\partial}{\partial y_m} \frac{1}{|r-y|^2}\,dy.$$

Функции $N_{12}^\varepsilon(r,y,E)$ непрерывны, ограничены и равномерно сходятся при $(r,\omega,E) \in \overline{V} \times \Omega \times I_0$, $\varepsilon \to 0$, к нулю, так как подынтегральное выражение ограничено в $\overline{V}$, $|r-y| > \mathrm{const} > 0$, $\mathrm{mes}_3\, \Pi_i^\varepsilon \to 0$. При исследовании $N_{11}^\varepsilon(r,y,E)$ появляются слагаемые вида

$$\int\limits_{\Pi_i^\varepsilon} \int\limits_{0}^{d(r,\frac{y-r}{|y-r|})} D_m \mu^\varepsilon\left(r + \alpha\frac{y-r}{|y-r|}, E\right) d\alpha N_{13}^\varepsilon(r,y,E)\,dy,$$

где $N_{13}^\varepsilon(r,y,E)$ — непрерывные ограниченные функции. Воспользовавшись оценками (2.6) и (2.7), получим сходимость этого выражения к нулю. В результате этих вычислений имеем

$$\frac{\partial}{\partial r_m} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{E_1}^{E_2} P_q^\varepsilon(r,\omega,E)\,dE d\omega = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\partial G_i} \frac{(n_i(y),e_m)}{|r-y|^2} R_i^\varepsilon(r,y,E)\,d_y\sigma dE + \Psi_q(r),$$

где функции $R_i^\varepsilon(r,y,E)$ при $(r,\omega,E) \in \overline{V} \times \Omega \times I_0$, $\varepsilon \to 0$, равномерно сходятся к $R_i(r,y,E)$.

В силу произвольности V функции $\Psi_q(r)$ непрерывны в G_0 и могут быть неограниченными только вблизи поверхности ∂G.

Таким образом, непрерывные функции $v^{(\varepsilon)}(r)$ при $\varepsilon \to 0$ стремятся к $v(r)$ равномерно по $r \in \overline{V}$. Для любого $m = 1,2,3$ непрерывные производные

$D_m v^{(\varepsilon)}(r)$ равномерно в $\overline{V}$ стремятся к $D_m v(r)$ при $\varepsilon \to 0$. Также для всех $r \in G_0$ имеет место равенство, указанное в формулировке леммы.

Лемма 2.1 доказана.

§ 3. Основные утверждения

Пусть $r \in G_l$, z — контактная точка, $z \in \partial G_l \cap \partial G_j$, $r = z + \tau n_l$, $\quad 0 < |\tau| < \delta_1$, причем δ_1 настолько малое, что $\rho(r, \partial G_0) = |r - z|$. Из предположений, введенных в § 2, следует, что существует достаточно малое δ такое, что поверхность $G_{l,z} = G_l \cap C_\delta(z) = G_{j,z}$ может быть представлена графиком гладкой функции

$$G_{l,z} = \bigl\{\bar{\zeta} : \bar{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \vartheta),\ \zeta_1^2 + \zeta_2^2 \le \delta^2,\ \vartheta = \varphi(\zeta_1, \zeta_2)\bigr\}. \tag{3.1}$$

Далее в этом параграфе числа δ и δ_1 будут использоваться в указанном смысле.

Введем следующие обозначения:

$$mv_q(r, \omega, E) = \beta_q(r, \omega) \exp\left(- \int\limits_0^{d(r,\omega)} \mu(r + \alpha\omega, E)\, d\alpha \right) \\ \times \{-[\mu(z, E)]_{l,j} f_q(r, \omega, E) + [J(z, \omega, E)]_{l,j}\}, \tag{3.2}$$

$$m_q^0\left(r, \frac{y - r}{|y - r|}, E\right) = mv_q\left(r, \frac{r - y}{|r - y|}, E\right) + mv_q\left(r, \frac{y - r}{|y - r|}, E\right), \quad q = 1, \dots, K.$$

