Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 514.116.3:514.764.227+517.984+517.58

ЗОНАЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА КРОСПАХ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

В. Н. Берестовский

Аннотация. Простым методом найдены единые формулы для собственных значений лапласиана и зональных сферических функций на всех односвязных КРОСПах. Используются тригонометрические формулы сферической геометрии, расслоения Хопфа и результаты о спектрах лапласиана на тотальном пространстве и базе римановой субмерсии с вполне геодезическими слоями. Найдены прямые связи полученных зональных сферических функций со специальными функциями: гипергеометрическими конечными рядами Гаусса, полиномами Якоби и ортогональными многочленами, в том числе с ультрасферическими многочленами Гегенбауэра, частными случаями которых являются многочлены Лежандра и многочлены Чебышёва первого и второго родов. Указаны связи с соответствующими результатами Хелгасона и Берже с соавторами. Приведены краткие сведения о методе вычисления спектров лапласиана на компактных односвязных неприводимых симметрических римановых пространствах и полученные на их основе спектры лапласиана на КРОСПах.

Ключевые слова: КРОСП, расслоение Хопфа, риманова субмерсия, тригонометрические формулы сферической геометрии, собственные значения лапласиана, зональные сферические функции, гипергеометрические функции, полиномы Якоби, весовые функции, ортогональные многочлены, ультрасферические многочлены, многочлены Гегенбауэра, многочлены Лежандра, многочлены Чебышёва.

Посвящается 100-летию со дня рождения
академика Александра Даниловича Александрова,
автора выдающихся работ по геометрии и
дифференциальным уравнениям

Введение

Оператор Лапласа — Бельтрами $\Delta f = (\mathrm{div} \circ \mathrm{grad}) f$ [1] определен для любой дважды непрерывно дифференцируемой вещественной или комплексной функции f на компактном связном гладком (класса C^∞) римановом многообразии (M, g) (в [2–4] оператор Δ берется с обратным знаком). Если $\Delta f = \lambda f$, где λ — постоянная, то $\lambda \in \mathbb{R}$ и $f \in C^\infty(M)$, т. е. f бесконечно дифференцируема [2, 5]. Спектр $\mathrm{Spec}(M, g)$ для гладких вещественных (или комплексных) функций на (M, g) — набор всех собственных значений λ оператора Δ и их кратностей $m(\lambda)$, т. е. размерностей пространств U_λ всех собственных функций оператора Δ с собственным значением λ. Спектры для вещественных и комплексных

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке проекта «Квазиконформный анализ и геометрические аспекты теории операторов», Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00081–а), РФФИ–БРФФИ (код проекта 10–01–90000–Бел–а), а также Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–6613.2010.1).

© 2012 Берестовский В. Н.

функций совпадают. Известно, что $\mathrm{Spec}(M, g)$ вещественный, неположительный, дискретный и каждое его собственное значение имеет конечную кратность, гармонические функции постоянны [2, 5].

Доказывается, что для каждой точки $x \in M$ любого КРОСПа (компактного риманова симметрического пространства ранга один) (M, g) и каждого числа $\lambda \in \mathrm{Spec}(M, g)$ существует единственная *зональная сферическая функция* $f \in U_\lambda$ *с центром в* x, т. е. такая, что $f(y) = g(t = \rho(x, y))$, где $t = \rho(x, y)$ — расстояние между точками x, y, g — некоторая вещественная функция, и $|f(y)| \leq f(x) = 1$. В случае КРОСПов, отличных от сфер, вместо g используется обозначение h. Далее применяются известные формулы сферической тригонометрии и теорема 2 о связи спектров лапласиана (компактного) тотального пространства и базы римановой субмерсии с вполне геодезическими слоями. На их основе доказывается, что функция $g(t)$ и получаемая из нее заменой переменной (7) функция $p(x)$ (соответственно $h(t)$ и получаемая из нее заменой переменной (20) функция $q(x)$) являются собственными функциями обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка в левой части о.д.у. (6) и (8) (соответственно (19) и (21)) с собственным значением λ. Это позволяет вычислить в теоремах 4 и 5 все собственные значения лапласиана для всех односвязных КРОСПов (M, g), являющихся евклидовыми сферами или базами расслоений Хопфа.

Те же собственные значения лапласиана приведены в таблице п. 8.8 книги [2] со ссылкой на [3, с. 160–173], где утверждения доказаны полностью только для сфер и комплексных проективных пространств. Утверждения для всех случаев можно установить также на основе предложения G.V.3 из [3, с. 135–137] и выражений для объемов сфер в КРОСПах через их радиусы [3, с. 111–113]. Об этом более подробно сказано ниже при доказательстве утверждения из замечания 1 о том, что формулы из теоремы 5 применимы и для единственного КРОСПа, не являющегося евклидовой сферой или базой расслоения Хопфа, — плоскости Кэли $CaP^2 = F_4/\mathrm{Spin}(9)$. Это доказательство включает формулы (25), (26), (28) и (29).

Устанавливается связь зональных сферических функций на КРОСПах, точнее, упомянутых выше функций $p(x)$ и $q(x)$, со специальными, в том числе гипергеометрическими, функциями и ортогональными многочленами [6–8].

Вычисление спектра лапласиана КРОСПов (для вещественных гладких функций) не является целью данной работы. Для этого остается вычислить размерности всех упомянутых собственных пространств U_λ лапласиана, соответствующих его собственным значениям λ. Автору не известно, можно ли вычислить эти размерности, используя методы данной статьи.

Автору известен лишь один метод вычисления спектра лапласиана для гладких функций на КРОСПах и, более обще, компактных односвязных неприводимых римановых симметрических пространствах. Ясное и достаточно детальное изложение этого метода превысило бы допустимый объем статьи. Поэтому автор мог сказать здесь о нем лишь кратко (в разд. 5, в особенности в теореме 8). С более детальным изложением метода читатель может ознакомиться в [4]. На основе этого метода можно вычислить кратности всех собственных значений и тем самым спектр лапласиана на КРОСПах (теорема 9).

Таким образом, в данной статье весьма простым и, насколько известно автору, новым методом получены полные доказательства сформулированных в ней (известных) результатов. Случай КРОСПов, отличных от плоскости Кэли, требует лишь классических формул сферической тригонометрии и расслоений Хопфа, а в случае плоскости Кэли достаточно использовать упомянутые выше результаты из [3]. В то же время одно лишь применение метода из предыдущего абзаца, не говоря о полном доказательстве всех необходимых для него результатов, несопоставимо сложно по сравнению с использованными здесь методами, хотя и позволяет вычислить спектр лапласиана на КРОСПах (но не другие полученные здесь результаты).

