*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2012. Том 53, № 4*

*УДК 517.954*

# ОБОБЩЕННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ЛЯПУНОВА, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ СОБОЛЕВА

**Х. Д. Квон, С. А. Тимошин**

**Аннотация.** Рассматриваются неравенства типа Ляпунова, обобщающие известное неравенство, дающее необходимое условие существования решений краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Для определенных критических случаев, когда неравенства строгие, изучается асимптотическое поведение минимизирующих последовательностей.

**Ключевые слова:** эллиптическое уравнение, предельный показатель, неравенство Ляпунова.

## 1. Постановка задачи

Пусть $a(x)$ — непрерывная на отрезке $[c,d]$ функция. Тогда согласно известному неравенству Ляпунова необходимым условием существования решения $u$ для задачи

$$u''(x) + a(x)u(x) = 0, \quad x \in (c,d), \quad u(c) = u(d) = 0 \tag{1}$$

является выполнение неравенства

$$\int_c^d |a(x)|\,dx > \frac{4}{d-c}.$$

Более того, постоянная $\frac{4}{d-c}$ оптимальна (см., например, [1, XI.5]). Иными словами,

$$\beta_1 := \inf_{a\in\Lambda_0} \|a\|_1 = \frac{4}{d-c}, \tag{2}$$

где $\Lambda_0 = \{a \in C\,[c,d] : (1)$ имеет нетривиальное решение$\}$, и значение $\beta_1$ недостижимо.

Исследуя нелинейные резонансные краевые задачи, Канада, Монтеро и Вильегас [2] обобщили данный результат, рассмотрев величину

$$\beta_p := \inf_{a\in\Lambda_0} \|a\|_p$$

для всех $p$, $1 \le p \le \infty$, и получив явное выражение для $\beta_p$ в терминах $p$, $c$ и $d$. В следующей работе [3] они изучили аналогичную задачу для дифференциальных уравнений в частных производных и выяснили, что в данном случае размерность задачи играет важную роль, указывая тем самым на глубокое отличие проблемы для уравнений в частных производных от случая обыкновенного дифференциального уравнения. Именно, в [3] рассмотрена задача

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = a(x)u(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ — гладкая ограниченная область, $a \in L_q(\Omega)$ для некоторого $q \geq 1$ (см. также [3, замечание 5]). При этом качественное изучение величины

$$\beta_p := \inf_{a \in \Lambda \cap L_p(\Omega)} \|a\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

где $\Lambda$ определяется по аналогии с $\Lambda_0$, дано в следующей теореме.

**Теорема** [3]. *Справедливы утверждения*

1. *Если* $N = 2$, *то* $\beta_p > 0 \Leftrightarrow 1 < p \leq \infty$. *Если* $N \geq 3$, *то* $\beta_p > 0 \Leftrightarrow \frac{N}{2} \leq p \leq \infty$.

2. *Если* $N \geq 2$ *и* $\frac{N}{2} < p \leq \infty$, *то* $\beta_p$ *достижимо.*

Следует отметить, что полное исследование критического случая, соответствующего значению $p = \frac{N}{2}$, отсутствует в данной теореме. В [4] показано, что для $N \geq 3$ значение $\beta_{\frac{N}{2}}$ равно

$$\beta_{\frac{N}{2}} = S_N = \pi N(N-2)\left[\frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(N)}\right]^{2/N},$$

где $S_N$ — наилучшая константа Соболева в $\mathbb{R}^N$, и, кроме того, что значение $\beta_{\frac{N}{2}}$ недостижимо. Также доказано, что для любой точки $x_0$ из замыкания $\overline{\Omega}$ существует минимизирующая последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ для $\beta_{\frac{N}{2}}$ такая, что $\{|a_n|^{N/2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в смысле сходимости по мере к $S_N^{N/2}\delta_{x_0}$, где $\delta_{x_0}$ обозначает массу Дирака, сосредоточенную в точке $x_0$.

В настоящей работе мы дополняем данные результаты из [4] для случая $N \geq 3$, показывая, что любая минимизирующая последовательность для $\beta_{\frac{N}{2}}$ сходится в смысле сходимости по мере к массе Дирака, сосредоточенной в некоторой точке $x_0 \in \overline{\Omega}$, домноженной на определенную константу. В дополнение проводится подробный анализ критического случая для $N = 1$ и $N = 2$.