Рассмотрим выражение

$$I_q(r) = \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\partial G_{l,z}} \frac{m_q^0\bigl(r, \frac{y - r}{|y - r|}, E\bigr)}{|r - y|^2}\, d_y\sigma dE.$$

Пусть Ω_z — пересечение единичной сферы в $\mathbb{E}^3$ с центром в точке z и плоскости, касательной к ∂G_l в этой же точке. Элементы окружности Ω_z в локальной системе координат, связанной с точкой z, будем обозначать через $s = (s_1, s_2, 0)$, $s_1^2 + s_2^2 = 1$. Тогда любая точка $y \in \partial G_{l,z}$ может быть представлена в виде $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(ts)$, $\bar{\zeta}(ts) = (ts_1, ts_2, \varphi(ts_1, ts_2))$, $0 \le t \le \delta$.

Лемма 3.1. *Существует функция $t_q(r)$, $|t_q(r)| \le \delta$, такая, что*

$$I_q(r) = \mathscr{M}_q(r, t_q(r)) |\ln(\rho(r, \partial G_0))| + O(1),$$

где

$$\mathscr{M}_q(r, t) = \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\Omega_z} m_q^0\left(r, \frac{\bar{\zeta}(ts) - r}{|\bar{\zeta}(ts) - r|}, E\right) ds dE, \tag{3.3}$$

$O(1)$ — функция, непрерывная и ограниченная при $0 < |\tau| < \delta_1$, $\rho(r, \partial G_0)$ — расстояние от точки r до поверхности G_0.

Доказательство. Используя представление (3.1), интеграл $I_q(r)$ можно записать в виде

$$I_q(r) = \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \le \delta^2} \frac{m_q^0\bigl(r, \frac{\bar{\zeta} - r}{|\bar{\zeta} - r|}, E\bigr)}{|r - \bar{\zeta}|^2} \bigl(1 + D_1\varphi(\zeta_1, \zeta_2)^2 + D_2\varphi(\zeta_1, \zeta_2)^2\bigr)^{1/2} d\zeta_1 d\zeta_2 dE.$$

Представим $I_q(r)$ в виде $I_q(r) = A_1(r) + A_2(r)$, где

$$A_1(r) = \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\zeta_1^2+\zeta_2^2\le\delta^2} \frac{m_q^0\big(r, \frac{\bar\zeta - r}{|\bar\zeta - r|}, E\big)}{|r-\bar\zeta|^2}\, d\zeta_1 d\zeta_2 dE,$$

$$A_2(r) = \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\zeta_1^2+\zeta_2^2\le\delta^2} \frac{m_q^0\big(r, \frac{\bar\zeta - r}{|\bar\zeta - r|}, E\big)}{|r-\bar\zeta|^2} \times \big\{\big(1 + D_1\varphi(\zeta_1,\zeta_2)^2 + D_2\varphi(\zeta_1,\zeta_2)^2\big)^{1/2} - 1\big\}\, d\zeta_1 d\zeta_2 dE.$$

Легко видеть, что

$$(1 + D_1\varphi(\zeta_1,\zeta_2)^2 + D_2\varphi(\zeta_1,\zeta_2)^2)^{1/2} - 1 = \frac{D_1\varphi(\zeta_1,\zeta_2)^2 + D_2\varphi(\zeta_1,\zeta_2)^2}{(1 + D_1\varphi(\zeta_1,\zeta_2)^2 + D_2\varphi(\zeta_1,\zeta_2)^2)^{1/2} + 1}.$$

В силу предположений на функцию φ, введенных в § 2, правая часть последнего неравенства не превосходит $\mathrm{const}\cdot\big(\zeta_1^2+\zeta_2^2\big)$. Отсюда и из неравенства $|r-\bar\zeta|^{-2}\big(\zeta_1^2+\zeta_2^2\big) \le 1$ следует, что $|A_2(r)| \le \mathrm{const}$. Поэтому $I_q(r) = A_1(r) + O(1)$.

