Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.56

НЕЯВНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

А. Г. Пинус

Аннотация. Понятие неявной операции на псевдомногообразиях полугрупп восходит к [1]. В ряде работ автора [2–5] это понятие обобщено на иные классы алгебр и установлена связь этих операций с позитивно-условно термальными функциями в случае равномерной локальной конечности алгебр рассматриваемого класса. В настоящей работе предложено понятие неявной операции для любой (не обязательно локально конечной) универсальной алгебры, устанавливается связь этих операций с бесконечными аналогами позитивно-условных термов и взаимосвязь их с ∞-квазитождествами, возникающими в алгебраической геометрии универсальных алгебр. Рассмотрены также условия неявной эквивалентности алгебр решеткам, полурешеткам и булевым алгебрам.

Ключевые слова: неявная операция, позитивно-условный терм, ∞-квазитождество.

1. Общие свойства неявной эквивалентности

Напомним, что если $\mathscr{K}$ — некоторый класс универсальных алгебр сигнатуры σ, замкнутый относительно подалгебр, то *неявной операцией f на классе $\mathscr{K}$* называется система функций $f_{\mathfrak{A}}$, определенных на основных множествах A алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ из класса $\mathscr{K}$, коммутирующих с любыми гомоморфизмами одних $\mathscr{K}$-алгебр в другие, т. е. таких, что для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathscr{K}$, любого гомоморфизма φ алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ и любых $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$

$$\varphi(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f_{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)).$$

В силу замкнутости $\mathscr{K}$ относительно подалгебр для любой $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}$ и любых $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ имеет место включение

$$f_{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \in \langle a_1, \dots, a_n\rangle_{\mathfrak{A}}.$$

Здесь и далее $\langle a_1, \dots, a_n\rangle_{\mathfrak{A}}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная множеством $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ под *неявной операцией на алгебре* $\mathfrak{A}$ будем понимать функцию f, определенную на множестве A и такую, что ограничение f до подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ является неявной операцией на классе $S\mathfrak{A}$, состоящем из подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом, функция f на множестве A является неявной операцией на алгебре $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$, если для любых $a_1, \dots, a_n \in A$ имеет место включение

$$f(a_1, \dots, a_n) \in \langle a_1, \dots, a_n\rangle_{\mathfrak{A}}$$

и для любого гомоморфизма φ подалгебры $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ на подалгебру $\mathfrak{L}$ алгебры $\mathfrak{A}$ (внутреннего гомоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$) при любых $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\varphi(f(a_1, \dots, a_n)) = f(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)).$$

Через $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ обозначим далее полугруппу всех внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ с традиционно определенной операцией суперпозиции частичных отображений на множестве.

Тем самым неявная операция f на алгебре $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ — это функция, определенная на множестве A, относительно которой замкнуты подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ и которая коммутирует с любым внутренним гомоморфизмом $\mathfrak{A}$. Через $IO(\mathfrak{A})$ обозначим совокупность всех неявных операций на алгебре $\mathfrak{A}$.

Для любых $a_1,\dots,a_n \in \mathfrak{A}$ через $\bar{a}$ обозначим кортеж $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$, а через $D^+_{\bar{a}}(x_1,\dots,x_n)$ — позитивную часть диаграммы алгебры $\langle a_1,\dots,a_n\rangle_{\mathfrak{A}}$ такую, что

$$\langle a_1,\dots,a_n\rangle_{\mathfrak{A}} \models D^+_{\bar{a}}(a_1,\dots,a_n).$$

Если при этом сигнатура $\mathfrak{A}$ конечна и конечна алгебра $\langle a_1,\dots,a_n\rangle_{\mathfrak{A}}$, то под $D^+_{\bar{a}}(x_1,\dots,x_n)$ будем понимать некоторую конечную часть $T(x_1,\dots,x_n)$ диаграммы $D^+_{\bar{a}}(x_1,\dots,x_n)$ такую, что

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1,\dots,x_n\big(T(x_1,\dots,x_n) \to D^+_{\bar{a}}(x_1,\dots,x_n)\big).$$

Через $\& D^+_{\bar{a}}(x_1,\dots,x_n)$ обозначим конъюнкцию (возможно, бесконечную) формул, входящих в $D^+_{\bar{a}}(x_1,\dots,x_n)$. Тем самым для любой алгебры $\mathfrak{B} = \langle B;\sigma\rangle$ и любых ее элементов $b_1,\dots,b_n$

$$\mathfrak{B} \models \& D^+_{\bar{a}}(b_1,\dots,b_n)$$

тогда и только тогда, когда отображение $\varphi : a_i \to b_i$ $(i = 1,\dots,n)$ продолжимо до гомоморфизма алгебры $\langle a_1,\dots,a_n\rangle_{\mathfrak{A}}$ в алгебру $\mathfrak{B}$.

