Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 517.518.1+514.76

ГРАФИКИ ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ И МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ГРУППАХ КАРНО

М. Б. Карманова

Аннотация. Исследована и решена новая задача для класса липшицевых (относительно субримановых метрик) отображений, определенных на группах Карно. Введено новое понятие графика для функций, заданных на группе Карно, а затем — новая концепция субримановой дифференцируемости, обобщающая понятие hc-дифференцируемости. Доказано, что отображения-«графики» дифференцируемы в новом смысле почти всюду. Для этих отображений определено понятие внутренней меры и получена формула площади для ее подсчета. В качестве приложения результатов найдены необходимые и достаточные условия на класс поверхностей-«графиков», чтобы они были минимальными (относительно внутренней меры) поверхностями.

Ключевые слова: группа Карно, липшицево отображение, график, формула площади, минимальная поверхность.

Исследование параметризованных поверхностей в субримановой геометрии является трудной и малоизученной проблемой. Одним из примеров таких поверхностей является «график» отображения (здесь график понимается не в общепринятом смысле, см. детали ниже в определении 10). Сложность этой задачи состоит в том, что из-за особенностей неголономной структуры отображение-график липшицева в субримановом смысле отображения в общем случае не является регулярным, следовательно, известные теоремы об аппроксимации отображением с «удобными» свойствами и вычислении площади не применимы. Однако изучение графиков отображений актуально для развития теории минимальных поверхностей на неголономных структурах, имеющей приложения для решения разнообразных практических задач. Самой известной из них является построение моделей визуализации [1–3].

В настоящее время минимальные поверхности изучены только для частных модельных случаев (одномерные и многомерные группы Гейзенберга, некоторые группы Карно) в [3–10]. Проблема Бернштейна на одномерной группе Гейзенберга детально рассмотрена в [8, 11, 12]. В частности, в [6] исследованы свойства глобальных внутренних графиков; показано, что они являются неустойчивыми критическими точками функции горизонтального периметра. В [8] найдены необходимые условия на геометрические свойства графиков над плоскостями для того, чтобы они были C^2-связными минимальными поверхностями. Различные свойства минимальных поверхностей, являющихся липшицевыми «внутренними графиками» или пределами римановых минимальных поверхностей,

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1) и Интеграционного проекта СО РАН — ДВО РАН (№ 56).

изучены в [4, 5]. Недавно в [7] был дан положительный ответ на вопрос о существовании минимальных поверхностей для ряда случаев на одномерной группе Гейзенберга.

Некоторые свойства параметризованных поверхностей на группах Гейзенберга получены в [13, 14]. В [7] решен класс задач по теории поверхностей на группах Гейзенберга; на группах Карно авторы работы [15] исследовали способы параметризации и основные свойства некоторых классов поверхностей и доказали формулу площади. В [16–18] обобщены некоторые результаты работы [15]. В частности, в [16] выведена субриманова хаусдорфова размерность и доказана формула площади для одномерных поверхностей уровня на группах Гейзенберга функций $\varphi : \mathbb{H}^1 \to \mathbb{R}^2$, а в [18] выведена субриманова хаусдорфова размерность и доказана формула площади для одномерных поверхностей уровня на пространствах Карно — Каратеодори. В [17] формула площади доказана для поверхностей уровня коразмерности 1 на группах Карно.

Теорема [17]. *Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ открыто и функция $\varphi : \omega \to \mathbb{R}$ равномерно ∇^φ-дифференцируема. Определим отображение $\Phi : \omega \to \mathbb{G}$ по правилу $\Phi(\xi) = (0, \xi) \cdot \exp(\phi(\xi)X_1)$ и обозначим $S = \Phi(\omega)$. Тогда верна формула площади*

$$\mathscr{H}^{\nu-1}(S) = \int\limits_{\omega} \sqrt{1 + |\nabla^\varphi \varphi|^2}\, d\mathscr{L}^{N-1}.$$

См. детали и обозначения в [17].

Теорема [18]. *Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно топологической размерности $N+1$, а $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^N$ — непрерывно hc-дифференцируемое отображение, hc-дифференциал $\widehat{D}f$ имеет максимальный ранг и $f(0) = 0$. Тогда в некоторой окрестности нуля множество уровня $f^{-1}(0)$ есть образ простой кривой $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{G}$ и длина этой кривой может быть найдена как предел*

$$\mathscr{H}^2_{d_\infty}(\gamma) = \int\limits_{\gamma} dz + \varliminf_{\|\sigma \to 0\|} \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \int\limits_{\sigma} x_j\, dx_i.$$

Если к тому же $f \in C^{1,\alpha}_H(\mathbb{G}, \mathbb{R}^N)$, то кривая γ является 2-регулярной и ее длина положительна, конечна и равна

$$\mathscr{H}^2_{d_\infty}(\gamma) = \int\limits_{\gamma} dz + \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \int\limits_{\gamma} x_j\, dx_i,$$

где все интегралы понимаются в смысле интеграла Стильтьеса.

См. детали и обозначения в [18].

Во многих из перечисленных работ вводится специфическое понятие дифференциала (зависящее от некоторого отображения). Подчеркнем, что формула площади поверхности доказана для меры Хаусдорфа, построенной по (квази)метрике в самой группе Карно или пространстве Карно — Каратеодори (т. е. определенной на пространстве, в котором лежит поверхность). Кроме того, присутствуют требования на непрерывность горизонтальных производных отображения, графиком которого является поверхность.

Отметим, что исследованию минимальных поверхностей на евклидовых пространствах посвящены многочисленные работы (см., например, [19–24] и др.).

В данной статье рассмотрена и решена новая задача для класса липшицевых (относительно субримановых метрик) отображений, определенных на группах Карно. Новизна состоит в том, что, в частности, изучены свойства минимальных поверхностей, которые могут быть графиками в $D\times\mathbb{R}$, где D — область в группе Карно $\mathbb{G}$, липшицевых отображений $\varphi : D \to \mathbb{R}$, в то время как в работах [1–12, 25] исследуются минимальные поверхности над гиперплоскостями группы Гейзенберга. Отметим, что прямолинейная реализация такой вариационной задачи невозможна, так как построение отображения-графика (т. е. отображения, образ которого — график φ) выводит нас из класса липшицевых в субримановом смысле отображений. Поэтому для решения задачи мы вводим «внутреннюю» меру Хаусдорфа, определяемую структурой поверхности (а не объемлющего пространства). Подчеркнем, что с помощью такого нового подхода мы получили решение задачи, следуя шаг за шагом классической схеме (см., например, [23]).

В работе впервые установлена и доказана формула площади поверхностей-графиков для их внутренней меры. В частности, изучен случай, когда отображения, «определяющие» поверхности-графики, принимают значения не на интегральных линиях горизонтального поля, а на «регулярность» отображения не накладывается никаких ограничений (в отличие от [15–18]), кроме субримановой липшицевости. Основное средство при получении результатов — введение «адаптированной» под отображение новой внутренней структуры с новыми базисными полями, а также обобщение понятия hc-дифференцируемости [26, 27]: *полиномиальная* субриманова hc-дифференцируемость. Отличие от обычной hc-дифференцируемости состоит в том, что отображение, аппроксимирующее исходное, полиномиально зависит от координат «вектора» разницы между точками x и y. Необходимость использования полиномиального hc-дифференциала вызвана тем, что субриманова квазиметрика неодинаково зависит от координат одной точки относительно другой, следовательно, некоторые из координат необходимо возвести в степень, большую 1, для достаточно «хорошей» аппроксимации отображения. В качестве приложения результатов получены аналитические описания классов минимальных относительно внутренней меры поверхностей.

Определение 1. *Группой Карно* [28] называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е. представляется в виде

$$V = \bigoplus_{j=1}^{M} V_j, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1},\ j < M,\ [V_1, V_M] = \{0\}. \tag{1}$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j = 1, \dots, M$, не зависят от точки x.

Определение 2. Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$ и $X_1, X_2, \dots, X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V, причем $X_1, \dots, X_{\dim V_1}$ — базис V_1, $X_{\dim V_1+\dots+\dim V_{k-1}+1}$, $\dots, X_{\dim V_1+\dots+\dim V_k}$, $1 < i \leq M$, — базис V_k, образованный коммутаторами порядка $k-1$ некоторых базисных векторных полей пространства V_1. Здесь символ $\dim V_k$ означает размерность V_k в каждой точке x. Если $X_j \in V_k$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается через $\deg X_j$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*.

Определение 3. *Нильпотентной градуированной группой* называется связная односвязная группы Ли $\mathbb{G}$, для алгебры Ли V которой справедливо

$$V=\bigoplus_{j=1}^{M}V_j,\quad [V_1,V_j]\subset V_{j+1},\ j<M,\ [V_1,V_M]=\{0\}.$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j=1,\dots,M$, не зависят от точки x.

Иными словами, для нильпотентной градуированной группы соотношение $[V_1,V_j]=V_{j+1}$ из (1) может и не выполняться. Группа Карно является частным случаем нильпотентной градуированной группы.

Определение 4. Минимальное число M такое, что $V_M\neq\{0\}$, а $V_{M+1}=\{0\}$, называется *глубиной* нильпотентной градуированной группы $\mathbb{G}$.

Обозначение 1. Обозначим символом $\mathbf{0}$ единицу группы $\mathbb{G}$.

Из формулы Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа выводятся следующие выражения для групповой операции на $\mathbb{G}$. Если $x=\exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N}x_jX_j\Bigr)(\mathbf{0})$, $y=\exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N}y_jX_j\Bigr)(\mathbf{0})$, то $x\cdot y=z=\exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N}z_jX_j\Bigr)(\mathbf{0})$, где

$$z_j=x_j+y_j+\sum_{\substack{\mu>0,\beta>0,\\ |\mu+\beta|_h=\deg X_j}}F^j_{\mu,\beta}x^\mu y^\beta.$$

Определение 5. Константы $\bigl\{F^j_{\mu,\beta}\bigr\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами группы* $\mathbb{G}$.

В определении групповой операции используется следующее

Обозначение 2. Для каждого N-мерного мультииндекса $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_N)$ его *однородная норма* обозначается через $|\mu|_h=\sum\limits_{i=1}^{N}\mu_i\deg X_i$.

Определение 6. Рассмотрим точку $u\in\mathbb{G}$ и $(v_1,\dots,v_N)\in\mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1,\dots,v_N)=\exp\Biggl(\sum_{i=1}^{N}v_iX_i\Biggr)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (*относительно* $u\in\mathbb{G}$) точки $v=\theta_u(v_1,\dots,v_N)$.