Для вычислений интеграла $A_1(r)$ произведем замену переменных $(\zeta_1,\zeta_2) = (ts_1, ts_2)$, $0 \le t \le \delta$, $s_1^2 + s_2^2 = 1$, $d\zeta_1 d\zeta_2 = t\, ds dt$, в результате получим

$$A_1(r) = \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_0^\delta \int\limits_{\Omega_z} m_q^0\bigg(r, \frac{\bar\zeta(ts) - r}{|\bar\zeta(ts) - r|}, E\bigg) \frac{t\, ds dt}{t^2 + (\vartheta-\tau)^2}\, dE,$$

где $\vartheta = \varphi(\zeta_1,\zeta_2)$, $\bar\zeta(ts) = (ts_1, ts_2, \varphi(ts_1, ts_2))$. Сделаем следующее преобразование:

$$\frac{1}{t^2+(\vartheta-\tau)^2} - \frac{1}{t^2+\tau^2} = \frac{2\vartheta\tau}{(t^2+(\vartheta-\tau)^2)(t^2+\tau^2)} - \frac{\vartheta^2}{(t^2+(\vartheta-\tau)^2)(t^2+\tau^2)}.$$

Так как $|\vartheta| \le \mathrm{const}\cdot t^2$, то

$$\frac{|2\vartheta\tau|}{(t^2+(\vartheta-\tau)^2)(t^2+\tau^2)} \le \frac{\mathrm{const}\cdot t^2}{t^2+(\vartheta-\tau)^2}\cdot\frac{|\tau|}{t^2+\tau^2} \le \frac{\mathrm{const}}{(t^2+\tau^2)^{1/2}},$$

$$\frac{\vartheta^2}{(t^2+(\vartheta-\tau)^2)(t^2+\tau^2)} \le \frac{\mathrm{const}\cdot t^4}{(t^2+(\vartheta-\tau)^2)(t^2+\tau^2)} \le \mathrm{const}\,.$$

Следовательно,

$$\bigg|\frac{1}{t^2+(\vartheta-\tau)^2} - \frac{1}{t^2+\tau^2}\bigg| \le \frac{\mathrm{const}}{(t^2+\tau^2)^{1/2}}. \tag{3.4}$$

Представим $A_1(r)$ в виде $A_1(r) = A_3(r) + A_4(r)$, где

$$A_3(r) = \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_0^\delta \int\limits_{\Omega_z} m_q^0\bigg(r, \frac{\bar\zeta(ts) - r}{|\bar\zeta(ts) - r|}, E\bigg) \frac{t}{t^2+\tau^2}\, ds dt dE,$$

$$A_4(r) = \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_0^\delta \int\limits_{\Omega_z} m_q^0\bigg(r, \frac{\bar\zeta(ts) - r}{|\bar\zeta(ts) - r|}, E\bigg) t\bigg(\frac{1}{t^2+(\vartheta-\tau)^2} - \frac{1}{t^2+\tau^2}\bigg)\, ds dt dE.$$

В силу оценки (3.4) подынтегральное выражение в $A_4(r)$ ограничено, поэтому $|A_4(r)| \le \mathrm{const}$, следовательно, $I_q(r) = A_3(r) + O(1)$.

Осталось вычислить интеграл $A_3(r)$. Используя обозначение (3.3) для $\mathscr{M}_q(r,t)$, имеем

$$A_3(r) = \int\limits_0^\delta \frac{t}{t^2+\tau^2} \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\Omega_z} m_q^0\left(r, \frac{\bar{\zeta}(ts)-r}{|\bar{\zeta}(ts)-r|}, E\right) ds dE dt = \int\limits_0^\delta \frac{t}{t^2+\tau^2} \mathscr{M}_q(r,t)\, dt.$$