Автор благодарит В. М. Гичева и Ю. Г. Никонорова за полезные обсуждения.

1. Предварительные сведения и результаты

Далее нужны следующие теоремы, сформулированные или доказанные в [3, 5].

Теорема 1. *Пространство $L^2_{\mathbb{R}}(M,g)$ вещественных суммируемых с квадратом функций на компактном римановом C^∞-многообразии (M,g) является прямой ортогональной суммой пространств U_λ конечной размерности $m(\lambda)$. При этом каждое пространство U_λ инвариантно относительно преобразований $f \to s \circ f$, где s — произвольная изометрия пространства (M,g), а $(s \circ f)(x) = f(s^{-1}(x))$, $x \in M$.*

Теорема 2. *Пусть $(M,g),(N,h)$ — компактные римановы C^∞-многообразия, $p:(M,g)\to(N,h)$ — риманова субмерсия с вполне геодезическими слоями $p^{-1}(n)$, $n \in N$, и $\Delta_N f = \lambda f$ для $f \in C^\infty(N)$. Тогда $\phi := f \circ p \in C^\infty(M)$ и $\Delta_M \phi = \lambda\phi$. Следовательно, $\operatorname{Spec}(N,h) \subset \operatorname{Spec}(M,g)$. При этом собственные функции лапласиана Δ_N, отвечающие собственному значению λ, находятся во взаимно однозначном соответствии с собственными функциями лапласиана Δ_M, отвечающими собственному значению λ и постоянными на каждом слое субмерсии p.*

Лемма 1. *Пусть (M,g) — компактное риманово C^∞-многообразие, ϕ — ненулевая функция в U_λ и $|\phi(y)| \le |\phi(x)|$ для некоторой точки $x \in M$ и всех $y \in M$, H — стабилизатор группы Ли всех изометрий пространства (M,g) в точке x. Тогда существует H-инвариантная функция $f \in U_\lambda$ такая, что $|f(y)| \le f(x) = 1$ для всех $y \in M$.*

Доказательство. Умножая функцию ϕ на -1, если необходимо, можно считать, что $|\phi(x)| = \phi(x) > 0$. Группа H — компактная группа Ли. H-инвариантность функции $f \in L^2_{\mathbb{R}}(M,g)$ означает ее инвариантность относительно левого регулярного представления $l(H)$ в $L^2_{\mathbb{R}}(M,g)$, где $l(h)f(y) := f(h^{-1}y)$, $y \in M$. Применяя вероятностную меру Хаара — Лебега dh на H, определим новую функцию f на M формулой

$$f(y) = \frac{1}{\phi(x)} \int\limits_H \phi(h^{-1}y)\,dh.$$

Из конечномерности и $l(H)$-инвариантности пространства U_λ (теорема 1) и построения функции f следуют ее нужные свойства.

Теорема 3. *Для каждой точки x КРОСПа (M,g) и каждого числа $\lambda \in \operatorname{Spec}(M,g)$ существует единственная зональная сферическая функция $f \in U_\lambda$ с центром в x, т. е. такая, что*

$$|f(y)| \le f(x) = 1 \quad \text{для всех } y \in M, \quad f(y) = g(\rho(x,y)), \tag{1}$$

где $\rho(x, y)$ — расстояние между точками x, y и g — некоторая вещественная функция.

Доказательство. Возьмем произвольную ненулевую функцию $\phi \in U_\lambda$. Вследствие последнего утверждения теоремы 1 можно считать, что она удовлетворяет условию леммы 1 для заданной точки x. Пусть f — соответствующая функция, построенная в лемме 1. Последнее условие в (1) следует из H-инвариантности функции f и транзитивности H на всех сферах с центром в точке x [2]. Единственность f будет доказана в следствии 1.

2. Зональные сферические функции на КРОСПах

Сначала рассмотрим зональные сферические функции $f : S^n \to \mathbb{R}$ на единичных сферах S^n (теорема 3). Существует единственное (непрерывное) продолжение функции g на $\mathbb{R}$, которое также будем обозначать через g, такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$

(1) $g(t + 2\pi) = g(t)$;

(2) $g(-t) = g(t)$;

(3) $|g(t)| \leq g(0) = 1$.

Так как функция f вещественно аналитическая на S^n, на самом деле функция $g(t)$ тоже вещественно аналитическая. Тогда из свойства (3) получаем начальные условия

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0. \tag{2}$$

Легко видеть, что для произвольной параметризованной длиной дуги геодезической $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, на S^n, где $\gamma(0) = z$ и z играет роль точки x из теоремы 3, выполняется тождество

$$f(\gamma(t)) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Поскольку свойства (1) и (2) выполнены для функций $g(t)$, $\cos t$, $t \in \mathbb{R}$, корректно определена функция

$$\psi(t, s) = g(\cos^{-1}(\cos t \cdot \cos s)), \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Пусть $y = \gamma(t)$, где $0 < t < \pi$ и λ — собственное значение оператора Δ для f. Тогда вследствие теоремы косинусов в прямоугольном сферическом треугольнике должно выполняться дифференциальное уравнение

$$\Delta f(\gamma(t)) = g''(t) + (n-1)\psi''_{ss}(t, 0) = \lambda g(t). \tag{5}$$

На основании (4) получаем, опуская вычисления для второй производной, что

$$\psi'_s(t, s) = g'(\cos^{-1}(\cos t \cdot \cos s)) \frac{\sin s \cdot \cos t}{\sin(\cos^{-1}(\cos t \cdot \cos s))},$$

$$\psi''_{ss}(t, 0) = g'(t) \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Подставляя последнее выражение в (5), получаем о.д.у. для функции g:

$$g''(t) + (n-1)\frac{\cos t}{\sin t} g'(t) = \lambda g(t), \quad 0 < t < \pi. \tag{6}$$

Далее будет удобно предположение, что $\gamma(0) = (1, 0, \dots, 0) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда $x = \cos t$ — первая координата точки $\gamma(t)$ и $-1 \leq x \leq 1$. Так как функция $g(t)$ четная, ее можно выразить в виде

$$g(t) = p(x) = p(\cos t). \tag{7}$$

Ясно, что $p(x)$ вещественно аналитическая при $-1 < x < 1$. При этих значениях

$$g'(t) = -\sin t p'(x), \quad (n-1)\frac{\cos t}{\sin t} g'(t) = -(n-1)xp'(x),$$

$$g''(t) = -\cos t p'(x) + p''(x)\sin^2 t = -\cos t p'(x) + p''(x)(1-\cos^2 t)$$
$$= -xp'(x) + (1-x^2)p''(x).$$

Следовательно, о.д.у. (6) эквивалентны линейному о.д.у.