Определение 7. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно топологической размерности N и глубины M, и пусть $x=\exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N}x_iX_i\Bigr)(u)$. Определим квазиметрику d_∞ следующим образом:

$$d_\infty(x,u)=\max_{i=1,\dots,N}\{|x_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}$$

Шар в квазиметрике d_∞ радиуса r с центром в точке x обозначим символом $\operatorname{Box}(x,r)$.

Определение 8 (см. [29]). Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно топологической размерности N и глубины M, и пусть $x=\exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N}x_iX_i\Bigr)(u)$. Определим квазиметрику $d_2(x,u)$ следующим образом:

$$d_2(x,u)=\max\left\{\left(\sum_{j=1}^{\dim V_1}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}},\left(\sum_{j=\dim V_1+1}^{\dim V_1+V_2}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2\cdot\deg X_{\dim V_1+V_2}}},\right.$$
$$\left.\dots,\left(\sum_{j=N-\dim V_M+1}^{N}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2\cdot\deg X_N}}\right\}.$$

Шар в квазиметрике d_2 радиуса r с центром в точке x обозначим символом $\mathrm{Box}_2(x,r)$.

Из определения 8 следует, что d_∞ и d_2 локально билипшицево эквивалентны.

Свойство 1. *Образ множества* $\mathrm{Box}(x,r)$ *при отображении* θ_x^{-1} *— декартово произведение* M *кубов, длины сторон которых равны* $2r,2r^2,\dots,2r^M$.

Образ множества $\mathrm{Box}_2(x,r)$ *при отображении* θ_x^{-1} *— декартово произведение* M *шаров радиусов* $r,r^2,\dots,r^M$.

Свойство 2. *С помощью свойства* 1 *непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы* $\mathbb{G}$ *относительно* d_∞ (*и, следовательно,* d_2) *равна*

$$\nu=\sum_{j=1}^{M}j\dim V_j.$$

Определение 9. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа Ли (т. е. подрасслоение $\widetilde{V}_1$ может не порождать все расслоение $\widetilde{V}$), $E\subset\mathbb{G}$ и $\varphi:E\to\widetilde{\mathbb{G}}$. Пусть еще функция $\tilde{\mathfrak{d}}:\varphi(E)\times\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{R}_+$ такова, что на $\varphi(E)\times\varphi(E)$ она является квазиметрикой. Будем говорить, что φ *полиномиально hc-дифференцируемо в точке* $x\in E$ относительно $\tilde{\mathfrak{d}}$, если существует отображение $\mathscr{L}_x:\mathbb{G}\to\widetilde{\mathbb{G}}$ такое, что

1) $\tilde{\mathfrak{d}}(\varphi(w),\mathscr{L}_x\langle w\rangle)=o(d_\infty(x,w))$, $E\ni w\to x$, $w=\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N}w_iX_i\right)(x)$;

2) $\mathscr{L}_x(w)=\theta_{\varphi(x)}\circ L_x\circ\theta_x^{-1}(w)$, где L_x — оператор с полиномиальными относительно $w_1,\dots,w_N$ коэффициентами.

Обозначение 3. Здесь и далее отображение $\mathscr{L}_x$ будем обозначать символом $\widehat{D}_P\varphi(x)$.

Замечание 1. 1. Определение 1 обобщается на случай отображения подмножества многообразия Карно $\mathbb{M}$ в пространство Карно — Каратеодори $\widetilde{\mathbb{M}}$ [27]. Отличие от случая отображения группы Карно в нильпотентную градуированную группу состоит в том, что $\mathscr{L}_x$ действует из локальной группы $\mathscr{G}^x\mathbb{M}$ в локальную группу $\mathscr{G}^{\varphi(x)}\widetilde{\mathbb{M}}$ [27, 30].

2. В определении 9 в отличие от [26, 27, 31], не требуется, чтобы отображение $\mathscr{L}_x$ было горизонтальным гомоморфизмом.

3. В определении 9 и п. 1 не требуется, чтобы для $\tilde{\mathfrak{d}}$ выполнялись (обобщенное) неравенство треугольника и свойство (обобщенной) симметричности на всем произведении $\varphi(E)\times\widetilde{\mathbb{G}}$ $(\varphi(E)\times\widetilde{\mathbb{M}})$.

Пример 1. Липшицевы относительно субримановых метрик отображения измеримых множеств $E\subset\mathbb{M}$ многообразий Карно полиномиально hc-дифференцируемы [26, 27]. Для отображений групп Карно доказательство дано в [31].

Здесь и далее в статье, если специально не оговорено, будем рассматривать класс отображений, описываемый ниже.

Описание 1 (рассматриваемый класс отображений). Пусть $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа Ли (т. е. подрасслоение $\widetilde{V}_1$ может не порождать все расслоение $\widetilde{V}$), обладающая следующими свойствами.

1. Существует поле X_i степени l такое, что $V = \operatorname{span}\{X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_N\}$ — нильпотентная градуированная алгебра Ли, порождаемая подрасслоением $\widetilde{V}_1$ (или подрасслоением $V_1 = \operatorname{span}\{X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{\dim V_1}\}$ в случае, если $l = 1$).

2. Для структурных констант выполняется $F^j_{i,\beta} = 0$, если $|\beta| > 1$.

Обозначим символом $\mathbb{G}$ подгруппу Карно, определяемую алгеброй V, а символом V_l — подрасслоение

$$\operatorname{span}\{X_{\sum\limits_{j=1}^{l-1}\dim V_j+1}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{\sum\limits_{j=1}^{l}\dim V_j}\} \subset \widetilde{V}_l.$$

Здесь и далее, если не оговорено специально, будем рассматривать липшицевы отображения $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$, где $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, принимающие значения на интегральной кривой ℓ векторного поля X_i:

$$d_\infty(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)|^{\frac{1}{l}} \le K d_\infty(x, y).$$

Определение 10. Пусть $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$. *Графиком* отображения φ называется следующее отображение:

$$\mathbb{G} \ni x \mapsto \varphi_\Gamma(x) = \exp(\varphi(x)X_i)(x).$$

Введем внутренний базис и внутреннюю меру на поверхности $\varphi_\Gamma(\mathbb{G})$ для отображений φ_Γ из определения 10.

Определение 11. Фиксируем $x \in \mathbb{G}$. Набор векторных полей $\{\widetilde{X}^x_j(y)\}_{j=1}^N$, определенных следующим образом:

$$\widetilde{X}^x_j(y) = \begin{cases} X_i(y), & j = i, \\ X_j(y) + 2\varphi(x) \sum\limits_{k:\, \deg X_k = \deg X_j + l} F^k_{j,i} X_k(y), & j \ne i,\ j \le \sum\limits_{m=1}^{M-l} \dim V_m, \\ X_j(y), & j \ne i,\ j > \sum\limits_{m=1}^{M-l} \dim V_m, \end{cases}$$

где $y \in \widetilde{\mathbb{G}}$, называется *внутренним базисом, ассоциированным с точкой* x. Здесь $\{F^k_{j,i}\}_{k,j}$ — структурные константы (см. определение 5). Определим значение *внутреннего расстояния* $\tilde{d}^x_\infty$*, ассоциированного с точкой* x как

$$\tilde{d}^x_\infty(y, z) = \max_{j=1,\dots,N}\{|y_j|^{\frac{1}{\deg X_j}}\}, \quad \text{где } y = \exp\Biggl(\sum_{j=1}^N y_j \widetilde{X}^x_j\Biggr)(z).$$

Шар с центром в точке y радиуса r обозначим символом $\widetilde{\operatorname{Box}}^x(y, r)$.

Величина $\tilde{d}^x_2$ и множество $\widetilde{\operatorname{Box}}^x_2(y, r)$ определяются аналогично d_2 (см. определение 8) с заменой полей X_j на $\widetilde{X}^x_j$, $j = 1, \dots, N$.

Свойство 3. *Так как матрица преобразования исходного базиса во внутренний, ассоциированный с произвольной точкой* x*, невырожденна (она имеет* *верхнетреугольный вид с единицами на диагонали), то поля* $\left\{\widetilde{X}_j^x(y)\right\}_{j=1}^N$ *линейно независимы.*

Определение 12. Пусть $\nu = \tilde{\nu} - l$, где $\tilde{\nu}$ — хаусдорфова размерность $\widetilde{\mathbb{G}}$ относительно d_∞ (в исходном базисе). *Внутренней мерой* множества $A \subset \varphi_\Gamma(\mathbb{G})$ называется величина

$$\mathscr{H}_\Gamma^\nu(A) = \omega_\nu \lim_{\delta\to 0} \inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^\nu : \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\operatorname{Box}}_2^{x_j}(\varphi_\Gamma(x_j), r_j) \supset A,\ \varphi_\Gamma(x_j) \in A,\ r_j \le \delta\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\operatorname{Box}}_2^{x_j}(\varphi_\Gamma(x_j), r_j)$ множества $A \subset \varphi_\Gamma(\mathbb{G})$.

Обозначение 4. Величину

$$\omega_\nu \inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^\nu : \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\operatorname{Box}}_2^{x_j}(\varphi_\Gamma(x_j), r_j) \supset A,\ \varphi_\Gamma(x_j) \in A,\ r_j \le \delta\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\operatorname{Box}}_2^{x_j}(\varphi_\Gamma(x_j), r_j)$ множества $A \subset \varphi_\Gamma(\mathbb{G})$, обозначим символом $(\mathscr{H}_\Gamma^\nu)_\delta(A)$.

Замечание 2. Отметим, что мера Хаусдорфа $\mathscr{H}_\Gamma^\nu$ определена корректно, так как существуют не зависящие от x константы $0 < L_{\min} \le L_{\max} < \infty$ такие, что

$$L_{\min} d_\infty(x, y) \le \tilde{d}_\infty^x(\varphi_\Gamma(x), \varphi_\Gamma(y)) \le L_{\max}(d_\infty(x, y))$$

(см. теорему 2, п. (I), шаг 3). Следовательно, на образе отображения φ_Γ внутреннее расстояние является квазиметрикой.

Далее, если из контекста ясно, с какой точкой ассоциирован новый базис, будем употреблять термин «внутренний базис».

Замечание 3. В случае произвольного l внутреннее расстояние не является квазиметрикой [32], так как для полей внутреннего базиса не выполняется треугольная таблица коммутаторов, т. е. соотношение

$$[\widetilde{X}_k^x, \widetilde{X}_j^x](s) = \sum_{q:\deg X_q \le \deg X_k + \deg X_j} c_{kjq}(s)\widetilde{X}_q^x(s)$$

может не выполняться.