Так как при фиксированном r функция $\mathscr{M}_q(r,t)$ непрерывна по t, $0 \le t \le \delta$, по интегральной теореме о среднем для каждого r существует число $t_q(r)$, $0 \le t_q(r) \le \delta$, такое, что

$$A_3(r) = \mathscr{M}_q(r,t_q(r)) \int\limits_0^\delta \frac{t}{t^2+\tau^2}\, dt = \mathscr{M}_q(r,t_q(r)) \left\{\frac{1}{2}\ln(\delta^2+\tau^2) - \frac{1}{2}\ln(\tau^2)\right\}$$

$$= \mathscr{M}_q(r,t_q(r))|\ln|\tau|| + O(1).$$

Ввиду равенств $|\tau| = |r-z| = \rho(r,\partial G_0)$ и $I_q(r) = A_3(r) + O(1)$ лемма 3.1 доказана.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой контактной точки z, $z \in \partial G_l \cap \partial G_j$, и для $r = z + \tau n_l$, $0 < |\tau| \le \delta_1$ (δ_1 — достаточно малое число), функция $\mathrm{Ind}(r)$, определенная в (2.5), представима в виде*

$$\mathrm{Ind}(r) = \widetilde{\mathscr{M}}(r)|\ln(\rho(r,\partial G_0))| + O(1),$$

здесь

$$\widetilde{\mathscr{M}}(r) = \sum_{q=1}^{K} |\mathscr{M}_q(r,t_q(r))|. \tag{3.5}$$

Доказательство. Для указанных r и z из леммы 2.1 следует, что

$$\frac{\partial}{\partial r_m} \int\limits_\Omega \int\limits_{E_1}^{E_2} P_q(r,\omega,E)\, dE d\omega = \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\partial G_l} \frac{(n_l(z),e_m)}{|r-y|^2} R_l(r,y,E)\, d_y\sigma dE$$

$$+ \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\partial G_j} \frac{(n_j(z),e_m)}{|r-y|^2} R_j(r,y,E)\, d_y\sigma dE + \Psi_q(r) + O(1)$$

$$= \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\partial G_{l,z}} \frac{(n_l(z),e_m)}{|r-y|^2} R_l(r,y,E)\, d_y\sigma dE$$

$$+ \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\partial G_{j,z}} \frac{(n_j(z),e_m)}{|r-y|^2} R_j(r,y,E)\, d_y\sigma dE + \Psi_q(r) + O(1),$$

здесь $\partial G_{j,z} = \partial G_j \cap C_\delta(z)$, $\partial G_{l,z} = \partial G_l \cap C_\delta(z)$, $\Psi_q(r)$ — непрерывная в G_0 функция, которая может быть неограниченной только вблизи поверхности ∂G, $O(1)$ — ограниченная и непрерывная в G_0 функция.

Воспользуемся видом функции $R_j(r,y,E)$ и условием Липшица для функций μ и J для рассматриваемых r, y, z: $|R_l(r,y,E) - R_l(z,y,E)| < \mathrm{const}\,|r-z|$.

Продолжая последнее равенство, имеем

$$\frac{\partial}{\partial r_m}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{E_1}^{E_2} P_q(r,\omega,E)\,dEd\omega$$

$$=\int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_{\partial G_{l,z}}\frac{(n_l(z),e_m)}{|r-y|^2}(R_l(r,y,E)-R_j(r,y,E))\,d_y\sigma dE+\Psi_q(r)+O(1)$$

$$=\int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_{\partial G_{l,z}}\frac{(n_l(z),e_m)}{|r-y|^2}\Bigg(\beta_q\bigg(r,\frac{y-r}{|y-r|}\bigg)\exp\Bigg(-\int\limits_0^{d(r,\frac{y-r}{|y-r|})}\mu\bigg(r+\alpha\frac{y-r}{|y-r|},E\bigg)\,d\alpha\Bigg)$$

$$\times\bigg\{-[\mu(z,E)]_{l,j}f_q\bigg(r,\frac{y-r}{|y-r|},E\bigg)+\bigg[J\bigg(z,\frac{y-r}{|y-r|},E\bigg)\bigg]_{l,j}\bigg\}$$

$$+\beta_q\bigg(r,\frac{r-y}{|r-y|}\bigg)\exp\Bigg(-\int\limits_0^{d(r,\frac{r-y}{|r-y|})}\mu\bigg(r+\alpha\frac{r-y}{|r-y|},E\bigg)\,d\alpha\Bigg)$$

$$\times\bigg\{-[\mu(z,E)]_{l,j}f_q\bigg(r,\frac{r-y}{|r-y|},E\bigg)+\bigg[J\bigg(z,\frac{r-y}{|r-y|},E\bigg)\bigg]_{l,j}\bigg\}\Bigg)\,d_y\sigma dE+\Psi_q(r)+O(1).$$