Отметим особенность одномерного случая по сравнению с многомерным, связанную с тем, что концентрация происходит только в одной точке области. Действительно, мы показываем, что любая минимизирующая последовательность для величины $\beta_1$, определенной в (2), сходится в смысле сходимости по мере к массе Дирака, сосредоточенной в точке $x_0 = (c+d)/2$, центре отрезка $[c,d]$, домноженной на определенную константу.

В случае, когда $N = 2$, $L_1$-норма в выражении $\beta_{\frac{N}{2}}$ не вполне естественна с точки зрения предельных случаев теорем вложения Соболева. Заметим, что теорема, приведенная выше, утверждает о том, что в данном случае $\beta_{\frac{N}{2}} = 0$. Здесь наблюдаем достаточно вырожденное поведение минимизирующих последовательностей в том смысле, что концентрация может происходить в любом конечном числе точек области. Следовательно, переопределяем константу $\beta_{\frac{N}{2}}$, заменяя $L_1$-норму подходящей нормой Орлича, вытекающей из неравенства Мозера — Трудингера, которое описывает критический рост в двумерной ситуации. Показываем, что данная новая величина строго больше нуля, и даем характеристику ее нижней границы в терминах известной вариационной задачи.

В заключение отметим некоторые связанные с нашими результаты из [5, 6], где исследовалось асимптотическое поведение положительных решений полулинейных эллиптических уравнений с почти критическими нелинейностями: данные решения являются частным случаем минимизирующей последовательности для $\beta_{\frac{N}{2}}$.

## 2. Одномерный случай

В этом разделе покажем, что в случае, когда $N = 1$, явление концентрации, описанное в предыдущем разделе, возникает только в одной точке области. Именно, справедлива следующая

**Теорема 1.** *Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — минимизирующая последовательность для величины $\beta_1$, определенной в (2). Тогда*

$$a_n, |a_n| \rightharpoonup \frac{4}{d-c}\delta_{x_0} \quad \text{при } n \to \infty$$

*в смысле сходимости по мере, где $\delta_{x_0}$ обозначает массу Дирака, сосредоточенную в точке $x_0$. Здесь $x_0 = (c+d)/2$ — центр отрезка $[c, d]$.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная минимизирующая последовательность для $\beta_1$, т. е.

$$\lim_{a_n\in\Lambda_0, n\to\infty} \|a_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_c^d |a_n(x)|\,dx = \beta_1 = \frac{4}{d-c}. \tag{3}$$

Для $a_n \in \Lambda_0$, $n \in \mathbb{N}$, пусть $u_n$ является некоторым нетривиальным решением задачи (1), соответствующим $a_n$. Если $u_n(\gamma_n) = 0$ для некоторого $\gamma_n \in (c, d)$, то, с одной стороны,

$$\int\limits_c^d |a_n(x)|\,dx \geq \frac{4}{\gamma_n - c},$$

с другой —

$$\int\limits_c^d |a_n(x)|\,dx \geq \frac{4}{d - \gamma_n}.$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{4}{\gamma_n - c} \leq \frac{4}{d-c},$$

а также

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{4}{d - \gamma_n} \leq \frac{4}{d-c},$$

что, очевидно, невозможно. Таким образом, функция $u_n$ не меняет знака внутри интервала $(c, d)$ для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, и без ограничения общности можно считать, что $u_n(x) > 0$ для $x \in (c, d)$.

Выберем $x = x_n$ так, что $u_n(x_n) = \max u_n(x)$ на $(c, d)$. Имеем

$$u_n(x) = \int\limits_c^x u_n'(y)\,dy = -\int\limits_x^d u_n'(y)\,dy.$$

Из неравенства Гёльдера следует, что

$$u_n^2(x) \le (x-c)\int_c^x (u_n'(y))^2\,dy \quad \text{и} \quad u_n^2(x) \le (d-x)\int_x^d (u_n'(y))^2\,dy.$$