Если же $l = M - 1$, то, так как поля степени M из исходного базиса коммутируют со всеми полями алгебры Ли, структурные константы для новых полей совпадают с исходными. Следовательно, обобщенные неравенства треугольника вида

$$\tilde{d}_\infty^x(u, v) \le c_\Delta(\tilde{d}_\infty^x(u, w) + \tilde{d}_\infty^x(w, v)) \quad \text{и} \quad \tilde{d}_\infty^x(u, v) \le \tilde{d}_\infty^x(u, w) + C_\Delta \tilde{d}_\infty^x(w, v)$$

верны, и константы c_Δ и C_Δ в обоих неравенствах треугольника также совпадают с исходными. Если же $l = M$, то поля внутреннего базиса совпадают с исходными.

Пример 2. В почти каждой точке $x \in \mathbb{G}$ отображение-график $\varphi_\Gamma : (\mathbb{G}, d_\infty) \to (\widetilde{\mathbb{G}}, \tilde{d}_\infty^x)$, где φ_Γ описано в определении 10, является полиномиально hc-дифференцируемым почти в каждой точке x относительно внутреннего расстояния $\tilde{d}_\infty^x$ (см. далее теорему 2).

Покажем, что класс таких отображений непуст.

Определение 13. Абсолютно непрерывная кривая $\gamma : [0, a] \to \mathbb{G}$ называется *горизонтальной*, если $\dot{\gamma}(t) \in V_1(\gamma(t))$ для почти всех $t \in [0, a]$. Ее длина $l(\gamma)$

равна $\int\limits_0^a |\dot\gamma(t)|_{g_{\mathbb G}}\,dt$, где значение $|\dot\gamma(t)|_{g_{\mathbb G}}$ считается с помощью риманова тензора $g_{\mathbb G}$ на $\mathbb G$.

Теорема 1 [28]. *Любые две точки группы Карно можно соединить горизонтальной кривой.*

Определение 14. *Расстояние Карно — Каратеодори* между точками $x, y \in \mathbb G$ равно $d_{cc}(x,y) = \inf\limits_{\gamma}\{l(\gamma)\}$, где точная нижняя грань берется по всем горизонтальным кривым, соединяющим x и y.

Обозначим символом $B_{cc}(x,r)$ шар в d_{cc} с центром в точке x радиуса r.

Свойство 4. *Из определений следует, что d_{cc} является метрикой.*

Пример 3. Пусть $\mathbb G$ — группа Карно. Построим группу $\widetilde{\mathbb G} \supset \theta_{\mathbf 0}^{-1}(\mathbb G)$ следующим образом. Перейдем в нормальные координаты относительно единицы группы $\mathbf 0$ и рассмотрим декартово произведение $\mathbb R^N \times \mathbb R\cdot e_{N+1}$. Сначала для $j = 1,\dots,N$ определим поля

$$\widetilde X_j(x_1,\dots,x_N,x_{N+1}) = (\theta_{\mathbf 0})_*^{-1}\langle X_j\rangle(x_1,\dots,x_N),$$

а затем добавим к одному из полей $\widetilde X_k$ степени $M-1$ слагаемое $x_{N+1}\frac{\partial}{\partial x_N}$ и определим новое горизонтальное поле $\widetilde X_{N+1}$ как $\frac{\partial}{\partial x_{N+1}}$.

Тогда $[\widetilde X_k, \widetilde X_{N+1}] = \widetilde X_N$ и $[\widetilde X_{N+1}, \widetilde X_m] = 0$ для $m \neq k$. Они образуют нильпотентную градуированную алгебру Ли на $\mathbb R^{N+1}$.

Пусть φ — произвольная липшицева относительно субримановой метрики функция (например, $\varphi(x) = d_{cc}(x,E)$, где $E \subset \theta_{\mathbf 0}^{-1}(\mathbb G)$ — измеримое множество, липшицева относительно субримановой метрики, но не локально липшицева в классическом смысле), которая принимает значения на кривой

$$\ell = \exp(\mathbb R\cdot \widetilde X_{N+1})(0).$$

Положим остальные координатные функции этого отображения равными нулю. Тогда соответствующее отображение $\varphi_\Gamma : \theta_{\mathbf 0}^{-1}(\mathbb G) \to \widetilde{\mathbb G}$ полиномиально hc-дифференцируемо почти в каждой точке x относительно внутреннего расстояния $\tilde d^x_\infty$ (см. теорему 2).

Обозначение 5. Для отображений $\varphi : \mathbb G \to \widetilde{\mathbb G}$ из описания 1 символом $|\widehat D\varphi(x)|_i^2$ обозначим скалярный квадрат i-й строки hc-дифференциала $\widehat D\varphi(x)$. Иными словами, если $\widehat D\varphi(x) = (b_{ij})$, то с учетом блочно-диагональной структуры имеем

$$|\widehat D\varphi(x)|_i^2 = \sum_{j:\deg X_j = l} b_{ij}^2.$$

Теорема 2. *В условиях описания* 1 *пусть $D \subset \mathbb G$ — измеримое множество, а $\varphi : D \to \ell$ — липшицево в субримановом смысле отображение. Тогда*

(I) *в почти каждой точке $x \in D$ отображение-график $\varphi_\Gamma : (D, d_\infty) \to (\widetilde{\mathbb G}, \tilde d^x_\infty)$ является полиномиально hc-дифференцируемым;*

(II) *справедлива формула для подсчета площади относительно внутренней меры:*

$$\int\limits_D \sqrt{1 + |\widehat D\varphi(y)|_i^2}\, d\mathscr H^\nu(y) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(D)} d\mathscr H^\nu_\Gamma(x).$$

Здесь $\nu = \tilde\nu - l$, а мера $\mathscr H^\nu_\Gamma$ введена в определении 12.

Доказательство. (I) Докажем полиномиальную hc-дифференцируемость.

Шаг 1. Отображение φ представимо как отображение $\overline{\varphi} : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$, где все координаты $\overline{\varphi}_j$, $j \neq i$, относительно точки $\mathbf{0}$ равны нулю. Следовательно, оно hc-дифференцируемо почти всюду на D.

Покажем сначала, что образ hc-дифференциала $\widehat{D}\varphi$ в каждой точке дифференцируемости x лежит на кривой ℓ. Действительно, предположим, что это не так, и $\widehat{D}\varphi(x)\big\langle \sum\limits_{k\neq i} y_k X_k\big\rangle = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j^x(y) X_j$. Здесь для упрощения обозначений рассматриваем без ограничения общности hc-дифференциал не только как отображение групп, но и как отображение алгебр, т. е. hc-дифференциал $\widehat{D}\varphi(x)$ действует на поля $\{X_j\}_{j=1}^N$ алгебры Ли V. По определению hc-дифференцируемости для $y = \exp\big(\sum\limits_{k\neq i} y_k X_k\big)(x)$ имеем

$$d_\infty\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^x(y) X_j\right)(\varphi(x)), \varphi(y)\right) = o(d_\infty(x,y)).$$

Для $\deg X_j \leq l$ и $j \neq i$ при помощи групповой операции выводим

$$|a_j^x(y)|^{\frac{1}{\deg X_j}} = o(d_\infty(x,y)).$$

Фиксируем такое j. По определению $a_j^x(y)$ — это скалярное произведение j-й строки $(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jN})$ матрицы $\widehat{D}\varphi(x)$ на вектор-столбец $(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_N)^T$. Так как почти каждая точка измеримого множества $D \subset \mathbb{G}$ является его точкой плотности, для почти каждого x для всякого $r \leq r_0$, где $r_0 > 0$ достаточно мало, существует хотя бы одна точка $y \in \operatorname{Box}(x,r) \cap D$, $y = \exp\big(\sum\limits_{k\neq i} y_k X_k\big)(x)$, такая, что

$$y_k = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\alpha_{jk}) \cdot a_k,\ a_k \in [\frac{1}{4} r^{\deg X_j}, r^{\deg X_j}], & \deg X_k = \deg X_j, \\ b_k,\ 0 \leq b_k \leq r^{\deg X_k}, & \deg X_k \neq \deg X_j. \end{cases}$$

Учитывая то, что hc-дифференциал имеет блочно-диагональный вид, и $\widehat{D}\varphi(V_j) \subset V_j$, получаем, что j-я строка матрицы $\widehat{D}\varphi(x)$ нулевая и $a_j^x(y) = 0$.

Далее, для $j = i$ имеем $|\varphi(y) - a_i^x(y)|^{\frac{1}{l}} = o(d_\infty(x,y))$.

Рассмотрим теперь случай $\deg X_j > l$. Так как $a_j^x(y) = 0$ для $\deg X_j \leq l$, из групповой операции выводим $|a_j^x(y)|^{\frac{1}{\deg X_j}} = o(d_\infty(x,y))$. Далее рассуждения проводятся по той же схеме, что и в случае $\deg X_j \leq l$.

Следовательно, $\widehat{D}\varphi(x)\big\langle \sum\limits_{k\neq i} y_k X_k\big\rangle = a_i^x(y) X_i$, и единственная ненулевая строка в матрице $\widehat{D}\varphi(x)$ — это строка с номером i.

Шаг 2. Выразим аналитически дифференциал отображения φ_Γ в точке x. Для этого сначала найдем координаты $\varphi_\Gamma(y)$ относительно точки x. Если $y = \exp\big(\sum\limits_{k\neq i} y_k X_k\big)(x)$, а $\varphi_\Gamma(y) = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} \varphi_j(y) X_j\right)(x)$, то

$$\varphi_j(y) = y_j,\ \deg X_j \leq l \text{ и } j \neq i; \quad \varphi_i(y) = \varphi(y);$$

$$\varphi_j(y) = y_j + \varphi(y) \sum_{|\beta|_h = \deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta,\ \deg X_j > l.$$

Найдем коэффициенты φ_j^Δ, $j = 1, \dots, N$, где $\varphi_\Gamma(y) = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} \varphi_j^\Delta X_j\right)(\varphi(x))$.