Применяя обозначение (3.2) для mv_q, получаем

$$\frac{\partial}{\partial r_m}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{E_1}^{E_2} P_q(r,\omega,E)\,dEd\omega$$

$$=(n_l(z),e_m)\int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_{\partial G_{l,z}}\frac{mv_q\big(r,\frac{r-y}{|r-y|},E\big)+mv_q\big(r,\frac{y-r}{|y-r|},E\big)}{|r-y|^2}\,d_y\sigma dE+\Psi_q(r)+O(1),$$

тогда m-я компонента градиента двойного интеграла функции $P_q(r,\omega,E)$, $m=1,2,3$, имеет вид

$$\Bigg(\nabla\int\limits_{\Omega}\int\limits_{E_1}^{E_2} P_q(r,\omega,E)\,dEd\omega\Bigg)_m$$

$$=(n_l(z),e_m)\int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_{\partial G_{l,z}}\frac{m_q^0\big(r,\frac{r-y}{|r-y|},E\big)}{|r-y|^2}\,d_y\sigma dE+\Psi_q(r)+O(1).$$

Воспользуемся следующей леммой [1].

Лемма 3.2. *Пусть в G_0 заданы непрерывные вектор-функции $A(r)$ и $B(r)$, принимающие значения в $\mathbb{E}^3$. Тогда*

$$|A(r)+B(r)|=|A(r)|+\sigma(r),\quad r\in G_0,$$

причем $|\sigma(r)|\le|B(r)|$. В том случае, когда $|B(r)|\le\mathrm{const}$,

$$|A(r)+B(r)|=|A(r)|+O(1),\quad r\in G_0,$$

где $O(1)$ — непрерывная и ограниченная функция при $r\in G_0$.

Обозначим $A_q(r) = \big(A_q^1(r), A_q^2(r), A_q^3(r)\big)$, $B_q(r) = \big(B_q^1(r), B_q^2(r), B_q^3(r)\big)$, где $A_q^m(r) = (n_l(z), e_m) \int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\partial G_{l,z}} \frac{m_q^0\left(r, \frac{r-y}{|r-y|}, E\right)}{|r-y|^2}\, d_y\sigma dE$, $B_q^m(r) = \Psi_q(r) + O(1)$, $m = 1,2,3$. Каждая из функций $B_q^m(r)$ ограничена в G_0 везде, кроме, может быть, окрестности поверхности ∂G. Применяя лемму 3.2, получаем

$$\left|\nabla \int\limits_{\Omega} \int\limits_{E_1}^{E_2} P_q(r,\omega,E)\, dEd\omega\right| = |A_q(r) + B_q(r)|$$

$$= \left|\int\limits_{E_1}^{E_2} \int\limits_{\partial G_{l,z}} \frac{m_q^0\left(r, \frac{r-y}{|r-y|}, E\right)}{|r-y|^2}\, d_y\sigma dE\right| + O(1) = |I_q(r)| + O(1).$$

Воспользуемся леммой 3.1, тогда

$$\operatorname{Ind}(r) = \sum_{q=1}^{K} (|I_q(r)| + O(1)) = \sum_{q=1}^{K} |\mathscr{M}_q(r, t_q(r)) \cdot |\ln(\rho(r, \partial G_0))|| + O(1)$$

$$= |\ln(\rho(r,\partial G_0))| \sum_{q=1}^{K} |\mathscr{M}_q(r, t_q(r))| + O(1) = \widetilde{\mathscr{M}}(r) |\ln(\rho(r, \partial G_0))| + O(1).$$

Теорема доказана.