Значит,

$$\frac{u_n^2(x)}{x-c} + \frac{u_n^2(x)}{d-x} \le \int_c^d (u_n'(y))^2\,dy.$$

Умножая (1) на $u_n$ и используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\frac{1}{x_n-c} + \frac{1}{d-x_n} \le \frac{1}{u_n^2(x_n)}\int_c^d a_n(x)u_n^2(x)\,dx$$
$$\le \frac{1}{u_n^2(x_n)}\int_c^d |a_n(x)|u_n^2(x)\,dx \le \frac{1}{u_n^2(x_n)}\int_c^d |a_n(x)|u_n^2(x_n)\,dx \le \int_c^d |a_n(x)|\,dx.$$

Из последней цепочки неравенств и предположения (3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{c+d}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^d |a_n(x)|\big(u_n^2(x_n) - u_n^2(x)\big)\,dx = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^d (|a_n(x)| - a_n(x))u_n^2(x)\,dx = 0. \tag{5}$$

Без ограничения общности можно предположить, что $u_n(x_n) = 1$. Для любых $\alpha, \beta \in (c,d)$ таких, что $\alpha < \beta$, имеем

$$u_n'(\alpha) - u_n'(\beta) = \int_\beta^\alpha u_n''(x)\,dx = \int_\alpha^\beta a_n(x)u_n(x)\,dx \le \int_\alpha^\beta |a_n(x)|\,dx \le \int_c^d |a_n(x)|\,dx.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty}(\max_{x\in(c,d)} u_n'(x) - \min_{x\in(c,d)} u_n'(x)) \le \frac{4}{d-c}.$$

С другой стороны, согласно теореме Лагранжа о среднем значении существуют $\alpha_n \in (c, x_n)$ и $\beta_n \in (x_n, d)$ такие, что

$$u_n'(\alpha_n) = \frac{1}{x_n - c} \quad \text{и} \quad u_n'(\beta_n) = \frac{-1}{d-x_n}.$$

Поэтому

$$\liminf_{n\to\infty}\max_{x\in(c,x_n)} u_n'(x) \ge \frac{2}{d-c} \quad \text{и} \quad \limsup_{n\to\infty}\min_{x\in(x_n,d)} u_n'(x) \le \frac{-2}{d-c}.$$

Используя снова теорему Лагранжа о среднем значении, получаем

$$u_n(x) \to u(x) = 1 - \frac{2}{d-c}\left|x - \frac{c+d}{2}\right| \quad \text{при } n \to \infty.$$

Из (4) видим, что для любого $\delta > 0$

$$\int\limits_{[c,d]\setminus[\frac{c+d}{2}-\delta,\frac{c+d}{2}+\delta]} |a_n(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

откуда следует, что $|a_n| \rightharpoonup \frac{4}{d-c}\delta_{\frac{c+d}{2}}$ при $n \to \infty$ в смысле сходимости по мере. Окончательно из (5) заключаем, что $a_n \rightharpoonup \frac{4}{d-c}\delta_{\frac{c+d}{2}}$ при $n \to \infty$ в смысле сходимости по мере. $\square$

## 3. Случай $N \geq 3$

Пусть $\Omega$ — гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Рассмотрим следующую краевую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = a(x)u(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

где функция $a : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит множеству

$$\Lambda = \{a \in L_{N/2}(\Omega) : (6) \text{ имеет нетривиальное решение}\}.$$

Собственные значения задачи на собственные значения

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

принадлежат множеству $\Lambda$. Поэтому величина $\beta_{\frac{N}{2}} = \inf\limits_{a\in\Lambda} \|a\|_{\frac{N}{2}}$ определена корректно.

В отличие от одномерного случая, когда все минимизирующие последовательности для $\beta_1$ сходятся к массе Дирака, сосредоточенной только в одной точке области, домноженной на некоторую константу, в многомерном случае наблюдаем совершенно иную ситуацию. Как видно из следующей теоремы, концентрация при $N \geq 3$ имеет место в каждой точке замыкания области.