Имеем

$$\varphi_j^\Delta = \begin{cases} y_j, \quad \deg X_j \le l \text{ и } j \ne i, \\ \varphi(y) - \varphi(x), \quad j = i, \\ y_j + \varphi(y) \sum\limits_{|\beta|_h = \deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta + \varphi(x) \sum\limits_{|\beta|_h = \deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta, \ \deg X_j > l. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что

$$\Big|\varphi(y) - \Big(\varphi(x) + \widehat{D}\varphi(x)\Big\langle \sum_{k\ne i} y_k X_k \Big\rangle\Big)\Big|^{\frac{1}{l}} = o(d_\infty(x,y)), \tag{3}$$

а

$$\begin{aligned} \varphi(y) &\sum_{|\beta|_h = \deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta + \varphi(x) \sum_{|\beta|_h = \deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta \\ &= \Big(\varphi(y) - \Big(\varphi(x) + \widehat{D}\varphi(x)\Big\langle \sum_{k\ne i} y_k X_k \Big\rangle\Big)\Big) \sum_{|\beta|_h = \deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta \\ &\quad + \Big(2\varphi(x) + \widehat{D}\varphi(x)\Big\langle \sum_{k\ne i} y_k X_k \Big\rangle\Big) \sum_{|\beta|_h = \deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta. \end{aligned} \tag{4}$$

В силу (2)–(4) имеем

$$\varphi_i^\Delta = \widehat{D}\varphi(x)\Big\langle \sum_{k\ne i} y_k X_k \Big\rangle + (o(d_\infty(x,y)))^l,$$

$$\varphi_j^\Delta = y_j + \Big(2\varphi(x) + \widehat{D}\varphi(x)\Big\langle \sum_{k\ne i} y_k X_k \Big\rangle\Big) \sum_{|\beta|_h = \deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta + (o(d_\infty(x,y)))^{\deg X_j},$$

так как $|y^\beta| \le d_\infty(x,y)^{|\beta|_h}$ (здесь рассматриваются все j такие, что $\deg X_j > l$).

Шаг 3. Докажем аналог билипшицевости для отображения φ_Γ относительно внутреннего расстояния: покажем, что существуют не зависящие от точки x константы $0 < L_{\min} \le L_{\max} < \infty$ такие, что

$$L_{\min} d_\infty(x,y) \le \tilde{d}^x_\infty(\varphi_\Gamma(x), \varphi_\Gamma(y)) \le L_{\max}(d_\infty(x,y)).$$

При подсчете координат $(\varphi_1^\Delta, \dots, \varphi_N^\Delta)$ точки $\varphi_\Gamma(y)$ относительно точки $\varphi_\Gamma(x)$ имеем $\big|\varphi_j^\Delta\big|^{\frac{1}{\deg X_j}} \le \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\} d_\infty(x,y)$ для $\deg X_j \le l$.

Рассмотрим случай $\deg X_j > l$. Для базиса $\{\widetilde{X}^x_j\}_{j=1}^N$

$$\varphi_j^\Delta = y_j + (\varphi(y) - \varphi(x)) \sum_{|\beta|_h = \deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta.$$

Тогда

$$\big|\varphi_j^\Delta\big| \le d_\infty(x,y)^{\deg X_j} + \mathrm{Lip}(\varphi)^l d_\infty(x,y)^l \sum_{\substack{\beta, m: |\beta|_h = \deg X_j - l, \\ \deg X_m = \deg X_j}} |F^m_{\beta,i}| d_\infty(x,y)^{\deg X_j - l}$$

и, следовательно,

$$\big|\varphi_j^\Delta\big|^{\frac{1}{\deg X_j}} \le \Big(1 + \mathrm{Lip}(\varphi)^l \sum_{\substack{\beta, m: |\beta|_h = \deg X_j - l, \\ \deg X_m = \deg X_j}} |F^m_{\beta,i}|\Big)^{\frac{1}{\deg X_j}} d_\infty(x,y).$$

Существование константы $L_{\max}$, не зависящей от точки x, доказано.

Докажем существование константы $L_{\min}$, которая тоже не зависит от точки x. Если при подсчете значений $d_\infty(x,y)$ и $\tilde{d}^x_\infty(\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y))$ максимум достигается на какой-либо координате с номером j такой, что $\deg X_j \le l$ и $j \ne i$, то $\tilde{d}^x_\infty(\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y)) \ge d_\infty(x,y)$. Пусть теперь максимум при подсчете $d_\infty(x,y)$ достигается на координате с номером j такой, что $\deg X_j > l$.

Предположим, что для всякого малого $\varepsilon > 0$ существуют точки $x, y \in D$ такие, что $\tilde{d}^x_\infty(\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y)) < \varepsilon d_\infty(x,y)$. По предположению значение $d_\infty(x,y)$ достигается на координате y_j, где $\deg X_j > l$. Тогда, в частности,

$$\varepsilon|y_j| > \Big| y_j + (\varphi(y)-\varphi(x)) \sum_{|\beta|_h=\deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta \Big| \\ \ge \Big| |y_j| - |\varphi(y)-\varphi(x)| \Big| \sum_{|\beta|_h=\deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta \Big|\Big|.$$

Отсюда следует, что

$$(1-\varepsilon)|y_j| < |\varphi(y)-\varphi(x)| \Big| \sum_{|\beta|_h=\deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta \Big|.$$

Так как

$$\Big| \sum_{|\beta|_h=\deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta \Big| \le \sum_{\substack{\beta,m:|\beta|_h=\deg X_j-l,\\ \deg X_m=\deg X_j}} |F^m_{\beta,i}| d_\infty(x,y)^{\deg X_j - l}$$

и $|y_j| = d_\infty(x,y)^{\deg X_j}$, то

$$|\varphi(y)-\varphi(x)| > \frac{1-\varepsilon}{\sum\limits_{\substack{\beta,m:|\beta|_h=\deg X_j-l,\\ \deg X_m=\deg X_j}} |F^m_{\beta,i}|} d_\infty(x,y)^l.$$

Тогда для $\varepsilon < \big(1 + \sum\limits_{\substack{\beta,m:|\beta|_h=\deg X_j-l,\\ \deg X_m=\deg X_j}} |F^m_{\beta,i}|\big)^{-l}$ получаем противоречие с предположением, что $|\varphi(y)-\varphi(x)| < \varepsilon^l d_\infty(x,y)^l$. Существование константы $L_{\min}$, не зависящей от точки x, доказано.

Таким образом, $o(d_\infty(x,y)) = o(\tilde{d}^x_\infty(\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y)))$, следовательно, в новом базисе верно

$$\tilde{d}^x_\infty(\varphi_\Gamma(y), \widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle) = o(\tilde{d}^x_\infty(\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y))) = o(d_\infty(x,y)).$$

Полиномиальная hc-дифференцируемость почти всюду (а именно в точках hc- дифференцируемости φ) отображения φ_Γ доказана.

(II) Докажем формулу площади для графика φ_Γ.

Шаг 1. В новом базисе (относительно точки x) координаты точки $\varphi_\Gamma(y)$, соответствующие степеням, большим l, выглядят следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}^\Delta_j = y_j + \widehat{D}\varphi(x)\Big\langle \sum_{k\ne i} y_k X_k \Big\rangle \sum_{|\beta|_h=\deg X_j - l} F^j_{\beta,i} y^\beta + (o(d_\infty(x,y)))^{\deg X_j}, \qquad (5)$$

а все остальные координаты остаются без изменения.

Фиксируем точку x и базис $\{\widetilde{X}^x_j\}_{j=1}^N$ в $\widetilde{\mathbb{G}}$. В этом базисе φ_Γ аппроксимируется отображением $\widehat{D}_P\varphi(x)$ в точке $y = \exp\big(\sum\limits_{k\ne i} y_k X_k\big)(x)$ с точностью до $o(d_\infty(x,y))$. Отображение $\widehat{D}_P\varphi(x)$ действует на точки из окрестности x.

В нормальных координатах относительно x его матрица при $l = M - 1$ выглядит следующим образом (без ограничения общности можно считать, что $i = N - \sum\limits_{m=l+1}^{M} \dim V_m$):

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{\dim \widetilde{V}_l} & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \widehat{D}\varphi(x) & 0 & 0 & \dots & 0\\
\widehat{\Phi}^{i+1,1}_{(x,y)} & \widehat{\Phi}^{i+1,2}_{(x,y)} & \dots & \widehat{\Phi}^{i+1,\dim V_1}_{(x,y)} & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
\widehat{\Phi}^{i+2,1}_{(x,y)} & \widehat{\Phi}^{i+2,2}_{(x,y)} & \dots & \widehat{\Phi}^{i+2,\dim V_1}_{(x,y)} & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\
\widehat{\Phi}^{N,1}_{(x,y)} & \widehat{\Phi}^{N,2}_{(x,y)} & \dots & \widehat{\Phi}^{N,\dim V_1}_{(x,y)} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}.$$

Здесь $\widehat{\Phi}^{q,m}_{(x,y)} = \widehat{D}\varphi(x)\big\langle \sum\limits_{k\neq i} y_k X_k \big\rangle F^q_{m,i}$. В случае произвольного $1 \leq l \leq M$ «диагональные» элементы матрицы те же, выше диагонали — нули, а элемент $a_{q,m}(y)$ с координатами (q, m), где $q > m + 1$, определяется следующим образом:

$$a_{q,m}(y) = \begin{cases} 0, & \deg X_m + l < \deg X_q,\\ \widehat{\Phi}^{q,m}_{(x,y)} = \widehat{D}\varphi(x)\langle \sum\limits_{k\neq i} y_k X_k \rangle F^q_{m,i}, & \deg X_m + l = \deg X_q,\\ 0, & \deg X_m + l > \deg X_q. \end{cases}$$

Шаг 2. Существование констант $L'_{\max}$ и $L'_{\min}$ для отображения

$$\widehat{D}_P\varphi(x)\langle\cdot\rangle : \ y \mapsto \widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle$$

доказывается так же, как и для отображения φ_Γ (достаточно в приведенном выше доказательстве заменить $\varphi(x) - \varphi(y)$ на $\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle$). Кроме того, без ограничения общности константы $L_{\max}$ и $L_{\min}$ можно считать одними и теми же для φ_Γ и для полиномиальных дифференциалов как для d_∞ и $\tilde{d}^x_\infty$, так и для d_2 и $\tilde{d}^x_2$ (значение $\tilde{d}^x_2$ определяется аналогично значению d_2 с заменой полей X_k на $\widetilde{X}^x_k$ для всех k).