Пусть $f \in IO(\mathfrak{A})$. Так как $f(a_1,\dots,a_n) \in \langle a_1,\dots,a_n\rangle_{\mathfrak{A}}$ для $a_1,\dots,a_n \in \mathfrak{A}$, найдется терм $t(x_1,\dots,x_n)$ сигнатуры σ такой, что $f(a_1,\dots,a_n) = t(a_1,\dots,a_n)$.

Пусть $T^n_{\mathfrak{A}}$ — совокупность типов изоморфизма алгебр $\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle_{\mathfrak{A}}, a_1,\dots, a_n\rangle$ (алгебр $\langle a_1,\dots,a_n\rangle_{\mathfrak{A}}$ сигнатуры σ, обогащенных константами $a_1,\dots,a_n$) для любых $a_1,\dots,a_n \in \mathfrak{A}$.

Напомним, что алгебра $\mathfrak{A}$ называется *равномерно локально конечной*, если существует функция $g : \omega \to \omega$ такая, что для любого натурального n и любых $a_1,\dots,a_n \in \mathfrak{A}$ мощность подалгебры $\langle a_1,\dots,a_n\rangle_{\mathfrak{A}}$ не превышает числа $g(n)$. В случае конечности сигнатуры и равномерной локальной конечности алгебры $\mathfrak{A}$ для любого $n \in \omega$ совокупность $T^n_{\mathfrak{A}}$ конечна.

Под ∞-*позитивно-условным термом* $t_\varphi(x_1,\dots,x_n)$ для алгебры $\mathfrak{A}$ будем далее понимать схему

$$t_\varphi(x_1,\dots,x_n) \;=\; \mathop{\&}_{\langle\langle\bar{a}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{a}\rangle \in T^n_{\mathfrak{A}}} \big(\& D^+_{\bar{a}}(x_1,\dots,x_n) \;\to\; \varphi(\langle\langle\bar{a}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{a}\rangle)(x_1,\dots,x_n)\big),$$

где φ — произвольное отображение множества $T^n_{\mathfrak{A}}$ в совокупность Tr^n_σ термов сигнатуры σ от переменных $x_1,\dots,x_n$, если при этом для любых $\langle\langle\bar{a}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{a}\rangle$, $\langle\langle\bar{b}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{b}\rangle \in T^n_{\mathfrak{A}}$ имеет место

$$\mathfrak{A} \models \& D^+_{\bar{a}}(b_1,\dots,b_n) \to \varphi(\langle\langle\bar{a}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{a}\rangle)(b_1,\dots,b_n) = \varphi(\langle\langle\bar{b}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{b}\rangle)(b_1,\dots,b_n). \qquad (*)$$

Напомним, что ∞-*квазитождеством* (см., к примеру, [6, 7]) называется любая формула вида

$$\forall x_1,\dots,x_n\big(\mathop{\&}_{i\in I} t^1_i(x_1,\dots,x_n) = t^2_i(x_1,\dots,x_n) \to p(x_1,\dots,x_n) = q(x_1,\dots,x_n)\big),$$

где t^i_1, t^i_2, p, q — термы сигнатуры σ.

Тем самым условие $(*)$ соответствует истинности на алгебре $\mathfrak{A}$-квазитождества

$$\forall\bar{x}\big(\&D^+_{\bar{a}}(\bar{x})\&\ \&D^+_{\bar{b}}(\bar{x})\to\varphi(\langle\langle\bar{a}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{a}\rangle)(\bar{x})=\varphi(\langle\langle\bar{b}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{b}\rangle)(\bar{x})\big).$$

Любой ∞-позитивно-условный терм $t_\varphi(x_1,\dots,x_n)$ для алгебры $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma\rangle$ естественным образом определяет на множестве A n-местную ∞-*позитивно-условно термальную функцию* $t^{\mathfrak{A}}_\varphi(x_1,\dots,x_n)$: для любых $a_1,\dots,a_n\in A$ если $\mathfrak{A}\models\&D^+_{\bar{b}}(a_1,\dots,a_n)$, то

$$t_\varphi(a_1,\dots,a_n)=\varphi(\langle\langle\bar{b}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{b}\rangle)(a_1,\dots,a_n).$$

Очевидным образом любая ∞-позитивно-условно термальная функция для алгебры $\mathfrak{A}$ является неявной операцией на $\mathfrak{A}$. Очевидно и обратное: любая неявная операция на алгебре $\mathfrak{A}$ является ∞-позитивно-условно термальной функцией для $\mathfrak{A}$.