**Теорема 2.** *Значение $\beta_{\frac{N}{2}}$ равно*

$$\beta_{\frac{N}{2}} = S_N = \pi N(N-2)\left[\frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(N)}\right]^{2/N}, \tag{7}$$

*где $S_N$ — наилучшая константа Соболева в $\mathbb{R}^N$. Постоянная $\beta_{\frac{N}{2}}$ недостижима, и для любой точки $x_0 \in \overline{\Omega}$ существует минимизирующая для $\beta_{\frac{N}{2}}$ последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\{|a_n|^{N/2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в смысле сходимости по мере к $S_N^{N/2}\delta_{x_0}$. Более того, для любой минимизирующей для $\beta_{\frac{N}{2}}$ последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность $\{|a_n|^{N/2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится с точностью до подпоследовательности в смысле сходимости по мере к массе Дирака с центром в некоторой точке $x_0 \in \overline{\Omega}$, домноженной на $S_N^{N/2}$.*

Доказательство равенства (7), того факта, что $\beta_{\frac{N}{2}}$ недостижима, и того, что для любой точки $x_0 \in \overline{\Omega}$ существует минимизирующая для $\beta_{\frac{N}{2}}$ последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что последовательность $\{|a_n|^{N/2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в смысле сходимости по мере к массе Дирака сосредоточенной в $x_0$, домноженной на $S_N^{N/2}$, см. в [4].

Пусть $a \in \Lambda$ и $u \in H_0^1(\Omega)$ — некоторое нетривиальное решение задачи (6), соответствующее функции $a$. Умножая уравнение в (6) на $u$ и интегрируя по частям с учетом граничных условий, получим

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx = \int\limits_{\Omega} a(x)\,u^2(x)\,dx. \tag{8}$$

Из неравенства Гёльдера следует, что

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx \le \ \|a\|_{\frac{N}{2}}\|u^2\|_{\frac{N}{N-2}}.$$

Поэтому

$$\|a\|_{\frac{N}{2}} \ge \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx}{\|u\|^2_{\frac{2N}{N-2}}} \ge \inf_{v\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla v(x)|^2\,dx}{\|v\|^2_{\frac{2N}{N-2}}} = S_N. \tag{9}$$

Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная минимизирующая последовательность для $\beta_{\frac{N}{2}}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_{\frac{N}{2}} = \beta_{\frac{N}{2}} = \inf_{a\in\Lambda} \|a\|_{\frac{N}{2}}.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $u_n$ некоторое нетривиальное решение (6), соответствующее функции $a_n$. Из (7) и (9) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_{\frac{N}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2\,dx}{\|u_n\|^2_{\frac{2N}{N-2}}} = S_N. \tag{10}$$

Без ограничения общности можно предположить, что

$$\int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2\,dx - \int\limits_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2\,dx \int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, используя (10), имеем

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u_n(x) u_n(x)\,dx + S_N \int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Так как $u_n$ является решением задачи (6), получаем

$$\int\limits_{\Omega} \big(a_n(x) u_n^2(x) - S_N |u_n(x)|^{\frac{2N}{N-2}}\big)\,dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{11}$$

Положим $u_n(x) = 0$ для $x \notin \Omega$. Поскольку $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является минимизирующей последовательностью для неравенства Соболева, из [7, 8] следует, что

$$\|\nabla u_n - \nabla U_n\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{12}$$

Здесь

$$U_n(x) := U_{z_n,\mu_n}(x) = \frac{\left(N(N-2)\mu_n^2\right)^{(N-2)/4}}{\left(1+\mu_n^2|x-z_n|^2\right)^{(N-2)/2}}, \tag{13}$$

где $\mu_n$, $z_n$, $n \in \mathbb{N}$, — некоторые последовательности такие, что $\mu_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ и $z_n \in \Omega$ для достаточно больших $n$. Можем предположить, что с точностью до подпоследовательности $z_n \to x_0 \in \overline{\Omega}$ при $n \to \infty$. Тогда по теореме вложения Соболева получим

$$\|u_n - U_n\|_{L_{2N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Значит, последовательность $\{|u_n|^{\frac{2N}{N-2}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ концентрируется возле $x_0$ как масса Дирака. Таким образом, из (11) следует, что для любого $\delta > 0$ будет

$$\int\limits_{\Omega\setminus B(x_0,\delta)} a_n(x)u_n^2(x)\,dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \tag{14}$$

где $B(x_0,\delta)$ — шар в $\Omega$ с центром в $x_0$ и радиусом $\delta$. Заметим, что $U_n$ удовлетворяет уравнению

$$-\Delta U_n = U_n^{\frac{N+2}{N-2}} \quad \text{в } \mathbb{R}^N$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} U_n^{\frac{2N}{N-2}}(x)\,dx = S_N^{N/2}. \tag{15}$$