$$(1-x^2)p''(x) - nxp'(x) = \lambda p(x). \tag{8}$$

В некоторой окрестности $x_0 = 0$ функция $p(x)$ представима суммой своего ряда Тейлора и допускает почленное дифференцирование. Естественно понимать такой ряд как (возможно, бесконечномерный) вектор, составленный из его коэффициентов. Тогда действие линейного дифференциального оператора $\mathfrak{L}$ в левой части о.д.у. (8) на ряды будет линейным отображением, определяемым бесконечной матрицей. Легко видеть, что эта матрица является верхней треугольной с последовательными элементами $\lambda = \lambda(k) = -k(k+n-1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, на главной диагонали и последовательными элементами $(k+1)(k+2)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, на второй побочной диагонали, все остальные элементы нулевые. На основании (8) ряд $p(x)$ (точнее, набор его коэффициентов) должен быть собственным вектором линейного отображения $\mathfrak{L}$ с собственным значением λ, равным одному из чисел $\lambda(k) = -k(k+n-1)$. Вследствие сказанного нетрудно доказать, что найдется ненулевой полином $p_{k,n}(x)$ степени k, являющийся решением уравнения (8) при $\lambda = -k(k+n-1)$. Так как собственные значения оператора $\mathfrak{L}$ попарно различны, $p(x)$ пропорционально $p_{k,n}(x)$ и можно считать, что $p(x) = p_{k,n}(x)$. Вследствие (2), (7) и (8) должны выполняться начальные условия

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = -\frac{\lambda}{n}. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что первое начальное условие в (9), эквивалентное равенству $\sum\limits_{l=0}^{k} a_l = 0$ для коэффициентов полинома $p_{k,n}(x)$, определяет его единственным образом, при этом второе начальное условие в (9) будет выполняться автоматически. Также нетрудно установить, что $p_{k,n}(x)$ не содержит четных (соответственно нечетных) степеней, если k нечетно (соответственно четно).

Теорема 4. *Все собственные числа лапласиана на S^n имеют вид*

$$\lambda = \lambda(k) = -k(k+n-1), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть λ — некоторое собственное значение оператора Δ на S^n. Вследствие теоремы 3 каждому (конечномерному) собственному подпространству U_λ соответствует зональная сферическая функция $f = f_\lambda \in U_\lambda$ на S^n. В силу сказанного в начале этого раздела f будет определяться соотношением (1), где $g(t)$ — некоторая вещественная функция с условиями (1)–(3). Выше доказано, что существует $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $\lambda = -k(k+n-1)$, $g(t) = p_{k,n}(\cos t)$ и для многочлена $p(x) = p_{k,n}(x)$ выполнены соотношения (8) и (9) для $\lambda = -k(k+n-1)$. Обратно, если $\lambda(k) = -k(k+n-1)$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$, то функция $g(t) = p_{k,n}(\cos t)$ является решением о.д.у. (6) с начальными данными (2). Тогда $f : S^n \to \mathbb{R}$, определенная формулой (1), будет собственной функцией лапласиана с собственным значением $\lambda(k)$.

Как известно, все остальные КРОСПы, кроме $CaP^2 = F_4/\operatorname{Spin}(9)$, можно получить как базы расслоений Хопфа, являющихся римановыми субмерсиями с вполне геодезическими слоями, причем тотальными пространствами и слоями расслоений являются сферы соответствующей размерности. Соответствующие расслоения имеют вид

$$Pr : S^{2l+1} \to \mathbb{C}P^l = SU(l+1)/U(1) \cdot SU(l),$$
$$Pr : S^{4l+3} \to \mathbb{H}P^l = Sp(l+1)/Sp(1) \times Sp(l),$$
$$Pr : S^{15} \to CaP^1.$$

Слои расслоений изометричны соответственно S^1, S^3, S^7, а все геодезические баз изометричны $S^1(1/2) := S(0, 1/2) \subset \mathbb{R}^2$.

Будет удобно для всех односвязных КРОСПов (M, g), кроме сфер, ввести другие обозначения для функций f, g из (1); будем их обозначать соответственно через u, h. Вследствие сказанного

$$u(y) = h(\rho(x, y)), \tag{11}$$

где $0 \leq \rho(x, y) \leq \pi/2$ — расстояние на (M, g). Существует единственное (непрерывное) продолжение функции h на $\mathbb{R}$, которое также будем обозначать через h, такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$

(а) $h(t + \pi) = h(t)$;

(б) $h(-t) = h(t)$;

(в) $|h(t)| \leq h(0) = 1$.

Легко видеть, что тогда для произвольной параметризованной длиной дуги геодезической $\Gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, на (M, g), где $\Gamma(0) = w$ и w играет роль точки x из теоремы 3, выполняется тождество

$$u(\Gamma(t)) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Так как функция h вещественно аналитическая, из свойства (в) получаем начальные условия

$$h(0) = 1, \quad h'(0) = 0. \tag{13}$$

Далее рассматриваются пространства (M, g), являющиеся базами расслоений Хопфа; пространство CaP^2 рассмотрим отдельно. Пусть $Pr(z) = w$ для $z \in S^d$, где S^d — соответствующая сфера. Тогда для каждой параметризованной длиной дуги геодезической $\Gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (M, g) с условием $\Gamma(0) = w$ существует единственная параметризованная длиной дуги горизонтальная геодезическая $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в S^d такая, что $\gamma(0) = z$ и

$$Pr(\gamma(t)) = \Gamma(t), \quad Pr(\gamma(t + \pi)) = Pr(\gamma(t)), \quad t \in \mathbb{R}; \tag{14}$$

последнее равенство имеет место потому, что длина замкнутой геодезической в (M, g) равна π.

Пусть u — произвольная зональная сферическая функция на (M, g) с собственным значением $\lambda(u)$ лапласиана. Так как Pr — риманова субмерсия с вполне геодезическими слоями, вследствие теоремы 2

$$\Delta(u) \circ Pr = \Delta(u \circ Pr) = \Delta(v) = \lambda(u) u \circ Pr = \lambda(u) v \tag{15}$$

и $v = u \circ Pr$ является собственной функций оператора Лапласа на S^d с собственным значением $\lambda(u)$. В силу выбора точек z, w и уравнений (12), (14) для всех таких горизонтальных геодезических γ справедливо равенство

$$v(\gamma(t)) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Нетрудно понять, что функция v определяется равенством

$$v(y) = h(\rho(y, Pr^{-1}(x))), \tag{17}$$

где ρ — расстояние на S^d. Вследствие этого можно найти о.д.у. для $h = h(t)$, не переходя к пространству (M, g).