Заметим, что в случае равномерно локально конечной алгебры $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры σ ∞-позитивно-условно термальные функции для $\mathfrak{A}$ суть позитивно-условно термальные для $\mathfrak{A}$ в смысле ряда предыдущих работ автора (см., к примеру, [4]).

Очевидно, что одна и та же неявная операция на $\mathfrak{A}$ может определяться отличными друг от друга ∞-позитивно-условными термами для алгебры $\mathfrak{A}$. При этом два ∞-позитивно-условных для алгебры $\mathfrak{A}$ терма $t_\varphi(x_1,\dots,x_n)$ и $t_\psi(x_1,\dots,x_n)$ определяют на $\mathfrak{A}$ одну и ту же неявную операцию тогда и только тогда, когда на $\mathfrak{A}$ истинны ∞-квазитождества

$$\forall\bar{x}\big(\&D^+_{\bar{a}}(\bar{x})\&\ \&D^+_{\bar{b}}(\bar{x})\to\varphi(\langle\langle\bar{a}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{a}\rangle)(\bar{x})=\psi(\langle\langle\bar{b}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{b}\rangle)(\bar{x})\big)$$

для любых $\langle\langle\bar{a}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{a}\rangle,\langle\langle\bar{b}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{b}\rangle\in T^n_{\mathfrak{A}}$.

Две σ-алгебры $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma\rangle$, $\mathfrak{B}=\langle B;\sigma\rangle$ назовем *синтаксически неявно эквивалентными*, если любой ∞-позитивно-условный терм для алгебры $\mathfrak{A}$ является таковым и для алгебры $\mathfrak{B}$, и обратно. Кроме того, два ∞-позитивно-условных для алгебры $\mathfrak{A}$ терма определяют на $\mathfrak{A}$ одну и ту же неявную операцию тогда и только тогда, когда они определяют одну и ту же неявную операцию и на алгебре $\mathfrak{B}$.

Таким образом, совпадение ∞-квазиэквациональных теорий алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истинны одни и те же ∞-квазитождества) влечет их синтаксически неявную эквивалентность.

Имеет место следующий критерий синтаксически неявной эквивалентности универсальных алгебр.

Утверждение 1. *Следующие условия для алгебр $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma\rangle$, $\mathfrak{B}=\langle B;\sigma\rangle$ равносильны:*

(а) *алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ синтаксически неявно эквивалентны,*

(б) *∞-квазиэквациональные теории алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадают.*

Доказательство. Выше замечено, что (б) влечет (а). Докажем обратное.

Пусть алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ синтаксически неявно эквивалентны. Пусть

$$\forall\bar{x}\big(\mathop{\&}_{i\in I}t^1_i(\bar{x})=t^2_i(\bar{x})\to p(\bar{x})=q(\bar{x})\big),\qquad(**)$$

где $\bar{x}=\langle x_1,\dots,x_n\rangle$, — некоторое ∞-квазитождество сигнатуры σ, истинное на алгебре $\mathfrak{A}$. Через $K^n_{\mathfrak{A}}$ обозначим совокупность типов изоморфизма тех алгебр $\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle_{\mathfrak{A}},a_1,\dots,a_n\rangle$ из $T^n_{\mathfrak{A}}$, что