Из (8) и неравенства Гёльдера для любого $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2\,dx = \int\limits_{\Omega\setminus B(x_0,\delta)} a_n(x)u_n^2(x)\,dx + \int\limits_{B(x_0,\delta)} a_n(x)u_n^2(x)\,dx$$

$$\le \int\limits_{\Omega\setminus B(x_0,\delta)} a_n(x)u_n^2(x)\,dx + \Bigg(\int\limits_{B(x_0,\delta)} |a_n(x)|^{\frac{N}{2}}\,dx\Bigg)^{\frac{2}{N}} \Bigg(\int\limits_{B(x_0,\delta)} |u_n(x)|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx\Bigg)^{\frac{N-2}{N}}.$$

Следовательно,

$$\Bigg(\int\limits_{B(x_0,\delta)} |a_n(x)|^{\frac{N}{2}}\,dx\Bigg)^{\frac{2}{N}} \ge \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2\,dx - \int\limits_{\Omega\setminus B(x_0,\delta)} a_n(x)u_n^2(x)\,dx}{\Big(\int\limits_{B(x_0,\delta)} |u_n(x)|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx\Big)^{\frac{N-2}{N}}}$$

$$\ge \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2\,dx - \int\limits_{\Omega\setminus B(x_0,\delta)} a_n(x)u_n^2(x)\,dx}{\Big(\int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx\Big)^{\frac{N-2}{N}}} \ge S_N - \int\limits_{\Omega\setminus B(x_0,\delta)} a_n(x)u_n^2(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega} |a_n(x)|^{\frac{N}{2}}\,dx \ge \int\limits_{B(x_0,\delta)} |a_n(x)|^{\frac{N}{2}}\,dx \ge \Bigg(S_N - \int\limits_{\Omega\setminus B(x_0,\delta)} a_n(x)u_n^2(x)\,dx\Bigg)^{N/2},$$

и из (10) и (14) видим, что для любого $\delta > 0$

$$\int\limits_{\Omega\setminus B(x_0,\delta)} |a_n(x)|^{\frac{N}{2}}\,dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Окончательно из (10) заключаем, что

$$|a_n|^{N/2} \rightharpoonup S_N^{N/2}\delta_{x_0} \quad \text{при } n \to \infty$$

в смысле сходимости по мере. $\square$

Замечание 1. Можно показать (см. также [3, замечание 5]), что для $p > \frac{N}{2}$, $N \geq 3$, величина $\beta_p = \inf\limits_{a\in\Lambda} \|a\|_p$ достигается на функции $a_p(x) \equiv u(x)^{\frac{2}{p-1}}$, $x \in \Omega$, где $u$ — решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = u(x)^{\frac{2}{p-1}} u(x), & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Тогда последовательность минимизирующих функций $\{a_p\}_{p\to\frac{N}{2}}$ является минимизирующей для $\beta_{\frac{N}{2}}$. Действительно, для $p > \frac{N}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, имеем $\|a_n\|_p \geq \|a_p\|_p$, где $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — некоторая минимизирующая последовательность для $\beta_{\frac{N}{2}}$. Поэтому

$$\|a_n\|_{\frac{N}{2}} = \lim_{p\to\frac{N}{2}} \|a_n\|_p \geq \lim_{p\to\frac{N}{2}} \|a_p\|_p = \lim_{p\to\frac{N}{2}} \|a_p\|_{\frac{N}{2}} \geq \beta_{\frac{N}{2}}.$$

Заметим, что $\frac{2}{p-1} + 1 = \frac{p+1}{p-1} \leq \frac{N+2}{N-2}$ и $\frac{p+1}{p-1} \to \frac{N+2}{N-2}$ при $p \to \frac{N}{2}$. Таким образом, последовательность $\{a_p\}_{p\to\frac{N}{2}}$ является (с точностью до подпоследовательности) последовательностью $\bigl\{N(N-2)u_\varepsilon^{\frac{N+2}{N-2}-1-\varepsilon}\bigr\}_{\varepsilon\to 0}$, где $u_\varepsilon$ — решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = N(N-2)u^{\frac{N+2}{N-2}-\varepsilon}(x), & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