Все геодезические вида $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, описанные выше, заполняют вполне геодезическую сферу $S^{d-m}(z) \subset S^d$, где m — размерность слоя субмерсии Pr, ортогональную сфере $S^m(z) = Pr^{-1}(x)$. Если y — произвольная точка из $S^{d-m}(z)$ с условием $\rho(y,z) < \pi/2$, то из (17) следует, что $v(y) = h(\rho(y,z))$. Пусть дана точка $\gamma(t)$, $0 < t < \pi/2$. Обозначим через $S^m(\gamma(t))$ вполне геодезическую сферу в S^d, проходящую через точку $\gamma(t)$ и ортогональную сфере $S^{d-m}(z)$ в точке $\gamma(t)$. В отличие от сферы $S^m(z)$ сфера $S^m(\gamma(t))$ не является слоем субмерсии Pr. Выберем параметризованные длиной дуги геодезические $\gamma_1(s), \dots, \gamma_d(s)$, $s \in \mathbb{R}$, в S^d с началом $\gamma(t)$ таким образом, чтобы $\gamma_1(s) = \gamma(t+s)$, $\gamma_i(s) \in S^{d-m}(z)$, $s \in \mathbb{R}$, для всех $i = 2, \dots, d-m$ и $\gamma_i(s) \in S^m(\gamma(t))$, $s \in \mathbb{R}$, для всех $i = d-m+1, \dots, d$, а касательные векторы к ним в точке $\gamma(t)$ попарно ортогональны. Тогда для s, достаточно близких к нулю,

$$v(\gamma_i(s)) = \psi(t,s), \quad i = 2, \dots, d-m,$$

где функция $\psi(t,s)$ рассматривалась ранее, а

$$v(\gamma_i(s)) = \theta(t,s) = \rho(\gamma_i(s), S^m(z)), \quad i = d-m+1, \dots, d.$$

Легко понять, что для каждого $i = d-m+1, \dots, d$ расстояние $\rho(\gamma_i(s), S^m(z))$ равно $\rho(\gamma_i(s), z')$, где $S^2(\gamma(t))$ — вполне геодезическая 2-сфера, содержащая геодезические $\gamma(t)$, $\gamma_i(s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, а z' — некоторая точка на пересечении $S^m(z) \cap S^2(\gamma(t))$. В результате получаем сферический четырехугольник $zz'y'y$, где $y = \gamma(t)$, $y' = \gamma_i(s)$ с прямыми углами при вершинах y, z, z' и сторонами $\rho(z,y) = t$, $\rho(z,z') = s$. Нужно вычислить расстояние $r = \rho(y', z')$. Введем расстояния $c = \rho(z, y')$ и углы α и β при вершине z в треугольниках yzy' и $y'zz'$ соответственно. По теореме косинусов

$$\cos c = \cos t \cos s, \quad \sin^2 c = 1 - \cos^2 t \cos^2 s.$$

По теореме синусов для треугольника yzy'

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 s}{1 - \cos^2 t \cos^2 s} = \frac{1 - \cos^2 s}{1 - \cos^2 t \cos^2 s},$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 s \sin^2 t}{1 - \cos^2 t \cos^2 s}.$$

По теореме синусов для треугольника $z'zy'$

$$\sin^2 r = \sin^2 c \sin^2 \beta = \sin^2 t \cos^2 s, \quad \sin r = \sin t \cos s.$$

Таким образом,

$$\theta(t,s) = h(\arcsin(\sin t \cos s)). \tag{18}$$

Теперь

$$\theta'_s(t,s) = h'(\arcsin(\sin t \cos s)) \frac{-\sin s \sin t}{\cos(\arcsin(\sin t \cos s))}$$
$$= h'(\arcsin(\sin t \cos s)) \frac{-\sin s \sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t \cos^2 s}},$$

$$\theta''_{ss}(t,0) = h'(\arcsin(\cos 0 \sin t))\frac{-\cos 0 \sin t\sqrt{1-\sin^2 t\cos^2 0}}{1-\sin^2 t\cos^2 0}$$
$$= -h'(t)\frac{\sin t}{\cos t} = \theta''_{ss}(t,0).$$

Вследствие вычислений выше и формулы (16) получаем, что

$$\Delta(v)(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{d}\frac{d^2v(\gamma_i(s))}{ds^2}(0) = h''(t) + (d-1-m)\psi''_{ss}(t,0) + m\theta''_{ss}(t,0)$$
$$= h''(t) + \left[(d-1-m)\frac{\cos t}{\sin t} - m\frac{\sin t}{\cos t}\right]h'(t) = \lambda h(t).$$

Левую часть последней выделенной строки можно переписать в виде

$$h''(t) + \left[(d-1-2m)\frac{\cos t}{\sin t} + m\left(\frac{\cos t}{\sin t} - \frac{\sin t}{\cos t}\right)\right]h'(t)$$
$$= h''(t) + \left[(d-1-2m)\frac{\cos t}{\sin t} + m\left(\frac{2\cos^2 t - 1}{\sin t\cos t}\right)\right]h'(t)$$
$$= h''(t) + \left[(d-1)\frac{\cos t}{\sin t} - \frac{m}{\sin t\cos t}\right]h'(t).$$

В результате получаем о.д.у.

$$h''(t) + \left[(d-1)\frac{\cos t}{\sin t} - \frac{2m}{\sin 2t}\right]h'(t) = \lambda h(t). \tag{19}$$

С учетом свойств (а), (б) функцию $h(t)$ можно представить в виде

$$h(t) = q(x) = q(\cos t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

где $q(x) = h(\arccos x)$ определена при $x \in [-1,1]$ и вещественно аналитична в интервале $(-1,1)$. Ясно, что (19) можно переписать в виде следующего о.д.у. для q:

$$q''(x)(1-x^2) - \left(dx - \frac{m}{x}\right)q'(x) = \lambda q(x). \tag{21}$$

В некоторой окрестности $x_0 = 0$ функция $q(x)$ представима суммой своего ряда Тейлора и допускает почленное дифференцирование. Левая часть имеет смысл лишь в том случае, когда $q'(0) = 0$. Для функций с таким условием естественно понимать левую часть в (21) как результат действия линейного оператора $\mathfrak{L}_1$ на вектор, составленный из коэффициентов ряда. Тогда оператор $\mathfrak{L}_1$ определяется бесконечной матрицей, эта матрица верхняя треугольная с последовательными элементами $\lambda(k) = -k(k+d-1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, на главной диагонали, последовательными элементами $(k+2)(k+1+m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, на второй побочной диагонали, все остальные элементы нулевые. Как и ранее для сфер, $q(x)$ должно быть полиномом $q_j(x)$ степени j от x. Вследствие условия (а) и равенства (20) $q_j(x)$ не содержит x в нечетной степени. Тогда j должно быть четным, т. е. $j = 2k$. При этом $\lambda = -2k(2k+d-1)$ и соответствующие начальные условия (13) для q перепишутся в виде

$$q_{2k}(1) = 1, \quad q'_{2k}(1) = \frac{2k(2k+d-1)}{d-m}, \tag{22}$$

причем второе условие будет выполняться автоматически. Перечисленными условиями и матрицей оператора $\mathfrak{L}_1$ многочлен $q_{2k}(x)$, а вместе с ним h и v, u определяются однозначно. Обратно, если j — произвольное число вида $j = 2k$,