Шаг 3. Покажем, что функция множества $\Phi(A) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(A\cap D)} d\mathscr{H}^\nu_\Gamma(y)$, где A открыто, конечно аддитивна. Достаточно доказать свойство конечной аддитивности на открытых множествах. Пусть A_1, A_2 — непересекающиеся открытые множества. Тогда $\varphi_\Gamma((A_1 \cup A_2) \cap D) = \varphi_\Gamma(A_1 \cap D) \cup \varphi_\Gamma(A_2 \cap D)$ и из определения меры $\mathscr{H}^\nu_\Gamma$ имеем $\Phi(A_1 \cup A_2) \leq \Phi(A_1) + \Phi(A_2)$. Докажем неравенство $\Phi(A_1 \cup A_2) \geq \Phi(A_1) + \Phi(A_2)$. Без ограничения общности можно считать, что множество D ограничено и, следовательно, множества A_1 и A_2 ограничены. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют компактные множества $B_1 \subset A_1$ и $B_2 \subset A_2$ такие, что

$$\mathscr{H}^\nu(B_1 \setminus A_1) + \mathscr{H}^\nu(B_2 \setminus A_2) < \frac{\varepsilon}{2L^\nu_{\max}}. \tag{6}$$

Пусть $\tilde{\sigma} = \inf\{d_\infty(x, y) : x \in B_1, y \in B_2\}$. Так как B_1 и B_2 компактны, то $\tilde{\sigma} > 0$. Положим $\sigma = \frac{\tilde{\sigma}}{2c^2_\Delta + 2}$, где c_Δ — константа из обобщенного неравенства треугольника для точек $\mathbb{G}$: $d_\infty(u,v) \le c_\Delta(d_\infty(u,w) + d_\infty(w,v))$. Тогда для σ-окрестностей $U_\sigma(B_1)$ и $U_\sigma(B_2)$ множеств B_1 и B_2 справедливо

$$\inf\{d_\infty(x,y):\ x \in U_\sigma(B_1) \cap A_1, y \in U_\sigma(B_2) \cap A_2\} \ge \sigma.$$

Кроме того,

$$\Phi(A_1 \cup A_2) \ge \Phi((U_\sigma(B_1) \cap A_1) \cup (U_\sigma(B_2) \cap A_2)) = \Phi(U_\sigma(B_1) \cap A_1) + \Phi(U_\sigma(B_2) \cap A_2),$$

так как в образе $\varphi_\Gamma(D)$

$$\inf\{\tilde{d}^x_\infty(\varphi_\Gamma(x), \varphi_\Gamma(y)):\ x \in U_\sigma(B_1) \cap A_1, y \in U_\sigma(B_2) \cap A_2\} \ge L_{\min}\sigma.$$

Следовательно, поскольку $\tilde{d}^x_\infty \le K\rho^{\frac{1}{M}}$ для некоторого $K < \infty$, где ρ — риманово расстояние, при построении вспомогательной функции $(\mathscr{H}^\nu_\Gamma)_\delta$ (см. обозначение 4) достаточно взять $\delta < \Theta(L_{\min}, K)\sigma^M$. Действительно, в этом случае шары, покрывающие одно из этих множеств, не будут пересекаться с другим, поэтому покрытие объединения множеств $\varphi_\Gamma(U_\sigma(B_1) \cap A_1 \cap D)$ и $\varphi_\Gamma(U_\sigma(B_2) \cap A_2 \cap D)$ — это объединение покрытий каждого из множеств. Отсюда вытекает, что точная нижняя грань соответствующих сумм для объединения равна сумме точных нижних граней для каждого из покрытий.

По доказанному свойству

$$\Phi(U_\sigma(B_1) \cap A_1) + \Phi(U_\sigma(B_2) \cap A_2) \ge \Phi(A_1) - \Phi(A_1 \setminus B_1) + \Phi(A_2) - \Phi(A_2 \setminus B_2),$$

так как $(U_\sigma(B_i) \cap A_i) \cup (A_i \setminus B_i) = A_i$, $i = 1,2$. Из определения меры $\mathscr{H}^\nu_\Gamma$ и соотношения (6) следует, что $\mathscr{H}^\nu_\Gamma(\varphi_\Gamma(B_1 \setminus A_1)) + \mathscr{H}^\nu_\Gamma(\varphi_\Gamma(B_2 \setminus A_2)) < \varepsilon$. Тогда

$$\Phi(A_1 \cup A_2) \ge \Phi(A_1) + \Phi(A_2) - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, неравенство $\Phi(A_1 \cup A_2) \ge \Phi(A_1) + \Phi(A_2)$ и конечная аддитивность функции Φ доказаны.

Шаг 4. Докажем $\mathscr{N}$-свойство Лузина. Пусть $E \subset \mathbb{G}$ — множество нулевой $\mathscr{H}^\nu$-меры. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие субримановыми шарами $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\operatorname{Box}}_2^{x_j}(\varphi(x_j), \rho_j)$, $x_j \in E$, множества $\varphi_\Gamma(E)$ такое, что сумма $\omega_\nu \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \rho_j^\nu$ не превосходит ε.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{K^\nu}$, где

$$K = 1 + \operatorname{Lip}(\varphi) + \operatorname{Lip}(\varphi) \sum_{k:\deg X_k > l} \ \sum_{\substack{m,\beta:\\ \deg X_m = \deg X_k,\\ |\beta|_h = \deg X_k - l}} |F^m_{\beta,i}|.$$

Для $\tilde{\varepsilon}$ найдется покрытие $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{Box}_2(x_j, r_j)$ множества E такое, что $\omega_\nu \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} r_j^\nu < \tilde{\varepsilon}$.

Фиксируем $j \in \mathbb{N}$ и исследуем $\varphi_\Gamma(\operatorname{Box}_2(x_j, r_j))$. В базисе $\{\widetilde{X}^x_k\}_{k=1}^N$ для $\deg X_k > l$ получим

$$\begin{aligned}|\varphi^\Delta_k| &= \Big| y_k + (\varphi(y) - \varphi(x_j)) \sum_{|\beta|_h = \deg X_k - l} F^k_{\beta,i} y^\beta \Big| \\ &\le \Big(1 + \operatorname{Lip}(\varphi) + \operatorname{Lip}(\varphi) \sum_{k:\deg X_k > l} \ \sum_{\substack{m,\beta:\\ \deg X_m = \deg X_k,\\ |\beta|_h = \deg X_k - l}} |F^m_{\beta,i}| \Big) d_2(x_j, y),\end{aligned}$$

для i имеем $\left|\varphi_i^\Delta\right| \leq \mathrm{Lip}(\varphi)d_2(x,y)$, а для всех остальных координат будет $\left|\varphi_l^\Delta\right| \leq d_2(x,y)$. Следовательно,

$$\varphi_\Gamma(E) \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \varphi_\Gamma(\mathrm{Box}_2(x_j,r_j)) \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(\varphi_\Gamma(x_j),Kr_j),$$

и $\omega_\nu \sum\limits_{j\in\mathbb{N}}(Kr_j)^\nu < \varepsilon$. Таким образом, $\mathscr{N}$-свойство отображения φ_Γ относительно внутренней меры $\mathscr{H}^\nu_\Gamma$ доказано.

Шаг 5. Применяя результаты [33, следствие 5, предложение 5] о восстановлении функции множества по ее производной, имеем

$$\Phi(A) = \int\limits_A \Phi'(x)\,d\mathscr{H}^\nu(x),$$

где

$$\Phi'(x) = \lim_{\substack{r\to 0,\\ x\in\mathrm{Box}_2(y,r)}} \frac{\Phi(\mathrm{Box}_2(y,r))}{\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))}.$$

Найдем аналитическое выражение для $\Phi'(x)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим подмножество $D_\varepsilon = D\setminus\Sigma_\varepsilon$ такое, что отображение φ на нем непрерывно hc-дифференцируемо, а величина $o(\cdot)$ (из определения hc-дифференцируемости отображения φ) равномерна по $x\in D\setminus\Sigma_\varepsilon$. Действительно, эта величина может быть сделана равномерной для любого липшицева отображения многообразия Карно в пространство Карно — Каратеодори, так как в D можно выбрать счетное всюду плотное множество точек $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ области определения φ, определить измеримые функции

$$f_{k,n}(x) = \chi_{\mathrm{Box}(x,1/n)}(y_k)\frac{d_\infty(\varphi(y_k),\widehat{D}\varphi(x)\langle y_k\rangle)}{d_\infty(y_k,x)}$$

и положить $f_n(x) = \sup\limits_k\{f_{k,n}(x)\}$. В силу непрерывности квазиметрик в образе и прообразе она совпадает со значением

$$\sup_{\mathrm{Box}(x,1/n)} \frac{d_\infty(\varphi(y),\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)}{d_\infty(y,x)}.$$

По определению hc-дифференцируемости $f_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ для почти всех $x\in D$. Далее остается применить теорему Егорова.

Для фиксированных $\sigma>0$, $r>0$ всегда можно построить множество $\Delta_{\sigma r^\nu}$, $\mathscr{H}^\nu(\Delta_{\sigma r^\nu}) < \sigma r^\nu$, на дополнении к которому измеримые функции

$$\Psi_m(y) = \frac{m^\nu}{\omega_\nu}\int\limits_{\mathrm{Box}_2(y,1/m)\cap D_\varepsilon} d\mathscr{H}^\nu(x), \quad m\in\mathbb{N},$$

равномерно сходятся к единице.

Без ограничения общности можно предположить, что $\Delta_{\sigma r^\nu} \subset \Delta_{\sigma t^\nu}$ для $r<t$ и что каждое из множеств $D_\varepsilon\setminus\Delta_{\sigma r^\nu}$ компактно (см. детали в [34]).

Так как на компакте $D_\varepsilon\setminus\Delta_{\sigma r^\nu}$ hc-дифференциал $\widehat{D}\varphi$ равномерно непрерывен, для фиксированного $\eta>0$ (считаем, что $\eta<1$) можно выбрать $r>0$ таким образом, что если произвольные точки y^1,y^2,y^3,y^4 удовлетворяют условию

$$\max\{d_\infty(y^1,y^2),d_\infty(y^1,y^3),d_\infty(y^3,y^4)\} < c_\Delta(c_\Delta(2c_\Delta r/L_{\min}+r/L_{\min})+r/L_{\min})$$

(можно считать, что $c_\Delta\geq 1$), то

$$|\mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y^1),y^2) - \mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y^3),y^4)| < \eta/3$$

и

$$\Big|\sqrt{\det(\tilde{g}^{\varphi_\Gamma(y_1)}|_{TS(y_1)}{}^*(y_2)\tilde{g}^{\varphi_\Gamma(y_1)}|_{TS(y_1)}(y_2))} \\ - \sqrt{\det(\tilde{g}^{\varphi_\Gamma(y_3)}|_{TS(y_3)}{}^*(y_4)\tilde{g}^{\varphi_\Gamma(y_3)}|_{TS(y_3)}(y_4))}\Big| < \frac{\eta}{3},$$

где $TS(y_k) = T_{\varphi_\Gamma(y^k)}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y^k)\langle\mathbb{G}\rangle)$, $k = 1, 3$, а $\tilde{g}$ — риманов тензор в $\widetilde{\mathbb{G}}$. Неформально это означает, что если в образе в шаре радиуса r взять две точки и рассмотреть два шара радиуса r с центрами в этих точках (рассматриваются расстояния, ассоциированные с этими точками), то на прообразе этих трех шаров якобианы будут отличаться не более, чем на $\frac{\eta}{3}$. Отметим, что дифференциал отображения $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)$ в точке y имеет «блочно-диагональный» вид (так как все коэффициенты, находящиеся ниже «диагональных» блоков — это константы, умноженные на координаты точки, в которой считаем дифференциал, относительно точки y), и по теореме Бине — Коши имеем

$$\frac{\sqrt{\det(g^*(y)g(y))}\,\mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y), y)}{\sqrt{\det(\tilde{g}^{\varphi_\Gamma(y)}|_{TS(y)}{}^*(y)\tilde{g}^{\varphi_\Gamma(y)}|_{TS(y)}(y))}} \\ = \sqrt{\det(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma|_0^*(y)\widehat{D}_P\varphi_\Gamma|_0(y))} = \sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(y)|_i^2}$$

(см. обозначение 5), где g — риманов тензор в $\mathbb{G}$, а $TS(y) = T_{\varphi_\Gamma(y)}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)\langle\mathbb{G}\rangle)$. Здесь символ $|_0$ означает, что рассматривается матрица $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)$ на нулевом векторе, т. е. все «нижнедиагональные» элементы равны нулю.