$$\mathfrak{A}\models\mathop{\&}_{i\in I}t^1_i(\bar{a})=t^2_i(\bar{a}).$$

Рассмотрим отображения φ_1 и φ_2 множества $T^n_{\mathfrak{A}}$ в $\mathrm{Tr}^n_{\mathfrak{A}}$ такие, что $\varphi_1\big(K^n_{\mathfrak{A}}\big) = \{p(\bar{x})\}$, $\varphi_1\big(T^n_{\mathfrak{A}} \setminus K^n_{\mathfrak{A}}\big) = \{q(\bar{x})\}$ и φ_2 такое, что $\varphi_2\big(T^n_{\mathfrak{A}}\big) = \{q(\bar{x})\}$. В силу истинности на алгебре $\mathfrak{A}$ ∞-квазитождества $(**)$ схема $t_{\varphi_1}(x_1, \dots, x_n)$ определяет на $\mathfrak{A}$, а значит, ввиду предположения (а) и на $\mathfrak{B}$, ∞-позитивно-условный терм. При этом на $\mathfrak{A}$ имеет место совпадение ∞-позитивно-условно термальных функций $t^{\mathfrak{A}}_{\varphi_1}$ и $t^{\mathfrak{A}}_{\varphi_2}$ и соответственно неявных операций, определенных этими термами. Но тогда в силу предположения (а) совпадают и неявные операции, определяемые на алгебре $\mathfrak{B}$ функциями $t^{\mathfrak{B}}_{\varphi_1}$ и $t^{\mathfrak{B}}_{\varphi_2}$, что означает истинность на $\mathfrak{B}$ квазитождества $(**)$.

Симметричным образом истинность на $\mathfrak{B}$ квазитождества $(**)$ влечет истинность его и на $\mathfrak{A}$. Тем самым импликация (а) $\to$ (б) доказана.

В [6, 9, 10] доказано, что совпадения ∞-квазиэкваციональных теорий алгебр равносильно геометрической эквивалентности этих алгебр, а последняя — тому, что любая конечно порожденная подалгебра одной из этих алгебр изоморфно вложима в некоторую прямую степень другой. Тем самым имеет место

Следствие 1. *Для алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$ равносильны утверждения:*

(а) *алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ синтаксически неявно эквивалентны,*

(б) *∞-квазиэквациональные теории алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадают,*

(в) *алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ геометрически эквивалентны,*

(г) *любая конечно порожденная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ изоморфно вложима в некоторую прямую степень алгебры $\mathfrak{B}$, и наоборот.*

Как замечено выше, в случае равномерной локальной конечности алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и конечности сигнатуры σ условие (б) может быть заменено следующим:

(б$'$) квазиэквациональные теории алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадают.

В силу следствия 1 синтаксически неявно эквивалентными друг другу будут любые две неодноэлементные булевы алгебры (дистрибутивные решетки), а ввиду известного результата Б. И. Плоткина [9] о геометрической эквивалентности нильпотентных групп две нильпотентные группы синтаксически неявно эквивалентны тогда и только тогда, когда они порождают одно и то же квазимногообразие. Аналогично любые две локально конечные алгебры конечной сигнатуры неявно эквивалентны тогда и только тогда, когда они порождают одно и то же квазимногообразие. Другие примеры геометрически эквивалентных (а следовательно, и синтаксически неявно эквивалентных) алгебр можно найти в [10, 11].

Следствие 2. *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ не более чем счетной сигнатуры и для любого кардинала $k \geqslant 2^{\aleph_0}$ существует универсальная алгебра $\mathfrak{A}_k$ мощности k, синтаксически неявно эквивалентная алгебре $\mathfrak{A}$.*

Утверждение следствия вытекает из утверждения следствия 1 и соответствующего утверждения о геометрически эквивалентных алгебрах (см., к примеру, [6]).

Ограничение $k \geqslant 2^{\aleph_0}$ существенно.

Отметим, что поскольку внутренние гомоморфизмы алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ и любого ее обогащения $\mathfrak{A}' = \langle A; \sigma'\rangle$ с помощью ее же неявных операций совпадают, то совпадают и неявные операции алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$.

Напомним, что биекция φ множества A на множество B сопрягает частичные функции f и g, определенные соответственно на множествах A и B, если

$$g(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f(\varphi^{-1}(x_1), \dots, \varphi^{-1}(x_n))).$$

По аналогии с рациональной и условно рациональной эквивалентностью алгебр (см., к примеру, [8, 11, 13–15]) введем понятие неявной эквивалентности универсальных алгебр. Алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ *неявно эквивалентны*, если существует биекция φ множества A на множество B, сопрягающая сигнатурные функции алгебры $\mathfrak{A}$ с некоторыми неявными операциями на алгебре $\mathfrak{B}$, и обратно. Иначе говоря, в силу отмеченного выше алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ неявно эквивалентны, если существует биекция φ, сопрягающая совокупности неявных операций $IO(\mathfrak{A})$ и $IO(\mathfrak{B})$ этих алгебр.

Ввиду указанной выше взаимосвязи неявных операций и ∞-позитивно-условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ неявно эквивалентны тогда и только тогда, когда сигнатурные функции одной из них сопряжены с некоторыми ∞-позитивно-условно термальными функциями другой, и наоборот.