$k \in \mathbb{Z}_+$, то вследствие указанных выше свойств матрицы оператора $\mathfrak{L}_1$ существует единственный полином $q_{2k}(x)$ с указанными выше условиями. Тогда формулы (20), (11), (17) определяют вещественно аналитические функции u и v на (M,g) и S^d соответственно, $v = u \circ Pr$ и вследствие данного выше вывода для $\Delta(v)$ и формулы (15) построенная функция u на (M,g) является собственной функцией оператора Лапласа с собственным значением $\lambda(u) = -2k(2k+d-1)$. Таким образом, доказана

Теорема 5. *Для каждого* КРОСПа (*вещественной*) *размерности* n, *кроме* S^n, *все собственные числа лапласиана имеют вид*

$$\lambda = \lambda(k) = -2k(2k+n-1+m), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{23}$$

где $m = 1,3,7$ *соответственно для* $\mathbb{C}P^r$, $\mathbb{H}P^r$, CaP^l, $r \in \mathbb{N}$, $l = 1,2$.

Замечание 1. Удивительно, что, как будет обосновано ниже, уравнения (21), (22) и утверждение теоремы 5 справедливы и для CaP^l при $n = 16$, $m = 7$, $l = 2$, хотя расслоения Хопфа вида $Pr : S^{23} \to CaP^2$ со слоем S^7 не существует! Отметим, что $\mathbb{C}P^1 = S(0,1/2) \subset \mathbb{R}^3$, $P^1 = S(0,1/2) \subset \mathbb{R}^5$, $CaP^1 = S(0,1/2) \subset \mathbb{R}^9$, где знак равенства означает изометрию. Формула (23) для этих пространств соответствует ранее полученным собственным значениям лапласиана для S^2, S^4, S^8 (с учетом подобия).

Заметим, что наборы собственных значений лапласианов (без учета их кратности) одни и те же у $\mathbb{C}P^{2l+1}$ и $\mathbb{H}P^l$. Это связано (но не следует) с тем фактом, что существует риманова субмерсия $\mathbb{C}P^{2l+1} \to \mathbb{H}P^l$, слоями которой являются изометрично вложенные вполне геодезические 2-сферы диаметра π. Поэтому $Sp(\mathbb{H}P^l) \subset Sp(\mathbb{C}P^{2l+1})$, причем включение строгое, так как пространства имеют разные размерности (это можно увидеть непосредственно из формул теоремы 9), хотя наборы собственных значений лапласианов совпадают. Совершенно аналогичная ситуация возникает при рассмотрении естественно возникающих последовательностей римановых субмерсий с вполне геодезическими слоями

$$\mathbb{C}P^7 \to \mathbb{H}P^3 \to CaP^1,$$

в каждой из которых все три пространства имеют одинаковые наборы собственных значений лапласиана.

Дадим обоснование замечанию 1, воспользовавшись некоторыми результатами из [3].

Пусть (M,η) — компактное n-мерное риманово многообразие, w — фиксированная точка в M и $r = r(w) > 0$ — радиус инъективности пространства (M,η) в точке w. Если $\rho(y,w) < r$, то определим

$$\omega_w(y) = \frac{\mu_{\exp_w^* \eta}}{\mu_{\eta_w}}\big(\exp_w^{-1}(y)\big) \tag{24}$$

как отношение канонической меры, соответствующей римановой метрике $\exp_w^* \eta$ на $T_w M$ (обратному образу метрики η при отображении $\exp_w$), к лебеговой мере евклидовой структуры η_w на пространстве $T_w M$. Заметим, что если (M,η) — КРОСП, то $r = \operatorname{diam}(M,\eta)$ и $\omega_w(y)$ зависит только от $\rho(y,w)$; более точно,

$$\omega_w(y) = \frac{\operatorname{Vol}(S(t))}{\sigma_{n-1} t^{n-1}}, \quad t = \rho(w,y). \tag{25}$$

Здесь $\operatorname{Vol}(S(t))$ и σ_{n-1} обозначают соответственно объем сферы радиуса t в

(M, η) и объем сферы радиуса 1 в $\mathbb{R}^n$. Известно, что

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \tag{26}$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Она имеет простые полюсы во всех точках $z = 0, -1, -2, \dots$ и удовлетворяет соотношениям

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{27}$$

Если функция u определяется соотношением (11), то вследствие формулы 6.22 в [2] или предложения G.V.3 в [3]

$$\Delta u(y) = h''(t) + h'(t)\left(\frac{n-1}{t} + \frac{\omega'_w}{\omega_w}(y)\right), \quad t = \rho(y, w). \tag{28}$$

Здесь ω'_w обозначает радиальную производную функции ω_w. Заметим, что предложение G.V.3 доказано в [3], но в первой строке его формулировки ошибочно пропущен слева знак Δ.

Вследствие формул в [3, с. 111–113] для всех КРОСПов, являющихся базами расслоений Хопфа, справедливы равенства

$$\omega_w(y) = \left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^m \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-1-m} = \frac{\sin^{n-1} t \cos^m t}{t^{n-1}}, \quad t = \rho(y, w), \tag{29}$$

где m — размерность слоя, а n — (вещественная) размерность многообразия. Эти же равенства справедливы и для CaP^2 при $m = 7$, $n = 16$ [3, с. 113] и для всех сфер S^n при $m = 0$ (и замене w на x). Прямое вычисление на основе формул (28) и (29) еще раз показывает, что для всех КРОСПов (для CaP^2 при $d = 23$, $m = 7$) соответствующая функция $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет о.д.у. (19). Используя проведенные выше рассуждения, убеждаемся в справедливости замечания 1.

3. Связь с ортогональными многочленами

Из формул (25), (26) и (29) следует

Предложение 1. *Для каждого* КРОСПа (*вещественной*) *размерности* n

$$\operatorname{Vol}(S(t)) = \sigma_{n-1} \sin^{n-1} t \cos^m t, \tag{30}$$

где $m = 0, 1, 3, 7$ *для* S^n, $\mathbb{C}P^r$, $\mathbb{H}P^r$, CaP^l *соответственно*, $r \in \mathbb{N}$, $l = 1, 2$.