Следствием леммы 2.1 и теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Функция* $\operatorname{Ind}(r)$ *является непрерывной и ограниченной на всяком компакте в* G_0. *Пусть* z — *произвольная контактная точка. Рассмотрим точки* $r = z + \tau n(z)$, $0 < |\tau| \le \delta_1$, *где* $n(z)$ — *какой-либо вектор единичной нормали к* G_0 *в точке* z, δ_1 — *достаточно малое положительное число. Если выполнено неравенство* $\widetilde{\mathscr{M}}(r) \ge \text{const} > 0$, *то* $\operatorname{Ind}(r)$ *стремится к бесконечности при* $r \to \partial G_0$, *т. е. при* $\tau \to 0$.

Таким образом, функция $\operatorname{Ind}(r)$ может быть неограниченной только вблизи искомой поверхности ∂G_0. Это свойство служит основанием того, что функция $\operatorname{Ind}(r)$ называется *индикатором неоднородности среды* G.

Далее сформулируем теорему единственности. Для этого введем следующие обозначения. Пусть имеются по две системы подобластей $\big\{G_j^{(k)}\big\}$, $j = 1,\dots,p$, функции $\mu^{(k)}(r,E)$, $J^{(k)}(r,\omega,E)$ и $\tilde{h}_q^{(k)}(r,\omega,E)$, $k = 1,2$, $q = 1,\dots,K$. Подставляя в равенство (1.3) $\mu^{(k)}(r,E)$ вместо $\mu(r,E)$, $J^{(k)}(r,\omega,E)$ вместо $J(r,\omega,E)$, $\tilde{h}_q^{(k)}(r,\omega,E)$ вместо $\tilde{h}_q(r,\omega,E)$, получим функции $f_q^{(k)}(r,\omega,E)$, $k = 1,2$, $q = 1,\dots,K$. Подставим эти функции в (2.3) и найдем $H_q^{(k)}(\eta,\omega)$ и $\widetilde{H}_q^{(k)}(r,\omega)$, $k = 1,2$, $q = 1,\dots,K$. Так же получаем $\widetilde{\mathscr{M}}^{(k)}(r)$, $k = 1,2$, применяя (3.5).

Теорема 3. *Пусть функции* $\widetilde{H}^{(1)}(r,\omega)$ *и* $\widetilde{H}^{(2)}(r,\omega)$ *совпадают при всех* $(r,\omega) \in G \times \Omega$. *Тогда контактные точки* $z \in \partial G_0^{(k)}$, $k = 1,2$, *для которых* $\widetilde{\mathscr{M}}^{(k)}(r) \ge \text{const} > 0$ $(r = z + \tau n(z),\ 0 < |\tau| \le \delta_1)$, *являются общими для поверхностей* $\partial G_0^{(1)}$ *и* $\partial G_0^{(2)}$.

Доказательство. Равенство $\widetilde{H}^{(1)}(r,\omega) = \widetilde{H}^{(2)}(r,\omega)$ влечет равенство функций $S_q^{(1)}(r,\omega)$ и $S_q^{(2)}(r,\omega)$, $(r,\omega) \in G \times \Omega$, где $S_q^{(1)}(r,\omega) = \beta_q(r,\omega)\widetilde{H}_q^{(1)}(r,\omega)$, $S_q^{(2)}(r,\omega) = \beta_q(r,\omega)\widetilde{H}_q^{(2)}(r,\omega)$; $\beta_q(r,\omega)$ — произвольные пока вспомогательные функции, введенные в § 2. Отсюда получаем совпадение индикаторов $\mathrm{Ind}_1(r)$ и $\mathrm{Ind}_2(r)$, определяемых по формуле (2.5), если на место функции $S_q(r,\omega)$ подставить $S_q^{(1)}(r,\omega)$ и $S_q^{(2)}(r,\omega)$ соответственно.