которая исследовалась в [5, 6]. Из [5, 6] заключаем, что

$$|a_p|^{N/2} \rightharpoonup S_N^{N/2}\delta_{x_0} \quad \text{при } p \to N/2$$

в смысле сходимости по мере, где $x_0 \in \Omega$ является критической точкой функции $\varphi(x) = g(x, x)$, т. е. $\varphi'(x_0) = 0$, а

$$g(x, y) = G(x, y) - \frac{1}{(N-2)\sigma_N |x-y|^{N-2}}$$

— регулярная часть функции Грина $G(x, y)$: $G(x, \cdot)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} -\Delta G(x, \cdot) = \delta_x & \text{в } \Omega, \\ G(x, \cdot) = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

для любого $x \in \Omega$. Здесь $\sigma_N = \frac{2\pi N/2}{\Gamma(N/2)}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^N$.

## 4. Двумерный случай

В случае, когда $N = 2$, $L_1$-норма в выражении для величины $\beta_{\frac{N}{2}}$, определенной подобно многомерному случаю, не вполне естественна с точки зрения предельных случаев теоремы вложения Соболева. В данном случае наблюдаем достаточно вырожденное поведение минимизирующих последовательностей в том смысле, что концентрация может происходить в любом конечном числе точек области. Действительно, пусть $x_1, \dots, x_k$ — $k$ различных точек области $\Omega$. Напомним из теоремы в разд. 1, что если $N = 2$, то $\beta_{\frac{N}{2}} = \beta_1 = 0$. Пусть функция $\phi \in C_0^\infty(B(0,1))$ такая, что $\phi \geq 0$ и $\int\limits_{B(0,1)} \phi(x)\,dx = 1$. Для любых $i = 1, \dots, k$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $V_n^i(x)$ единственное решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = n^2\phi(n(x - x_i)), & x \in \Omega, \\ w(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что $V_n^i(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$. Рассмотрим последовательность

$$a_n := \frac{-\Delta\left(\sum\limits_{i=1}^k V_n^i\right)}{\sum\limits_{i=1}^k V_n^i} \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Легко видеть, что для каждого $i = 1, \dots, k$

$$\lim_{n\to\infty} \min_{x \in B(x_i, 1/n)} V_n^i(x) = \infty. \tag{18}$$

Из уравнения (16) следует, что для любых $i = 1, \dots, k$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{supp}\big(-\Delta V_n^i(x)\big) \subset B(x_i, 1/n).$$

Поэтому из (17) получаем

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega |a_n(x)|\,dx = \int\limits_\Omega a_n(x)\,dx &= \sum_{i=1}^k \int\limits_{B(x_i,1/n)} \frac{-\Delta V_n^i(x)}{\sum\limits_{i=1}^k V_n^i(x)}\,dx \\ &\leq \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^k \min\limits_{x \in B(x_i,1/n)} V_n^i(x)} \sum_{i=1}^k \int\limits_{B(x_i,1/n)} -\Delta V_n^i(x)\,dx. \end{aligned}$$

Таким образом, из (16) и (18) видим, что

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |a_n(x)|\,dx &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^k \min\limits_{x \in B(x_i,1/n)} V_n^i(x)} \sum_{i=1}^k \int\limits_{B(x_i,1/n)} n^2\phi(n(x - x_i))\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^k \min\limits_{x \in B(x_i,1/n)} V_n^i(x)} \sum_{i=1}^k \int\limits_{B(0,1)} \phi(x)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^k \min\limits_{x \in B(x_i,1/n)} V_n^i(x)} = 0. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с (17) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является минимизирующей последовательностью для $\beta_1$. С другой стороны, для любого $\delta > 0$ и достаточно большого $n$

$$a_n(x) \equiv 0 \quad \text{для } x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta).$$

Следовательно,

$$\frac{\int\limits_{\Omega\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}B(x_i,\delta)} |a_n(x)|\,dx}{\int\limits_{\Omega}|a_n(x)|\,dx} \to 0 \quad \text{при } n\to\infty,$$

значит,

$$\frac{|a_n|}{\int\limits_{\Omega}|a_n(x)|\,dx} \rightharpoonup \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\delta_{x_i} \qquad \text{в смысле сходимости по мере при } n\to\infty.$$