Теорема 6. *Функции* $p_{k,n}(x)$, $p_{s,n}(x)$ (*соответственно* $q_{2k,n,m}(x)$, $q_{2s,n,m}(x)$) *ортогональны на* $[-1, 1]$ (*соответственно на* $[0, 1]$) *при* $k \neq s$ *относительно веса* $w(x) = (1 - x^2)^{\alpha - 1/2} x^m$, *где* n — *размерность многообразия,* $\alpha = \frac{n-1}{2}$ *и* $m = 0, 1, 3, 7$ *соответственно для* S^n, $\mathbb{C}P^r$, $\mathbb{H}P^r$, CaP^l, $r \in \mathbb{N}$, $l = 1, 2$.

Доказательство. Если функция u на КРОСПе $(M, g) \neq S^n$ определяется формулами (11) и (20), то $dx = -\sin t\, dt$ и

$$\int_M u\, dv = \int_0^{\pi/2} h(t) \operatorname{Vol} S(t)\, dt = \sigma_{n-1} \int_0^{\pi/2} h(t) \sin^{n-1} t \cos^m t\, dt$$
$$= \sigma_{n-1} \int_0^1 q(x)(1 - x^2)^{\alpha - 1/2} x^m\, dx.$$

Так как при $k \neq s$ функции $q_{2k,n,m}(x)$, $q_{2s,n,m}(x)$ отвечают собственным функциям оператора Δ на (M, g) с собственными значениями $-2k(2k+n-1+m) \neq -2s(2s+n-1+m)$ (теорема 5) и потому ортогональным элементам в $L^2(M,g)$ (теорема 1), то $q_{2k,n,m}(x), q_{2s,n,m}(x)$ ортогональны на $[0,1]$ при $k \neq s$ относительно веса $w(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}x^m$. Совершенно аналогично доказательство для функций $p_{k,n}(x), p_{s,n}(x)$.

Следствие 1. *Многочлены $p(x) = p_{k,n}(x)$ и $q(x) = q_{2k,n,m}(x)$, а следовательно, и зональные сферические функции (из каждого пространства U_λ) на всех односвязных* КРОСПа*х определяются однозначно.*

Доказательство. В принципе единственность многочленов $p(x) = p_{k,n}(x)$ и $q(x) = q_{2k,n,m}(x)$ была установлена ранее. Но это следует и из теоремы 6 и первых равенств в (9) и (22), так как $p_{k,n}(x)$ имеют точную степень k, а $q_{2k,n,m}(x)$ — точную степень k от x^2. Оставшееся утверждение вытекает из теорем 4, 5 и пар равенств (3), (7) и (12), (20).

4. Связь со специальными функциями

Покажем, что некоторые естественные замены переменной x преобразуют многочлены $p_{k,n}(x)$ и $q_{2k,n,m}(x)$ в специальные случаи гипергеометрических функций [6], более точно, гипергеометрических конечных рядов Гаусса.

По определению *гипергеометрическим* [6, 8] называется ряд

$$F(a,b,c;z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+\nu-1)}{1\cdot 2\dots\nu}\frac{b(b+1)\dots(b+\nu-1)}{c(c+1)\dots(c+\nu-1)}z^\nu, \tag{31}$$

зависящий от (вещественных) параметров a, b, c и сходящийся при $|z| < 1$. Ряд (31) теряет смысл, когда c равно целому неположительному числу и ни одно из чисел a, b не равно отрицательному целому числу, меньшему c. Заметим, что $F(a,b,c;z) = F(b,a,c;z)$ и $F(a,b,c;z)$ является многочленом степени $-a$, если a — неположительное целое число. Ряд (31) является решением (обыкновенного) *гипергеометрического дифференциального уравнения Гаусса* [6]

$$z(1-z)F''(z) + (c-(a+b+1)z)F'(z) - abF(z) = 0. \tag{32}$$

Теорема 7. *Многочлены $p_{k,n}(x)$, $q_{2k,n,m}(x)$ можно представить в виде*

$$p(x) = p_{k,n}(x) = F\left(-k, n-1+k, \frac{n}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \tag{33}$$

$$q(x) = q_{2k,n,m}(x) = F\left(-k, k+\frac{n-1+m}{2}, \frac{n}{2}; 1-x^2\right). \tag{34}$$

Доказательство. Известно, что $\cos t = 1 - 2\sin^2(t/2)$. Полагая $z = \sin^2(t/2)$, получаем, что подстановка $x = \cos t = 1-2z$ дает некоторое равенство $p(x) = F(z)$. Легко находим, что

$$p'(x) = -\frac{1}{2}F'(z), \quad p''(x) = \frac{1}{4}F''(z), \quad (1-x^2) = 4z(1-z), \quad nx = n(1-2z).$$

Тогда при $\lambda = -k(k+n-1)$ о.д.у. (8) для $p(x) = p_{k,n}(x)$ преобразуется в о.д.у.

$$z(1-z)F''(z) + \left(\frac{n}{2} - nz\right)F'(z) + k(k+n-1)F(z) = 0.$$

Вводя параметры

$$a = -k, \quad b = n-1+k, \quad c = \frac{n}{2}, \tag{35}$$

видим, что $F(z)$ является решением о.д.у. (32). На основании следствия 1 и соотношений (9), (35), (32), (31) получаем равенство (33).

Зная, что $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$, и полагая $z = \sin^2 t$, выводим, что подстановка $x = \cos t = \sqrt{1-z}$ дает некоторое равенство $q(x) = F(z)$. Легко находим, что

$$z = 1 - x^2, \quad q'(x) = -2F'(z)x, \quad q''(x) = 4F''(z)(1-z) - 2F'(z).$$

Тогда при $\lambda = -2k(2k+n-1+m)$ о.д.у. (21) для $q(x) = q_{k,n,m}(x)$ преобразуется в о.д.у.

$$4z(1-z)F''(z) - 2F'(z) + 2d(1-z)F'(z) - 2mF'(z) + 2k(k+n-1+m)F(z) = 0$$

или

$$z(1-z)F''(z) + \left(\frac{n}{2} - \frac{(n+m+1)z}{2}\right)F'(z) + \frac{1}{2}k(2k+n-1+m)F(z) = 0.$$

Вводя параметры

$$a = -k, \quad b = k + \frac{n-1+m}{2}, \quad c = \frac{n}{2}, \tag{36}$$

видим, что $F(z)$ является решением о.д.у (32). На основании следствия 1 и соотношений (22), (36), (32), (31) получаем равенство (34).