Рассмотрим достаточно малое $r > 0$, точку плотности $u \in D_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$ множества D_ε, и открытый шар $\mathrm{Box}_2(u, r)$. Так как $\mathscr{H}^\nu(\Delta_{\sigma r^\nu}) \le \sigma r^\nu$, то $\mathscr{H}^\nu_\Gamma(\varphi_\Gamma(\Delta_{\sigma r^\nu})) \le L^\nu_{\max}\sigma r^\nu$ и

$$\mathscr{H}^\nu_\Gamma(\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}_2(u, r) \cap D_\varepsilon)) \le \mathscr{H}^\nu_\Gamma(\varphi_\Gamma((\mathrm{Box}_2(u, r) \cap D_\varepsilon) \setminus \Delta_{\sigma r^\nu})) + L^\nu_{\max}\sigma r^\nu.$$

Фиксируем $\tau > 0$ и (для фиксированных σ и r) выберем $\delta \le \delta_0(\tau, \sigma, r)$, где $\delta_0 \in (0, \sigma r)$ такое, что для $1/m \le 2\max\{\delta, \delta/L_{\min}\}$ имеем

• $\Psi_m(y) \ge 1 - \tau$ для $y \in \mathrm{Box}_2(u, r) \cap D_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$ (это возможно в силу равномерной сходимости $\Psi_m(y)$ к единице на $D_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$);

• величина $o(1)$, на которую умножается $d_\infty(\cdot,\cdot)$ в соотношениях вида (5), не превышает $\tau \cdot L_{\min}$, если точки принадлежат шару, радиус которого не превосходит $2\max\{\delta, \delta/L_{\min}\}$.

Для выбранного $\delta > 0$ рассмотрим покрытие образа $\varphi(\mathrm{Box}_2(u, r) \setminus \Delta_{\sigma r^\nu})$ шарами $\{\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ из конструкции меры Хаусдорфа (см. обозначение 4 с описанием величины $(\mathscr{H}^\nu_\Gamma)_\delta$); здесь $y_j = \varphi_\Gamma^{-1}(x_j)$, $j \in \mathbb{N}$.

Из свойств множества $\Delta_{\sigma r^\nu}$ следует, что для любого покрытия шарами $\{\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ образа $\varphi(\mathrm{Box}_2(u, r) \setminus \Delta_{\sigma r^\nu})$ из определения меры $\mathscr{H}^\nu_\Gamma$ центры x_j — образы точек $y_j \in \mathrm{Box}_2(u, r) \cap D_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$, являющихся точками плотности множества $\mathrm{Box}_2(u, r) \cap D_\varepsilon$.

Для выбранного выше $\delta \in (0, \delta_0)$ покроем множество $\varphi(\mathrm{Box}_2(u, r) \setminus \Delta_{\sigma r^\nu})$ системой шаров $\widetilde{\mathrm{Box}}^{y_j}(x_j, r_j)$, где $r_j < \delta$. Заметим, что для отображения $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)$ справедливо

$$\mathscr{H}^{N-1}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)\langle\mathbb{G}\rangle \cap \widetilde{\mathrm{Box}}^{y_j}(x_j, r_j)) \\ = r_j^\nu \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \sqrt{\det(\tilde{g}^{x_j}|_{TS(y_j)}{}^*(y_j)\tilde{g}^{x_j}|_{TS(y_j)}(y_j))},$$

где $S(y_j) = \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)\langle\mathbb{G}\rangle$. Это следует из того, что при переходе в координаты первого рода относительно точки $\varphi_\Gamma(y_j)$ единственный вектор, ортогональный образу поверхности $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)\langle U\rangle$, лежит в пространстве V_l. Тогда, применяя классическую формулу площади для каждого отображения $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)\langle\cdot\rangle$, $j \in \mathbb{N}$, из соотношения

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^{N-1}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)\langle\mathbb{G}\rangle \cap \widetilde{\mathrm{Box}}^{y_j}(x_j, r_j)) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int\limits_{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j,r_j)\rangle} \mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j), y)\, d\mathscr{H}^{N-1}(y)$$

по выбору $r > 0$ и $\delta \le r$ имеем

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^{N-1}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)\langle\mathbb{G}\rangle \cap \widetilde{\mathrm{Box}}^{y_j}(x_j, r_j)) = \sqrt{\det(\tilde{g}^{\varphi(u)}|_{TS(u)}{}^*(u)\tilde{g}^{\varphi(u)}|_{TS(u)}(u))}(1+\hat{\eta}) \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^{\nu}$$

и

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \int\limits_{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j,r_j)\rangle} \mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j), y)\, d\mathscr{H}^{N-1}(y) = \mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(u), u)(1+\tilde{\eta}) \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^{N-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j)\big\rangle\big),$$

для некоторых величин $|\hat{\eta}|, |\tilde{\eta}| \le \frac{\eta}{3}$. Тогда

$$\begin{aligned}\omega_\nu \sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^\nu &= \frac{\omega_\nu}{\prod\limits_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}} \frac{\mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(u), u)}{\sqrt{\det(\tilde{g}^{\varphi(u)}|_{TS(u)}{}^*(u)\tilde{g}^{\varphi(u)}|_{TS(u)}(u))}} \\ &\quad\times \frac{1+\tilde{\eta}}{1+\hat{\eta}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^{N-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j)\big\rangle\big) \\ &= \frac{\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(y)|_i^2}}{\sqrt{\det(g^*(u)g(u))}}(1+\bar{\eta}) \frac{\omega_\nu}{\prod\limits_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^{N-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j)\big\rangle\big)\end{aligned}$$

для некоторой величины $|\bar{\eta}| \le \eta$. Исследуем, какое множество может покрывать набор $\big\{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j)\big\rangle\big\}_{j\in\mathbb{N}}$. Для этого сравним отображения $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)$ и φ_Γ.

Фиксируем $j \in \mathbb{N}$. Пусть $z \in \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j)\big\rangle$. Напомним, что $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j)\big\rangle \subset \mathrm{Box}_2(y_j, 2\max\{\delta, \delta/L_{\min}\})$. Из билипшицевости отображения $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)\langle\cdot\rangle$ следует, что

$$d_2(y_j, z) \le \frac{1}{L_{\min}} \tilde{d}_2^{y_j}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)\langle y_j\rangle, \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)\langle z\rangle).$$

Если $z \in D_\varepsilon$, то из (5) и выбора $\delta > 0$ вытекает, что $z \in \varphi^{-1}\big(\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j(1+\tau))\big)$. Отметим, что верное для координат графиков условие (5) является более сильным, чем соотношение $\tilde{d}_2^{y_j}(\cdot,\cdot) = o(d_2(y_j, z))$. Подчеркнем, что в обобщенном неравенстве треугольника здесь нет необходимости.

Аналогично доказывается, что если $z \in \varphi^{-1}\big(\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j)\big) \cap D_\varepsilon$, то $z \in \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j(1+\tau))\big\rangle$.

Следовательно, набор $\big\{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j(1+\tau))\big\rangle\big\}_{j\in\mathbb{N}}$ покрывает множество $(\mathrm{Box}_2(g,r)\cap D_\varepsilon)\setminus\Delta_{\sigma r^\nu}$. Сумма, соответствующая этому набору, отличается от исходной $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^{N-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j)\big\rangle\big)$ на множитель $(1+\tau)^\nu$.

Каждое из множеств $\big\{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j(1+\tau))\big\rangle\big\}_{j\in\mathbb{N}}$ лежит в соответствующем шаре $\mathrm{Box}_2(y_j, 2r_j/L_{\min})$, и в силу выбора $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathscr{H}^{N-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j(1+\tau))\big\rangle\big)\\
&\qquad\qquad \geq \mathscr{H}^{N-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j(1+\tau))\big\rangle \cap D_\varepsilon\big)\\
&\geq \mathscr{H}^{N-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y_j)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y_j}(x_j, r_j(1+\tau))\big\rangle\big) - \tau\mathscr{H}^{N-1}(\mathrm{Box}_2(y_j, 2r_j/L_{\min})).
\end{aligned}$$

Введем на $\mathbb{G}$ функцию $d^\varphi(y,z) = \tilde{d}_2^y(\varphi_\Gamma(y), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)\langle z\rangle)$. Она является квазиметрикой с обобщенной симметричностью (см. п. II, шаг 2). Действительно,

$$\begin{aligned}
&\tilde{d}_2^y(\varphi_\Gamma(y), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)\langle z\rangle) = \tilde{d}_2^y(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)\langle y\rangle, \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)\langle z\rangle)\\
&\qquad\qquad \leq L_{\max}d_2(y,z) = L_{\max}d_2(z,y) \leq \frac{L_{\max}}{L_{\min}}\tilde{d}_2^z(\varphi_\Gamma(z), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(z)\langle y\rangle)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\tilde{d}_2^y(\varphi_\Gamma(y), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)\langle z\rangle) \leq L_{\max}d_2(y,z) \leq c_\Delta L_{\max}(d_2(y,x) + d_2(x,z))\\
&\qquad\qquad \leq c_\Delta\frac{L_{\max}}{L_{\min}}\big(\tilde{d}_2^y(\varphi_\Gamma(y), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)\langle x\rangle) + \tilde{d}_2^x(\varphi_\Gamma(x), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle z\rangle)).
\end{aligned}$$

Шарами в этой квазиметрике являются множества $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y}(\varphi_\Gamma(y), r)\big\rangle$, $y \in D$, $r > 0$. Локально они удовлетворяют условию удвоения (это вытекает из формулы площади для отображения $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)$). Иными словами, на пересечении достаточно малой окрестности, содержащей точку u, существует константа P такая, что для точек y из этого пересечения верно

$$\mathscr{H}^{N-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y}(\varphi_\Gamma(y), 2r)\big\rangle\big) \leq P\mathscr{H}^{N-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)^{-1}\big\langle\widetilde{\mathrm{Box}}_2^{y}(\varphi_\Gamma(y), r)\big\rangle\big).$$

Следовательно, к этим множествам применима теорема Витали.