В качестве примеров неявно эквивалентных алгебр укажем, в частности, на линейно упорядоченные полурешетки и соответствующие им решетки, а также на локально конечные полугруппы с сокращением и единственным идемпотентом и соответствующие им группы.

Так как термальные и позитивно-условно термальные функции определяют неявные операции на алгебрах, рационально и позитивно-условно рационально эквивалентные алгебры являются, в частности, неявно эквивалентными.

В [16] указано Галуа-соответствие между совокупностями неявных операций для алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и полугруппами $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}$. В силу отмеченного выше сохранения полугруппы $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}$ при обогащении алгебры $\mathfrak{A}$ ее неявными операциями и указанного Галуа-соответствия между совокупностями $IO(\mathfrak{A})$ и полугруппами $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}$ имеет место следующий критерий неявной эквивалентности алгебр.

Утверждение 2. *Универсальные алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ неявно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует биекция φ множества A на множество B, сопрягающая полугруппы внутренних гомоморфизмов $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}$ и $\operatorname{Ihm}\mathfrak{B}$ этих алгебр.*

Отношения синтаксической неявной эквивалентности и неявной эквивалентности универсальных алгебр независимы. Действительно, любые две неодноэлементные булевы алгебры синтаксически неявно эквивалентны (в силу равносильности условий (а) и (г) следствия 1). В случае разномощности эти булевы алгебры не являются неявно эквивалентными. Любые две универсальные алгебры отличных (друг от друга) сигнатур с сопряженными полугруппами внутренних гомоморфизмов будут неявно эквивалентны, но не являются синтаксически неявно эквивалентными.

Утверждение 3. *Неявно эквивалентные алгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ имеют сопряженные некоторой биекцией их основных множеств решетки подалгебр ($\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_1$ и $\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_2$) и группы автоморфизмов ($\operatorname{Aut}\mathfrak{A}_1$ и $\operatorname{Aut}\mathfrak{A}_2$). Это, однако, не относится к решеткам конгруэнций алгебр — к $\operatorname{Con}\mathfrak{A}$.*

Действительно, существуют алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ такие, что $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_2$, но $\operatorname{Con}\mathfrak{A}_1 \neq \operatorname{Con}\mathfrak{A}_2$. К примеру, пусть Z — совокупность всех целых чисел и $\mathfrak{A}_1 = \langle Z; f(x), g(x) \rangle$, $\mathfrak{A}_2 = \langle Z; f(x), g(x), d(x,y,z) \rangle$, где $f(n) = n+1$ и $g(n) = n-1$, $d(x,y,z)$ — дискриминаторная функция. Тогда $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_2 = \operatorname{Aut}\mathfrak{A}_1$ и при этом $\operatorname{Con}\mathfrak{A}_2$ двухэлементна, в то время как $\operatorname{Con}\mathfrak{A}_1$ содержит нетривиальные конгруэнции.

Довольно очевидно, что обратное неверно, более того, существуют алгебры $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1\rangle$, $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma_2\rangle$ такие, что $\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Sub}\mathfrak{A}_2$, $\operatorname{Con}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Con}\mathfrak{A}_2$, $\operatorname{Aut}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Aut}\mathfrak{A}_2$, но $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_1 \neq \operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_2$ и, значит, $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ не являются неявно эквивалентными. К примеру, пусть $\mathfrak{L} = \langle Q; +, \cdot, -, 0(x), 1(x)\rangle$ — поле рациональных чисел со стандартными функциями $+, \cdot, -$ и функциями $0(x)$, $1(x)$, определенными на Q следующим образом:

$$0(x) = 0, \quad 1(x) = 1 \quad \text{для всех } x \in Q.$$

Пусть алгебра $\mathfrak{B} = \langle \{0', 1'\}; +, \cdot, -, 0(x), 1(x)\rangle$ определена аналогичным образом над двухэлементным полем. Алгебру $\mathfrak{A} = \langle Q \cup \{0', 1'\}; +, \cdot, -, 0(x), 1(x)\rangle$ над дизъюнктным объединением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{L}$ определим условием $x + y = x \cdot y = x - y = x$, если x, y не входят одновременно ни в Q, ни в $\{0', 1'\}$. Тогда очевидно, что $\operatorname{Sub}\mathfrak{A} = \{Q \cup \{0', 1'\}, Q, \{0', 1'\}$ и содержащие $0, 1$ подкольца кольца $Q\}$. Не существует нетривиальных конгруэнций и нетривиальных автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Обогатим сигнатуру алгебры $\mathfrak{A}$ новой одноместной функцией $h(x)$, определяя ее как $h(x) = x + 1$ на Q и $h(x) = x + 1'$ на $\{0', 1'\}$ в алгебре $\mathfrak{A}_1$ и как $h(x) = x + 1$ на Q и $h(x) = x$ на $\{0', 1'\}$ в алгебре $\mathfrak{A}_2$. Тогда $\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Sub}\mathfrak{A}_2 = \operatorname{Sub}\mathfrak{A}$, $\operatorname{Con}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Con}\mathfrak{A}_2 = \operatorname{Con}\mathfrak{A}$, $\operatorname{Aut}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Aut}\mathfrak{A}_2 = \operatorname{Aut}\mathfrak{A}$, но $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_1$ содержит естественный гомоморфизм подалгебры $\langle Z; +, \cdot, -, 0(x), 1(x), h(x)\rangle$ на подалгебру $\langle \{0', 1'\}; +, \cdot, -, 0(x), 1(x), h(x)\rangle$, в то время как $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_2$ подобного гомоморфизма не содержит.

Утверждение 4. *Если для алгебр $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1\rangle$, $\mathfrak{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2\rangle$ существует биекция φ множества A_1 на A_2 такая, что биекция φ^2 множества A_1^2 на A_2^2 сопрягает решетки подалгебр $\mathfrak{A}_1^2$ и $\mathfrak{A}_2^2$, то φ сопрягает полугруппы $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_1$ и $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_2$ и тем самым алгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ неявно эквивалентны.*

Обратное неверно: пусть $\mathfrak{A}_1 = \langle \{0, 1\}; \wedge, \vee\rangle$ — двухэлементная решетка и $\mathfrak{A}_2$ — ее обогащение с помощью дискриминатора $d(x, y, z)$. Тогда очевидно, что $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_2$, но $\left|\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_1^2\right| > \left|\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_2^2\right|$, поскольку $\mathfrak{A}_1^2$ содержит трехэлементную подалгебру, а $\mathfrak{A}_2^2$ — нет. Тем самым $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ неявно эквивалентны, в то время как совокупности $\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_1^2$ и $\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_2^2$ не сопряжены никаким отображением φ^2 ни для какой биекции φ алгебры $\mathfrak{A}_1$ на $\mathfrak{A}_2$.

Приведенный пример демонстрирует также то, что операция возведения в квадрат не сохраняет, вообще говоря, отношение неявной эквивалентности алгебр.

Широко известно понятие категорной эквивалентности алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (см., к примеру, [15]). Алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ категорно эквивалентны, если существует изоморфизм φ категорий $\overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{A})}$ и $\overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{B})}$ такой, что $\varphi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$. Здесь $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ — многообразие, порожденное алгеброй $\mathfrak{A}$, и $\overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{A})}$ — категория, объектами которой являются $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$-алгебры, а морфизмами — любые гомоморфизмы одних $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$-алгебр в другие.

В силу существования разномощных категорно эквивалентных алгебр (к примеру, категорно эквивалентны между собой любые примальные алгебры) категорная эквивалентность алгебр не влечет их неявную эквивалентность. Приведенный же выше пример алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ таких, что $\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_2$, но $\left|\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_1^2\right| > \left|\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_2^2\right|$, является примером неявно эквивалентных алгебр, не являющихся категорно эквивалентными.

Остановимся, наконец, еще на одном естественном вопросе, связанном с неявными операциями на алгебрах. Напомним, что через $\operatorname{Tr}^n_\sigma$ обозначена выше совокупность всех n-местных термов сигнатуры σ. Через $\operatorname{Tr}^n_\sigma(\mathfrak{A})$ обозначим всех n-местных термальных функций на алгебре $\mathfrak{A}$, через $IO^n(\mathfrak{A})$ — совокупность всех n-местных неявных операций на $\mathfrak{A}$, а через $F^n(A)$ — совокупность всех n-местных функций на множестве A. Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ имеют место включения

$$\mathrm{Tr}^n_\sigma(\mathfrak{A}) \subseteq IO^n(\mathfrak{A}) \subseteq F^n(A).$$

Алгебру $\mathfrak{A}$ назовем *неявно n-полной*, если $\mathrm{Tr}^n_\sigma(\mathfrak{A}) = IO^n(\mathfrak{A})$, и *неявно n-примальной*, если $IO^n(\mathfrak{A}) = F^n(A)$. Естественны вопросы описания неявно n-полных и n-примальных алгебр.