Замечание 2. В теореме 4.5 из [9, гл. V] дано единое выражение (26) функций $g_{k,n}(t)$ и $h_{k,n,m}(t)$ через гипергеометрические функции от $z = \cos^2(t/2)$ и $z = \cos^2 t$. Сравнение формул (26) из [9] и (34) показывает, что должно быть

$$m_\beta = m, \quad m_{\beta/2} = \frac{n-1-m}{2}.$$

Хелгасон [9] называет получающиеся при подстановках $z = (1-x)/2$ и $z = 1-x^2$ многочлены от x *полиномами Якоби.* Для $p_{k,n}(x)$ верна формула (40). Но в [6–8] полиномов Якоби, пропорциональных $q_{2k,n,m}(x)$, нет.

Установим некоторые свойства многочленов $p_{k,n}(x)$ и их связь с другими специальными функциями.

Дифференцируя о.д.у. (8), получаем, что

$$(-2x)p''_{k,n}(x) + (1-x^2)p'''_{k,n}(x) - np'_{k,n}(x) - nxp''_{k,n}(x) = -k(k+n-1)p'_{k,n}(x)$$

или

$$(1-x^2)p'''_{k,n}(x) - (n+2)xp''_{k,n}(x) = -(k-1)[(k-1)+(n+2)-1]p'_{k,n}(x). \tag{37}$$

Из уравнений (9) и (37) следует, что

$$p'_{k,n}(1) = [k(k+n-1)]/n, \quad p'_{k,n}(x) = [k(k+n-1)/n]p_{(k-1),(n+2)}(x). \tag{38}$$

По формулам (3) в [6, с. 177] и из первой формулы (16) в [7, с. 172] имеем

$$C_k^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(k+2\alpha)}{k!\Gamma(2\alpha)}F\left(-k, k+2\alpha, \alpha+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \tag{39}$$

$$P_k^{(\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2})}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+k+(1/2))}{k!\Gamma(\alpha+(1/2))}F\left(-k, k+2\alpha, \alpha+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \tag{40}$$

где $\alpha = (n-1)/2 > 0$, $P_k^{(\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2})}(x)$ — многочлены Якоби и $C_k^{\alpha}(x)$ — многочлены Гегенбауэра или ультрасферические многочлены. Вследствие (33) эти многочлены пропорциональны $p_{k,n}(x)$ с теми же коэффициентами.

Из формул (27), (39) и (38) следует (см. также формулу (4) в [10, с. 454]), что

$$\frac{d}{dx} C_k^\alpha(x) = 2\alpha C_{k-1}^{\alpha+1}(x). \tag{41}$$

В формуле (11) на с. 455 в [10] дано следующее рекуррентное соотношение:

$$(2\alpha + k) C_k^\alpha(x) = 2\alpha \big[C_k^{\alpha+1}(x) - x C_{k-1}^{\alpha+1} \big]. \tag{42}$$

Есть и другое рекуррентное соотношение

$$C_k^\alpha(x) = \frac{1}{k} \big[2x(k+\alpha-1) C_{k-1}^\alpha(x) - (k+2\alpha-2) C_{k-2}^\alpha(x) \big],$$

явная формула

$$C_k^\alpha(x) = \sum_{l=0}^{[k/2]} (-1)^l \frac{\Gamma(k-l+\alpha)}{\Gamma(\alpha) l! (k-2l)!} (2x)^{k-2l}$$

и формула Родрига

$$C_k^\alpha(x) = \frac{(-2)^k}{k!} \frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(k+2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2k+2\alpha)} (1-x^2)^{-\alpha+1/2} \frac{d^k}{dx^k} [(1-x^2)^{k+\alpha-1/2}].$$

Вследствие о.д.у. (8) для $p(x) = p_{k,n}(x)$ при $\lambda = -k(k+n-1)$ получаем, что

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} [p_{k,n}(x)]^2 (1-x^2)^{\alpha-1/2}\, dx \\ &\quad = \frac{1}{k(k+2\alpha)} \Bigg[(2\alpha+1) \int_{-1}^{1} p_{k,n}(x) p'_{k,n}(x) x (1-x^2)^{\alpha-1/2}\, dx \\ &\qquad - \int_{-1}^{1} p_{k,n}(x) p''_{k,n}(x) (1-x^2)^{\alpha+1/2} dx \Bigg]. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям последнего интеграла в предыдущей формуле дает два интеграла, один из которых сократится с предыдущим интегралом, а второй будет равен

$$\frac{1}{k(k+2\alpha)} \int_{-1}^{1} [p'_{k,n}(x)]^2 (1-x^2)^{\alpha+1/2}\, dx.$$

С учетом равенства (38) заменой $k-1$ на k получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} [p_{k,(n+2)}(x)]^2 (1-x^2)^{\alpha+1/2}\, dx \\ &\quad = \frac{(2\alpha+1)^2}{(k+1)(k+2\alpha+1)} \int_{-1}^{1} [p_{(k+1),n}(x)]^2 (1-x^2)^{\alpha-1/2}\, dx. \end{aligned}$$

При $n = 1$ имеем $p_{k,1}(\cos t) = \cos kt$ и

$$\int_{-1}^{1} [p_{k,1}(x)]^2 (1-x^2)^{-1/2}\, dx = \int_{0}^{\pi} \cos^2 kt\, dt$$
$$= \frac{1}{k}\int_{0}^{k\pi} \cos^2 u du = \frac{1}{2k}\int_{0}^{2k\pi} \frac{1+\cos v}{2}\, dv = \frac{\pi}{2}.$$

При $n = 2$ известно равенство $\int_{-1}^{1} p_{k,2}^2(x)\, dx = \frac{2}{2k+1}$ (см. [11, с. 118]). Вследствие формулы (17) в [6, с. 179]

$$\int_{-1}^{1} \left[C_k^{\alpha}(x)\right]^2 (1-x^2)^{\alpha-1/2}\, dx = \frac{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(k+2\alpha)}{k!(k+\alpha)[\Gamma(\alpha)]^2}.$$

В случае $n = 1$ получаем, что $g_{k,1}(t) = \cos kt = p_{k,1}(\cos t)$ и

$$p_{k,1}(x) = T_k(x), \tag{43}$$

где $T_k(x)$ — многочлены Чебышёва первого рода [8]. Многочлен $T_k(x)$ характеризуется как многочлен степени k со старшим коэффициентом 2^{k-1}, который меньше всего отклоняется по модулю от нуля на интервале $[-1, 1]$. Впервые $T_k(x)$ рассмотрены П. Л. Чебышёвым. Эти полиномы допускают рекуррентные соотношения

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

и явную формулу

$$T_k(x) = \sum_{l=0}^{[k/2]} \binom{k}{2l} (x^2-1)^l x^{k-2l}.$$

При $n = 2$ многочлены $p_{k,2}(x) = C_k^{1/2}(x)$ совпадают с многочленами Лежандра $P_k(x)$ [8, 6]. Многочлен $P_k(x)$ характеризуется как многочлен степени k, принимающий значение 1 при $x = 1$, являющееся его наибольшим по модулю значением на $[-1, 1]$, и в наименьшей степени отклоняющийся от нуля в смысле среднего квадратичного.