Применяя теорему Витали [35] к риманову шару и покрытию Витали шарами в d^φ, получаем, что существует дизъюнктное покрытие шарами в d^φ с точностью до множества нулевой меры такое, что при увеличении радиуса каждого из шаров в d^φ в 2 раза будет покрыт весь шар. Отсюда следует, что риманова мера Хаусдорфа и мера Хаусдорфа, построенная по d^φ, абсолютно непрерывны одна относительно другой. Таким образом, множество нулевой римановой меры является множеством нулевой меры Хаусдорфа, построенной по d^φ.

Для завершения доказательства следует учесть, что

$$\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(u,r)) = \frac{\omega_\nu}{\prod\limits_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}}\frac{\mathscr{H}^{N-1}(\mathrm{Box}_2(u,r))}{\sqrt{\det(g^*(u)g(u))}(1+o(1))},$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$. Таким образом, получили свойства, при выполнении которых доказана формула площади для липшицевых отображений [33]. Остается почти дословно применить метод работы [33] (см, детали в [33, теорема 4, шаг 5]).

В частности, при дифференцировании полиномиального hc-дифференциала получаем, что, хотя φ_Γ и не является липшицевым отображением, якобиан для нахождения его площади есть определитель Грама матрицы, состоящей из «диагональных» блоков полиномиального hc-дифференциала. Таким образом,

$$\Phi'(x) = \sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(x)|_i^2}$$

почти всюду (напомним, что i таково, что $\ell = \exp(\mathbb{R} \cdot X_i)(\mathbf{0})$), и справедлива формула

$$\int\limits_D \sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(y)|_i^2}\, d\mathscr{H}^\nu(y) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(D)} d\mathscr{H}_\Gamma^\nu(x). \quad \square$$

Замечание 4. Нетрудно убедиться в том, что относительно d_∞^x отображение φ_Γ в общем случае не будет липшицевым, если $l \neq M$. Действительно, пусть $l = M-1$. Тогда при подсчете координат точки $\varphi_\Gamma(y)$ относительно точки $\varphi_\Gamma(z)$, соответствующих степени M, получаем

$$\widetilde{\varphi}_j^\Delta = y_j + (\varphi(y) + \varphi(z) - 2\varphi(x)) \sum_{|\beta|_h = 1} F_{\beta,i}^j y^\beta,$$

где второе слагаемое не всегда эквивалентно величине $d_\infty(y,z)^{M-1} \sum\limits_{|\beta|_h=1} F_{\beta,i}^j y^\beta$. Поэтому оно не будет hc-дифференцируемым. Из приведенного выше соотношения только следует, что если $\max\{d_\infty(y,x),\ d_\infty(z,x)\} \leq r$, то величина $|\widetilde{\varphi}_j^\Delta|$ эквивалентна r^M. Тем не менее для таких отображений в теореме 2 доказаны аналог дифференцируемости и формула площади.

Определение 15. Пусть φ, ψ — липшицевы отображения из $\mathbb{G}$ в $\ell = \exp(\mathbb{R} \cdot X_i)(\mathbf{0})$. Отображение $\varphi_{\varepsilon,\psi}(x) = \exp((\varphi + \varepsilon\psi)(x)X_i)(\mathbf{0})$ называется *вариацией* отображения φ.

Отметим, что $\varphi_{\varepsilon,\psi}$ является липшицевым относительно субримановых метрик отображением и $\widehat{D}\varphi_{\varepsilon,\psi}(x) = \widehat{D}\varphi(x) + \varepsilon\widehat{D}\psi(x)$ почти всюду.

Далее рассмотрим группы $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ такие же, как в описании 1, и открытое множество $D \subset \mathbb{G}$ такое, что $\partial D \neq \varnothing$. Пусть $\varphi : \mathbb{G} \to \ell = \exp(\mathbb{R} \cdot X_i)(\mathbf{0})$ — липшицево относительно субримановых метрик отображение и $\gamma = \varphi_\Gamma(\partial D)$.

Для функции $\psi : \mathbb{G} \to \ell$ введем величину

$$\|\psi\|_m = \left(\int\limits_D (d_\infty(\mathbf{0}, \psi(x))^m + |\widehat{D}\psi(x)|_i^m)\, d\mathscr{H}^\nu(x) \right)^{\frac{1}{m}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Определение 16. Область $D \subset \widetilde{\mathbb{G}}$ называется *горизонтально достижимой*, если любую ее внутреннюю точку можно соединить с граничной точкой кривой, составленной из конечного числа интегральных линий горизонтальных векторных полей.

Если ℓ — интегральная линия горизонтального векторного поля, а область D горизонтально достижима, то для произвольной функции $\psi : D \to \ell$ введем величину

$$\|\psi\|_{H,m} = \left(\int\limits_D |\widehat{D}\psi(x)|_i^m\, d\mathscr{H}^\nu(x) \right)^{\frac{1}{m}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Свойство 5. *Величина $\|\cdot\|_m$ является нормой. Неотрицательность, симметричность и неравенство треугольника следуют непосредственно из определения. Также из определения вытекает, что если $\|\psi\|_m = 0$, то и $\psi = 0$ почти всюду.*

Аналогичное утверждение справедливо и для $\|\cdot\|_{H,m}$, если область D горизонтально достижима. В противном случае $\|\cdot\|_{H,m}$ является полунормой.

Теорема 3. (I) *Для того чтобы поверхность $\varphi_\Gamma(D)$ имела минимальную внутреннюю меру в классе всех поверхностей $\chi_\Gamma(D)$ таких, что $\chi_\Gamma|_{\partial D} = \gamma$, где $\chi : \mathbb{G} \to \ell$ — липшицево относительно субримановых (квази)метрик отображение, необходимо, чтобы*

$$\int\limits_D \frac{\langle \widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\psi(x)\rangle_i}{\sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(x)|_i^2}}\, d\mathscr{H}^\nu(x) = 0 \tag{7}$$

для любого липшицева относительно субримановых (квази)метрик отображения $\psi : \mathbb{G} \to \ell$ такого, что $\psi|_{\partial D} = 0$. (Здесь символ $\langle \widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\psi(x)\rangle_i$ означает скалярное произведение i-х строк hc-дифференциалов.)

(II) *Если существует константа $K > 0$ такая, что*

$$\int\limits_D \frac{|\widehat{D}\psi(x)|_i^2}{\left(1 + |\widehat{D}\varphi(x)|_i^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, d\mathscr{H}^\nu(x) \geq K\|\psi\|_4^2, \tag{8}$$

и выполнено соотношение (7), то на отображении φ функционал площади достигает минимального в классе отображений вида $\varphi+\varepsilon\psi$, где для ψ справедливо (8), значения в его окрестности.

(III) *Пусть ℓ — интегральная линия горизонтального векторного поля, и пусть D — область с гладкой границей, а отображение φ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. Тогда для того, чтобы поверхность $\varphi_\Gamma(D)$ имела минимальную внутреннюю меру в классе всех поверхностей $\chi_\Gamma(D)$ таких, что $\chi_\Gamma|_{\partial D} = \gamma$, где $\chi : \mathbb{G} \to \ell$ — липшицево относительно субримановых метрик отображение, $\|\chi - \varphi\| \leq \kappa$, $\kappa > 0$, необходимо, чтобы*

$$\sum_{j=1}^{\dim V_1} X_j \left\langle \frac{X_j\varphi}{\sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(x)|^2}} \right\rangle (x) = 0. \tag{9}$$

(IV) *Пусть ℓ — интегральная линия горизонтального векторного поля, а область D горизонтально достижима. Тогда необходимое условие экстремума (7) является достаточным для отображений вида $\varphi + \varepsilon\psi$, где $\|\psi\|_{H,2} \geq L\|\psi\|_{H,4}$. В частности, в условиях п.* (III) *условие* (9) *достаточно.*

Доказательство. (I) Для вывода необходимого условия достаточно рассмотреть вариацию $\varphi_{\varepsilon,\psi}$ и внутреннюю меру соответствующей поверхности как функцию параметра ε. Непосредственно с помощью разложения в ряд Тейлора функции $f(\varepsilon) = \sqrt{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j + \varepsilon z_j)^2}$ вблизи точки 0 проверяется, что функционал площади дифференцируем для любого φ относительно норм $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_{H,2}$. Подчеркнем, что здесь в качестве x_j, $j = 1, \dots, N$, берутся координатные функции hc-дифференциала $\widehat{D}\varphi$ при исследовании дифференцируемости функционала площади

$$S(\widehat{D}\phi) = \int\limits_D \sqrt{1 + |\widehat{D}\phi(y)|_i^2}\, d\mathscr{H}^\nu(y)$$

в точке $\widehat{D}\varphi$, а при исследовании дифференцируемости в точке $\widehat{D}(\varphi + \varepsilon_0\xi)$ в качестве x_j, $j = 1, \dots, N$, берутся координатные функции hc-дифференциала $\widehat{D}(\varphi + \varepsilon_0\xi)$. Получаем

$$|f(\varepsilon) - f(0) - f'(0)\varepsilon| = \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\left| \sum\limits_{j=1}^n z_j^2 + \sum\limits_{j=1}^n z_j^2 \sum\limits_{j=1}^n (x_j + \tilde{\varepsilon} z_j)^2 - \left(\sum\limits_{j=1}^n \left(x_j z_j + \tilde{\varepsilon} z_j^2 \right) \right)^2 \right|}{\left(1 + \sum\limits_{j=1}^n (x_j + \tilde{\varepsilon} z_j)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\sum\limits_{j=1}^n z_j^2 \left| 1 + 2 \sum\limits_{j=1}^n x_j^2 \right|}{\left(1 + \sum\limits_{j=1}^n (x_j + \tilde{\varepsilon} z_j)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \leq \varepsilon^2 \sum_{j=1}^n z_j^2 \cdot K,$$

где $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$. Кроме того, так как мера множества D конечна, в силу неравенства Гёльдера функционал площади дифференцируем также и относительно норм $\|\cdot\|_3$, $\|\cdot\|_4$ и $\|\cdot\|_{H,3}$, $\|\cdot\|_{H,4}$. Поэтому соотношение (7) является необходимым условием экстремума функционала площади.