Теперь возьмем произвольную контактную точку $z \in \partial G_0^{(1)}$, $z \in \partial G_{j_1}^{(1)} \cap \partial G_{l_1}^{(1)}$, и докажем, что $z \in \partial G_0^{(2)}$. Предположим противное, т. е. $z \notin \partial G_0^{(2)}$. Тогда существует окрестность $V(z)$ точки z, не содержащая точек из $\partial G_0^{(2)}$, т. е. $\overline{V}(z) \subset G_0^{(2)}$. Обозначим через $\delta^{(1)}$ число для $\partial G_0^{(1)}$, аналогичное числу δ для ∂G_0, как об этом сказано в § 2 перед леммой 2.1. Уменьшая, если нужно, число $\delta^{(1)}$, можно добиться включения точек $r = z + \tau n_{j_1}$, $0 < \tau < \delta^{(1)}$, в окрестность $V(z)$. Но при этом $r \notin \partial G_0^{(2)}$. Более того, расстояние между всеми такими точками r и поверхностью $\partial G_0^{(2)}$ больше некоторого положительного числа. Ввиду того, что $r \in G_0^{(2)}$, $r \in G_0^{(1)}$, для r определены оба индикатора $\mathrm{Ind}_1(r)$ и $\mathrm{Ind}_2(r)$. Однако их поведение различно. Согласно теореме 2 функция $\mathrm{Ind}_2(r)$ ограничена при $r = z + \tau n_{j_1}$, $0 < \tau < \delta^{(1)}$. При этом, так как $\widetilde{\mathscr{M}}^{(1)}(r) \geq \mathrm{const} > 0$, имеем $\mathrm{Ind}_1(r) \to \infty$ при $r \to z$. Поэтому функции $\mathrm{Ind}_1(r)$ и $\mathrm{Ind}_2(r)$ не могут совпадать при всех $r = z + \tau n_{j_1}$, $0 < \tau < \delta^{(1)}$. Полученное противоречие доказывает, что $r \in \partial G_0^{(2)}$, т. е. всякая контактная точка поверхности $\partial G_0^{(1)}$ есть также точка из $\partial G_0^{(2)}$. По симметрии рассуждений всякая контактная точка поверхности $\partial G_0^{(2)}$ есть также точка из $\partial G_0^{(1)}$. Таким образом, контактные точки $z \in \partial G_0^{(k)}$, $k = 1, 2$, для которых $\widetilde{\mathscr{M}}^{(k)}(r) \geq \mathrm{const} > 0$, являются общими для поверхностей $\partial G_0^{(1)}$ и $\partial G_0^{(2)}$.

Теорема 3 доказана.

Следствием этой теоремы является теорема единственности решения обратной задачи.

Теорема единственности. *Если в условиях теоремы* 3 *потребовать выполнения неравенств* $\widetilde{\mathscr{M}}^{(k)}(r) \geq \mathrm{const} > 0$, *для всех контактных точек* z *поверхностей* $\partial G_0^{(1)}$ *и* $\partial G_0^{(2)}$, $r = z + \tau n(z)$, $0 < |\tau| \leq \delta_1$, *то* $\partial G_0^{(1)} = \partial G_0^{(2)}$.

Доказательство. Согласно теореме 3 контактные точки $z \in \partial G_0^{(k)} \setminus \partial G$, $k = 1, 2$, для которых $\widetilde{\mathscr{M}}^{(k)}(r) \geq \mathrm{const} > 0$, являются общими для поверхностей $\partial G_0^{(1)} \setminus \partial G$ и $\partial G_0^{(2)} \setminus \partial G$.

Так как любая точка поверхности $\partial G_0^{(1)} \setminus \partial G$ является предельной для своих контактных точек, верно включение $\partial G_0^{(1)} \setminus \partial G \subset \partial G_0^{(2)} \setminus \partial G$ или $\partial G_0^{(1)} \subset \partial G_0^{(2)}$. По симметрии рассуждений можно утверждать также, что $\partial G_0^{(2)} \subset \partial G_0^{(1)}$, т. е. $\partial G_0^{(1)} = \partial G_0^{(2)}$.