В силу указанного выше Галуа-соответствия между совокупностями $IO^n(\mathfrak{A})$ и полугруппами $\mathrm{Ihm}(\mathfrak{A})$ равенство $IO^n(\mathfrak{A}) = F^n(A)$ равносильно тривиальности ($\mathrm{Ihm}(\mathfrak{A}) = \{\mathrm{id}_A\}$, здесь id_A — тождественное отображение множества A на себя) полугруппы $\mathrm{Ihm}(\mathfrak{A})$. Таким образом, имеет место следующий критерий неявной n-примальности алгебр.

Утверждение 5. *Для любого натурального n алгебра $\mathfrak{A}$ неявно n-примальна тогда и только тогда, когда она неявно 1-примальна, а это, в свою очередь, равносильно тому, что $\mathfrak{A}$ не имеет собственных подалгебр и нетривиальных эндоморфизмов.*

Укажем одно из достаточных условий для неявной n-полноты универсальной алгебры. Очевидным образом имеет место

Утверждение 6. *Алгебра $\mathfrak{A}$ неявно n-полна, если существует n-порожденная ее подалгебра, являющаяся n-свободно порожденной для класса всех n-порожденных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$.*

Как следствие этого утверждения отметим следующее. В силу того, что n-свободно порожденная булева алгебра вложима в любую бесконечную булеву алгебру для любого натурального n, любая бесконечная булева алгебра неявно n-полна для любого натурального n.

Алгебру $\mathfrak{A}$ назовем *n-равномерно конечной*, если существует натуральное m такое, что все ее не более чем n-порожденные подалгебры имеют не более чем m элементов.

Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ и для любого натурального n на множестве A^n определим квазипорядок $\leqslant^n$ следующим образом: для $\bar a = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$, $\bar b = \langle b_1, \dots, b_n\rangle \in A^n$ считаем $\bar a \leqslant^n \bar b$ тогда и только тогда, когда отображение $\varphi : a_i \to b_i$ $(i = 1, \dots, n)$ продолжимо до гомоморфизма алгебры $\langle a_1, \dots, a_n\rangle_{\mathfrak{A}}$ на алгебру $\langle b_1, \dots, b_n\rangle_{\mathfrak{A}}$. Через $\sim_n$ обозначим отношение эквивалентности на A^n, соответствующее квазипорядку $\leqslant^n$.

Заметим, что если алгебра $\mathfrak{A}$ n-равномерно конечна и конечна ее сигнатура, то конечно и частично упорядоченное множество $\langle A^n/\sim_n; \leqslant^n\rangle$. Пусть $M^{\mathfrak{A}}_n = \{\bar a^1, \dots, \bar a^s\}$ — совокупность максимальных элементов из $\langle A^n; \leqslant^n\rangle$. Отображение $\psi : M^{\mathfrak{A}}_n \to \mathrm{Tr}^n_\sigma$ назовем *согласованным*, если для любых $j_1, j_2 \leqslant s$

$$\mathfrak{A} \models \forall \bar x\big(D^+_{\bar a^{j_1}}(\bar x) \& D^+_{\bar a^{j_2}}(\bar x) \to \psi(\bar a^{j_1})(\bar x) = \psi(\bar a^{j_2})(\bar x)\big).$$

Терм $t(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Tr}^n_\sigma$ назовем *спрямляющим* для ψ, если на $\mathfrak{A}$ истинны квазитождества

$$\forall \bar x\big(D^+_{\bar a^j}(\bar x) \to \psi(\bar a^j)(\bar x) = t(\bar x)\big)$$

для любого $j \leqslant s$.

Очевидным образом имеет место

Утверждение 7. *n-Равномерно конечная алгебра $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры неявно n-полна тогда и только тогда, когда для любого согласованного отображения $\psi : M_n^{\mathfrak{A}} \to \mathrm{Tr}_\sigma^n$ существует спрямляющий для ψ терм $t(x_1, \dots, x_n)$.*

Из этого утверждения непосредственно вытекает

Следствие 3. *Подкласс неявно n-полных алгебр выделяется в классе n-равномерно конечных универсальных алгебр некоторой системой элементарных формул.*

В частности, алгебра, элементарно эквивалентная неявно n-полной n-равномерно конечной алгебре, и сама неявно n-полна, ультрапроизведение неявно n-полных n-равномерно конечных алгебр в случае своей n-равномерной конечности неявно n-полно.