Для $N\geq 3$ неравенство Соболева утверждает, что

$$S_N\|\varphi\|^2_{L_{2N/(N-2)}(\Omega)} \leq \|\nabla\varphi\|_2^2.$$

Неравенство Мозера — Трудингера [9], двумерный аналог неравенств Соболева, состоит в том, что

$$\sup_{u\in H_0^1(\Omega),\,\|\nabla u\|_2=1}\int\limits_{\Omega}(e^{4\pi u^2(x)}-1)\,dx \leq C|\Omega|, \tag{19}$$

где $C>0$ и $|\Omega|$ — площадь $\Omega$, и что для любого $\alpha>4\pi$

$$\sup_{u\in H_0^1(\Omega),\,\|\nabla u\|_2=1}\int\limits_{\Omega}(e^{\alpha u^2(x)}-1)\,dx = \infty.$$

С точки зрения неравенства Мозера — Трудингера представляется естественным переопределить постоянную $\beta_{\frac{N}{2}}$, заменяя $L_1$-норму подходящей нормой Орлича, вытекающей из данного неравенства. С этой целью введем функцию

$$M(v)=e^{4\pi v}-4\pi v-1, \quad v\geq 0.$$

Заметим, что $M(v)$ является $N$-функцией (основные свойства $N$-функций см. в [10]). Ее дополнительная функция $\widetilde{M}$ определяется следующим образом:

$$\widetilde{M}(w) := \max_{v\geq 0}(wv-M(v)) = \left(\frac{w}{4\pi}+1\right)\log\left(\frac{w}{4\pi}+1\right)-\frac{w}{4\pi}, \quad w\geq 0.$$

Пусть $a\in\Lambda$ и $u\in H_0^1(\Omega)$ — некоторое нетривиальное решение задачи (6) для $N=2$, соответствующее функции $a$. Без ограничения общности можно предположить, что

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\,dx = 1.$$

Тогда из (8) и обобщенной версии неравенства Гёльдера следует, что

$$1=\int\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\,dx \leq 2\|a\|_{\widetilde{M}}\|u^2\|_M, \tag{20}$$

где $\|a\|_{\widetilde{M}}$, определенное как

$$\|a\|_{\widetilde{M}} = \|a\|_{\widetilde{M},\Omega} = \inf\left\{k>0 : \int\limits_{\Omega}\widetilde{M}\left(\frac{|a(x)|}{k}\right)dx\leq 1\right\},$$

является нормой (нормой Люксембурга) на соответствующем пространстве Орлича $L_{\widetilde{M}}(\Omega)$ (см. [10]). Норма $\|\cdot\|_M$ определяется аналогично. Теперь для случая $N = 2$ введем аналог постоянной $\beta_{\frac{N}{2}}$ следующим образом: $\beta_{\widetilde{M}} := \inf\limits_{a\in\Lambda} \|a\|_{\widetilde{M}}$, где множество $\Lambda$ такое же, как выше.

Заметим, что если $N$-функция $A$ обладает свойством $A(\alpha v) \le \alpha^2 A(v)$ для всех $0 < \alpha < 1$ и $\int\limits_\Omega A(|v(x)|)\,dx > 1$, то

$$\|v\|_A^2 \le \int\limits_\Omega A(|v(x)|)\,dx. \tag{21}$$

Действительно, из определения $\|\cdot\|_A$ и того факта, что функция $\frac{A(v)}{v}$ при положительных значениях $v$ строго возрастает, следует, что в данном случае также $\|v\|_A > 1$. Поэтому при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{(\|v\|_A - \varepsilon)^2} \int\limits_\Omega A(|v(x)|)\,dx \ge \int\limits_\Omega A\left(\frac{|v(x)|}{\|v\|_A - \varepsilon}\right) dx > 1,$$

откуда вытекает (21).

**Теорема 3.** *Имеет место неравенство*

$$\beta_{\widetilde{M}} \ge \frac{1}{2\nu^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

*где*

$$\nu := \sup_{u\in H_0^1(\Omega),\, \|\nabla u\|_2=1} \int\limits_\Omega (e^{4\pi u^2(x)} - 4\pi u^2(x) - 1)\,dx.$$

*Кроме того,*

$$\int\limits_\Omega \widetilde{M}\left(\frac{|a(x)|}{\alpha}\right) dx > 1$$

*для любого* $\alpha < \beta_{\widetilde{M}}$.