Замечание 1. Выполнение условия $\widetilde{\mathscr{M}}(r) \geq \mathrm{const} > 0$ гарантирует наличие скачков, т. е. разрыва функций $\mu(r,E)$ или $J(r,\omega,E)$ в этой точке. Предположим противное: пусть $[\mu(z,E)]_{l,j} = 0$ и $[J(z,\omega,E)]_{l,j} = 0$, тогда из вида (3.5) функции $\widetilde{\mathscr{M}}$ следует, что она равна нулю. Случай, когда имеют место разрывы функций $\mu(r,E)$ или $J(r,\omega,E)$ ($[\mu(z,E)]_{l,j} \neq 0$, $[J(z,\omega,E)]_{l,j} \neq 0$, $r = z + \tau n_l$, $0 < |\tau| < \delta$), но при этом $\widetilde{\mathscr{M}}(r) \to 0$ ($\tau \to 0$), очень специфичен. Он означает наличие особой связи между параметрами задачи и вряд ли будет выполняться в широком классе случаев.

Замечание 2. Нетрудно указать достаточное условие, гарантирующее неравенство $\widetilde{\mathscr{M}}(r) \geq \text{const} > 0$. Обратимся к равенствам (3.2), где r — точки, близкие к контактной точке z, $r = z + \tau n(z)$, $0 < |\tau| \leq \delta_1$. Во-первых, заметим, что все $f_q(r, \omega, E)$ неотрицательны. Сделаем естественное предположение: $f_q(r, \omega, E) \geq \text{const} > 0$ хотя бы для одного q, $1 \leq q \leq K$, что соответствует проникновению зондирующего излучения в окрестность точки z. Тогда если скачки $[\mu(z, E)]_{l,j}$, $[J(z, \omega, E)]_{l,j}$ имеют разные знаки и $\beta_q(r, \omega) > 0$, то условие $\widetilde{\mathscr{M}}(r) \geq \text{const} > 0$ выполняется. При отсутствии внутренних источников, т. е. при $J(r, \omega, E) = 0$, ситуация упрощается. Тогда достаточно только условия $[\mu(z, E)]_{l,j} \neq 0$, что соответствует наличию разрыва функции $\mu(r, E)$ в точке $r = z$.

Замечание 3. В этой работе функциям $\beta_q(r, \omega)$ предназначена роль резерва. Их можно было бы использовать, например, для учета априорной информации, если таковая имеется. Кроме того, при построении численного алгоритма, когда искомые поверхности находятся по аномально большим значениям индикатора, можно положить $\beta_q(r, \omega) = 0$, $r \in \partial G$, чтобы аннулировать особенности $\mathrm{Ind}(r)$ вблизи поверхности ∂G, которая и так известна из постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров Н. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
2. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИАН СССР. 1961. № 61. С. 3–158.
3. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
4. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
5. *Левин Г. Г., Старостенко О. В.* О возможности томографических исследований рассеивающих сред // Линейные и нелинейные задачи вычислительной томографии. Новосибирск, 1985. С. 86–99.
6. *Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.* Вычислительная томография и физический эксперимент // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, № 3. С. 469–498.
7. *Романов В. Г.* Задача о совместном определении коэффициента ослабления и индикатрисы рассеяния // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 1. С. 29–31.
8. *Султангазин У. Н., Иркегулов И. Ш.* О некоторых обратных задачах атмосферной оптики // Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1984. С. 143–149.
9. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.
11. *Шарафутдинов В. А.* Обратная задача определения источника в стационарном уравнении переноса // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 5. С. 604–606.
12. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
13. *Марчук Г. И.* О постановке некоторых обратных задач // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, № 3. С. 503–506.
14. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 2 ноября 2011 г.

Аниконов Дмитрий Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
anik@math.nsc.ru

Балакина Екатерина Юрьевна
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
issc2009@gmail.com