При $n = 3$

$$g_{k,3}(t) = \frac{\sin(k+1)t}{(k+1)\sin t} = p_{k,3}(\cos t),$$

$p_{k,3}(x)$ пропорциональны многочленам Чебышёва $U_k(x)$ второго рода [8]:

$$p_{k,3}(x) = \frac{1}{k+1} U_k(x). \tag{44}$$

Многочлен $U_k(x)$ характеризуется как многочлен степени k со старшим коэффициентом 2^k, интеграл от абсолютной величины которого по отрезку $[-1, 1]$ принимает наименьшее возможное значение. Впервые $U_k(x)$ рассмотрены в совместной работе двух учеников Чебышёва: Коркина и Золотарева. Эти многочлены допускают рекуррентные соотношения

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{k+1} = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x)$$

и явные формулы

$$U_k(x) = \sum_{l=0}^{[k/2]} \binom{k+1}{2l+1} (x^2-1)^l x^{k-2l}.$$

5. О спектре лапласиана компактных односвязных неприводимых римановых симметрических пространств

Каждое компактное односвязное неприводимое риманово симметрическое многообразие имеет вид $(M = G/H, \mu)$, где G — связная компактная простая группа Ли или прямое произведение $G_1 \times G_1$ компактных односвязных простых групп Ли G_1, H — некоторая связная компактная подгруппа группы Ли G; при этом G допускает биинвариантную риманову метрику ν такую, что каноническая проекция $\mathrm{pr} : (G, \nu) \to (G/H, \mu)$ является римановой субмерсией. В обоих случаях группа Ли G полупростая. Во втором случае пространство $(G/H, \mu)$ изометрично группе Ли G_1 с некоторой биинвариантной римановой метрикой; в этом случае метод вычисления спектра лапласиана для гладких функций получен, в частности, в [12]. В общем случае справедлива следующая

Теорема 8. *Пусть $(G/H, \mu)$ — компактное односвязное риманово симметрическое многообразие с компактной связной простой группой Ли G. Тогда спектр многообразия $\mathrm{Spec}(G/H, \mu)$ для гладких функций вычисляется следующим образом. Каждое собственное значение спектра имеет вид*

$$\lambda(\Lambda) = -[(\Lambda + \delta, \Lambda + \delta) - (\delta, \delta)], \tag{45}$$

где $(\cdot, \cdot) = \nu(e)$, Λ — некоторый элемент из множества $\Lambda^+(G/H)$ старших весов всех классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы Ли G класса один относительно подгруппы H,

$$\delta = \delta(G) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g})} \alpha \tag{46}$$

и $\Delta^+(\mathfrak{g})$ — множество всех положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. При этом кратность $m(\lambda)$ собственного значения λ равна

$$m(\lambda) = \sum_{\lambda(\Lambda) = \lambda, \Lambda \in \Lambda^+(G/H)} d(\Lambda), \tag{47}$$

где

$$d(\Lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g})} \left(\frac{(\Lambda, \alpha)}{(\delta, \alpha)} + 1 \right) \tag{48}$$

— размерность соответствующего (класса эквивалентности) представления $\rho = \rho(\Lambda)$ группы Ли G.

Поясним, что неприводимое комплексное представление ρ группы Ли G в пространстве $V = V_\rho$ называется *представлением класса один относительно подгруппы Ли $H \subset G$* или *сферическим представлением однородного пространства G/H*, если в пространстве V существует хотя бы один ненулевой инвариантный относительно всех преобразований $\rho(h)$, $h \in H$, вектор. Старшие веса сферических представлений симметрического пространства G/H рассматриваемого вида можно найти (не столь простым способом) с помощью понятий подалгебры Картана симметрической пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ($\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы

Ли H), а также схемы Сатаке и системы Σ вещественных корней из табл. 9 в [13]. Автор вынужден опустить детали.

Каждое собственное значение $\lambda(k)$ лапласиана на некотором КРОСПе G/H равно $\lambda(\Lambda_k)$, где $\Lambda_k \in \Lambda^+(G/H)$ определяется единственным образом (на основании следствия 1). Поэтому вследствие теоремы 8 размерность любого представления группы Ли G со старшим весом Λ_k, вычисляемая по формуле Г. Вейля (48), есть в точности кратность собственного значения $\lambda(k)$. В обозначениях табл. 5 из [13] веса Λ_k равны $k\pi_2$ для пространства $\mathbb{H}P^n$, $k(\pi_1+\pi_n)$ для $\mathbb{C}P^n$, $k\pi_1$ для S^n и CaP^2. На основе сказанного в [4] доказаны следующие утверждения.

Теорема 9. *Собственные значения* $\lambda(k)$, $k = 1, 2, \dots$, *лапласиана для всех* КРОСП*ов имеют следующие кратности* $m(\cdot, k)$*:*

$$m(S^n, k) = \frac{2k+n-1}{k+n-1}\binom{k+n-1}{k}, \quad m(\mathbb{C}P^n, k) = \frac{2k+n}{n}\binom{k+n-1}{k}^2,$$

$$m(\mathbb{H}P^n, k) = \frac{2k+2n+1}{(2n+1)(k+1)}\binom{k+2n}{k}\binom{k+2n-1}{k},$$

$$m(CaP^2, k) = \frac{2k+11}{11}\binom{k+10}{10}\prod_{r=4}^{7}\frac{k+r}{r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 2.
2. *Бессе А. Л.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.
3. *Berger M., Gauduchon P., Mazet E.* Le spectre d'une variété Riemannienne. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 194).
4. *Cahn R. S., Wolf J. A.* Zeta functions and their asymptotic expansions for compact symmetric spaces of rank one // Comment. Math. Helv. 1976. V. 51, N 1. P. 1–21.
5. *Берестовский В. Н., Свиркин В. М.* Оператор Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях // Мат. тр. 2009. Т. 12, № 2. С. 3–40.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 1.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 2.
8. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.
9. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
10. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
11. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
12. *Берестовский В. Н., Свиркин В. М.* Спектр оператора Лапласа на компактных односвязных простых группах Ли ранга два // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. Т. 151, № 4. С. 15–35.
13. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 28 июня 2011 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
berestov@ofim.oscsbras.ru