Доказательство. Положим

$$\mu := \sup_{u\in H_0^1(\Omega), \|\nabla u\|_2=1} \|u^2\|_M.$$

Отметим, что величина $\nu$ в формулировке теоремы рассмотрена Ли в [11], где, в частности, доказано, что значение $\nu$ больше, чем $\pi e$, и достижимо. Поскольку для функции $M(v)$ также выполняется неравенство $M(\alpha v) \le \alpha^2 M(v)$ для всех $0 < \alpha < 1$, из (21) следует, что $\mu \le \sqrt{\nu}$. Таким образом, из (20) получаем

$$\|a\|_{\widetilde{M}} \ge \frac{1}{2\|u^2\|_M} \ge \frac{1}{2\mu} \ge \frac{1}{2\sqrt{\nu}} > 0.$$

Следовательно,

$$\beta_{\widetilde{M}} := \inf_{a\in\Lambda} \|a\|_{\widetilde{M}} \ge \frac{1}{2\sqrt{\nu}} > 0.$$

Последнее утверждение теоремы следует из определения нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{M}}$. $\square$

Замечание 2. В контексте неравенства Мозера — Трудингера (19) для определения величины $\beta_{\widetilde{M}}$ было бы логичнее использовать норму $\|\cdot\|_{\widetilde{M_1}}$, соответствующую функции $M_1(v) = e^{4\pi v} - 1$. Однако функция $M_1$ не является

$N$-функцией и, следовательно, аргументы доказательства теоремы 3 не будут верны. В определенном смысле функция $M$, использованная при определении $\beta_{\widetilde{M}}$, является $N$-функцией, наиболее «близкой» к функции $M_1$.

Замечание 3. Мы предполагаем, что $\mu = \sqrt{\nu}$. Поскольку существует максимизирующая функция для $\nu$, при выполнении определенного технического условия обобщенное неравенство Гёльдера становится равенством и значение $\beta_{\widetilde{M}}$ достигается на соответствующей функции $a$. При этом $\beta_{\widetilde{M}} = \frac{1}{2\nu^{\frac{1}{2}}}$.

Авторы выражают глубокую признательность профессору Джейон Бьион (Jaeyoung Byeon) за постановку задачи, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе и рецензенту за конструктивные замечания, которые способствовали значительному улучшению качества работы.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Hartman P.* Ordinary differential equations. New York; London; Sydney: John Wiley & Sons Inc., 1964.

**2.** *Cañada A., Montero J. A., Villegas S.* Lyapunov-type inequalities and Neumann boundary value problems at resonance // Math. Inequal. Appl. 2005. V. 8, N 3. P. 459–475.

**3.** *Cañada A., Montero J. A., Villegas S.* Lyapunov inequalities for partial differential equations // J. Funct. Anal. 2006. V. 237, N 1. P. 176–193.

**4.** *Timoshin S. A.* Lyapunov inequality for elliptic equations involving limiting nonlinearities // Proc. Japan Acad., Ser. A. 2010. V. 86, N 8. P. 139–142.

**5.** *Han Z.-C.* Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 1991. V. 8, N 2. P. 159–174.

**6.** *Rey O.* Proof of two conjectures of H. Brézis and L. A. Peletier // Manuscr. Math. 1989. V. 65, N 1. P. 19–37.

**7.** *Lions P.-L.* The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case // Rev. Mat. Iberoamericana. 1985. V. 1, N 1. P. 145–201; N 2. P. 45–121.

**8.** *Struwe M.* Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Berlin: Springer-Verl., 1990.

**9.** *Moser J.* A sharp form of an inequality by N. Trudinger // Indiana Univ. Math. J. 1970/71. V. 20. P. 1077–1092.

**10.** *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

**11.** *Li Y. X.* Remarks on the extremal functions for the Moser–Trudinger inequality // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 2006. V. 22, N 2. P. 545–550.

*Статья поступила 7 июня 2011 г.*

Квон Хьюк Джун
Department of Mathematics and PMI, POSTECH,
Pohang, 790–784 Kyungbuk, Republic of Korea

Тимошин Сергей Анатольевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
sergey.timoshin@gmail.com