(II) Это утверждение — переформулировка следующего условия сильной положительности второй вариации функционала площади: *если у дважды дифференцируемого функционала F, определенного на нормированном пространстве, первая вариация в точке ζ^* равна нулю, а вторая вариация в этой точке сильно положительна, т. е. существует $K > 0$ такое, что $|\delta^2 F(\zeta^*, \delta\zeta)| \geq K \|\delta\zeta\|^2$, то в точке ζ^* функционал F имеет минимум.* С помощью разложения в ряд Тейлора функции

$$f(\varepsilon) = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^n (x_j + \varepsilon z_j)^2}$$

вблизи точки 0 проверяется, что функционал площади дважды дифференцируем для любого φ относительно норм $\|\cdot\|_4$ и $\|\cdot\|_{H,4}$. Действительно,

$$\left| f(\varepsilon) - f(0) - f'(0)\varepsilon - \frac{f''(0)}{2}\varepsilon^2 \right|$$

$$= \frac{\varepsilon^3}{2} \frac{\left| \sum\limits_{j=1}^n z_j^2 + \sum\limits_{j=1}^n z_j^2 \sum\limits_{j=1}^n (x_j + \tilde{\varepsilon} z_j)^2 - \left(\sum\limits_{j=1}^n \left(x_j z_j + \tilde{\varepsilon} z_j^2 \right) \right)^2 \right|}{\left(1 + \sum\limits_{j=1}^n (x_j + \tilde{\varepsilon} z_j)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} \left| \sum_{j=1}^n \left(x_j z_j + \tilde{\varepsilon} z_j^2 \right) \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon^3}{2} \frac{\sum\limits_{j=1}^n z_j^2 \left| 1 + 2 \sum\limits_{j=1}^n x_j^2 \right|}{\left(1 + \sum\limits_{j=1}^n (x_j + \tilde{\varepsilon} z_j)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} \left| \sum_{j=1}^n \left(x_j z_j + \tilde{\varepsilon} z_j^2 \right) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \left(|\varepsilon z_j| + \varepsilon^2 z_j^2 \right) \cdot \varepsilon^2 \sum_{j=1}^n z_j^2 \cdot K,$$

где $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$. Тогда условие сильной положительности второй вариации функционала площади переписывается как

$$\delta^2 S(\varphi, \varepsilon\psi) \geq \int\limits_D \frac{|\widehat{D}\varepsilon\psi(x)|_i^2}{\big(1 + |\widehat{D}\varphi(x)|_i^2\big)^{\frac{3}{2}}}\, d\mathscr{H}^\nu(x) \geq K\|\varepsilon\psi\|_4^2.$$

Отметим, что здесь рассматриваются нормы $\|\cdot\|_4$ и $\|\cdot\|_{H,4}$ ввиду наличия слагаемого $\varepsilon^4 \sum\limits_{j=1}^n z_j^2 \sum\limits_{j=1}^n z_j^2$. Для слагаемого $\varepsilon^3 \sum\limits_{j=1}^n |z_j| \cdot \sum\limits_{j=1}^n z_j^2$ остается применить неравенство Гёльдера.

(III) Учитывая разложение базисных полей для групп Карно [28], получаем

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_D \frac{\langle \widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\psi(x)\rangle}{\sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(x)|^2}}\, d\mathscr{H}^\nu(x) &= \sum_{j=1}^{\dim V_1} \int\limits_D \psi(x) \cdot X_j \bigg\langle \frac{\widehat{D}\varphi_j}{\sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi|^2}} \bigg\rangle (x)\, d\mathscr{H}^\nu(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\dim V_1} \int\limits_D \psi(x) \cdot X_j \bigg\langle \frac{X_j\varphi}{\sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(x)|^2}} \bigg\rangle (x)\, d\mathscr{H}^\nu(x), \end{aligned}$$

так как $\psi|_{\partial D} = 0$. Отсюда следует, что, в частности, это справедливо и для всех гладких функций ψ, поэтому

$$\sum_{j=1}^{\dim V_1} X_j \bigg\langle \frac{X_j\varphi}{\sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(x)|^2}} \bigg\rangle (x) = 0$$

почти всюду. То, что экстремум является минимумом, доказано в (I).

(IV) Для отображений, изучаемых в п. IV, достаточно рассматривать норму $\|\cdot\|_H$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} &\int\limits_D \frac{|\widehat{D}\psi(x)|_i^2}{\big(1 + |\widehat{D}\varphi(x)|_i^2\big)^{\frac{3}{2}}}\, d\mathscr{H}^\nu(x) \\ &\qquad \geq \frac{1}{\big(1 + \max\limits_D\{|\widehat{D}\varphi(x)|_i^2\}\big)^{\frac{3}{2}}} \Bigg(\sqrt{\int\limits_D |\widehat{D}\psi(x)|_i^2\, d\mathscr{H}^\nu(x)}\Bigg)^2 \\ &\qquad\qquad \geq \frac{L^2}{\big(1 + \max\limits_D\{|\widehat{D}\varphi(x)|_i^2\}\big)^{\frac{3}{2}}} \|\psi\|_{H,4}^2. \end{aligned}$$

Кроме того, в условиях п. (III) рассуждения, применяемые в этом пункте, обратимы. $\square$

Доказанная теорема позволяет ввести следующее

Определение 17. Пусть ℓ — интегральная линия горизонтального векторного поля, и пусть D — область с гладкой границей и отображение φ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. *Субримановой средней кривизной* поверхности-графика $\varphi_\Gamma(D)$ называется

$$H(x) = \sum_{j=1}^{\dim V_1} X_j \bigg\langle \frac{X_j\varphi}{\sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(x)|^2}} \bigg\rangle (x).$$

Из результатов работы выводим

Предложение 1. *Пусть ℓ — интегральная линия горизонтального векторного поля, D — горизонтально достижимая область с гладкой границей, а отображение φ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. Тогда минимальные (в классе поверхностей, определяемых отображениями вида $\varphi + \varepsilon\psi$, где для ψ выполнено условие (8)) поверхности — это поверхности нулевой субримановой средней кривизны.*

Автор благодарит С. К. Водопьянова за ценные советы по улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Citti G., Sarti A.* A cortical based model of perceptual completion in the rototranslation space // Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. 2004. V. 3. P. 145–161.
2. *Hladky R. K., Pauls S. D.* Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging Vision. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
3. *Petitot J.* Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionelles. Paris: Éd. École Polytech., 2008.
4. *Capogna L., Citti G., Manfredini M.* Regularity of non-characteristic minimal graphs in the Heisenberg group H^1 // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 5. P. 2115–2160.
5. *Capogna L., Citti G., Manfredini M.* Smoothness of Lipschitz intrinsic minimal graphs in Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, $n > 1$ // Crelle's J. (To appear).
6. *Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M.* A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing // Amer. J. Math. 2008. V. 130, N 2. P. 317–339.
7. *Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M., Pauls S. D.* Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // J. Diff. Geom. 2009. V. 81. P. 251–295.
8. *Garofalo N., Pauls S. D.* The Bernstein problem in the Heisenberg group. West Lafayette, Indiana: Purdue Univ., 2003. (Preprint).
9. *Garofalo N., Nhieu D.-M.* Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces // Comm. Pure Appl. Math. 1996. V. 49, N 10. P. 1081–1144.
10. *Pauls S.* Minimal surfaces in the Heisenberg group // Geom. Dedicata. 2004. V. 104. P. 201–231.
11. *Cheng J. H., Hwang J. F.* Properly embedded and immersed minimal surfaces in the Heisenberg group // Bull. Austral. Math. Soc. 2004. V. 70, N 3. P. 507–520.
12. *Cheng J. H., Hwang J. F., Malchiodi A., Yang P.* Minimal surfaces in pseudohermitian geometry and the Bernstein problem in the Heisenberg group, revised version 2004 // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. 2005. V. 1. P. 129–177.
13. *Vittone D.* Submanifolds in Carnot groups. Pisa: Ed. della Normale, 2008.
14. *Bigolin F.* Intrinsic regular hypersurfaces in Heisenberg groups and weak solutions of non linear first-order PDEs: Thes. … doct. phylosophy. Univ. Degli Studi di Trento. 2008.
15. *Franchi B., Serapioni R., Serra Cassano F.* Regular hypersurfaces, Intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups // Comm. Anal. Geom. 2003. V. 5, N 5. P. 909–944.
16. *Kozhevnikov A.* Rugosité des lignes de niveau des applications différentiables sur le groupe d'Heisenberg. Palaiseau, France, 2011. (Preprint / École Polytechnique).
17. *Басалаев С. Г.* Параметризации поверхностей уровня вещественнозначных отображений групп Карно // Мат. тр., 2012 (принята к печати).
18. *Басалаев С. Г.* Одномерные поверхности уровня hc-дифференцируемых отображений на пространствах Карно — Каратеодори // Сиб. электрон. мат. изв. (в печати).
19. *Federer H., Fleming W. H.* Normal and integral currents // Ann. Math. 1960. V. 72, N 2. P. 458–520.
20. *Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
21. *Тужилин А. А., Фоменко А. Т.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
22. Minimal surfaces / ed. A. T. Fomenko. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (Advances in Soviet mathematics; V. 15).

23. *Миклюков В .М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Волгоград: Изд-во Волгоградск. гос. ун-та, 2011.

24. *Киселев А. В.* О минимальных поверхностях, связанных с неполиномиальными контактными симметриями // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12, № 7. С. 93–100.

25. *Bigolin F., Serra Cassano F.* Distributional solutions of Burgers' equation and intrinsic regular graphs in Heisenberg groups // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 366. P. 561–568.

26. *Vodop'yanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–302.

27. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and Mathematical Physics. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.

28. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1992.

29. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Формула коплощади для гладких контактных отображений многообразий Карно // Докл. РАН. 2007. Т. 417, № 5. С. 583–588.

30. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–318.

31. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. (2). 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.

32. *Грешнов А. В.* Об обобщенном неравенстве треугольника для квазиметрик, индуцированных некоммутирующими векторными полями // Мат. тр. 2011. Т. 14, № 1. С. 70–98.

33. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math., 2003. V. 14, № 4. P. 78–125; II // Sib. Adv. Math., 2004. V. 15, № 1. P. 1–35.

34. *Карманова М. Б.* Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. РАН. 2008. Т. 423, № 5. С. 603–608.

35. *Guzmán M.* Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$. Berlin: Springer-Verl., 1975.

Статья поступила 12 марта 2012

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`maryka@math.nsc.ru`