Остается открытым вопрос о нахождении чисто алгебраического критерия для неявной полноты универсальных алгебр.

2. Алгебры, неявно эквивалентные полурешеткам и иным конкретным алгебрам

Целью настоящего раздела является описание на языке полугрупп внутренних гомоморфизмов универсальных алгебр, неявно эквивалентных некоторым классическим алгебрам: полурешеткам, решеткам и булевым алгебрам.

В [17] подобная проблематика представлена для отношения условной рациональной эквивалентности конечных алгебр на языке $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ (полугруппы внутренних изоморфизмов $\mathfrak{A}$ — полугруппы изоморфизмов между подалгебрами алгебры $\mathfrak{A}$). Так как подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ отождествимы с идемпотентами полугрупп $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ и $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$, то, как и в [16], соответствующие свойства этих полугрупп удобнее формулировать на языке пар $\langle \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}, \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}\rangle$ ($\langle \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}, \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}\rangle$). Отметим также, что $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ — подполугруппа полугруппы $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$. Через $\mathrm{Sub}_n\,\mathfrak{A}$ (для любого натурального n) обозначим совокупность n-элементных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим следующие условия на пару $\langle \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}, \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}\rangle$ для произвольной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$.

(sl_1) Для любого $a \in A$ должно быть $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a\}$, т. е. все однопорожденные подалгебры алгебры одноэлементны ($\mathfrak{A}$ идемпотентна).

(sl_2) Для любых $a, b \in A$ если $a \neq b$, то $\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Sub}_2\,\mathfrak{A}$, либо $\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Sub}_3\,\mathfrak{A}$.

(sl_3) Для любых $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathrm{Sub}_2\,\mathfrak{A}$ существует, причем единственный, изоморфизм $g \in \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ такой, что $\mathrm{rang}\, g = \mathfrak{B}_2$, $\mathrm{dom}\, g = \mathfrak{B}_1$.

(sl_4) Для любых $a, b, a', b' \in A$ если $\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}}, \langle a', b'\rangle_{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Sub}_3\,\mathfrak{A}$, то существуют ровно два отображения $g_1, g_2 \in \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ такие, что $\mathrm{dom}\, g_1 = \mathrm{dom}\, g_2 = \langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}}$, $\mathrm{rang}\, g_1 = \mathrm{rang}\, g_2 = \langle a', b'\rangle_{\mathfrak{A}}$. При этом если $\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a, b, c\}$, $\langle a', b'\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a', b', c'\}$, то $g_1(c) = g_2(c)$ и $\langle a, c\rangle_{\mathfrak{A}}, \langle b, c\rangle_{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Sub}_2\,\mathfrak{A}$.

(sl_5) Для любых $\mathfrak{B} \in \mathrm{Sub}_2\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L} \in \mathrm{Sub}_3\,\mathfrak{A}$ существуют ровно два гомоморфизма алгебры $\mathfrak{L}$ на алгебру $\mathfrak{B}$.

(sl_6) Существует не более одной (с точностью до изоморфизма) трехэлементной подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$, которая не является двухпорожденной. Если $\{a, b, c\} \in \mathrm{Sub}_3\,\mathfrak{A}$, $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\} \in \mathrm{Sub}_2\,\mathfrak{A}$ и $g \in \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ таково, что $\mathrm{dom}\, g = \{a, b\}$, $\mathrm{rang}\, g = \{b, c\}$, $g(a) = b$, $g(b) = c$, то существует $h \in \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ такое, что $\mathrm{dom}\, h = \{a, b\}$, $\mathrm{rang}\, h = \{a, c\}$ и $h(a) = a$, $h(b) = c$. Кроме того, для любых $a, b, c \in A$ если $\{a, b\}, \{b, c\} \in \mathrm{Sub}_2\,\mathfrak{A}$ и существует $g \in \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ такой, что $\mathrm{dom}\, g = \{a, b\}$, $\mathrm{rang}\, g = \{b, c\}$ и $g(a) = b$, $g(b) = c$, то $\{a, b, c\} \in \mathrm{Sub}_3\,\mathfrak{A}$.

(sl$_7$) Для любых $a, b, c \in A$ если $\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Sub}_3\,\mathfrak{A}$ и $\langle a, c\rangle_{\mathfrak{A}}, \langle b, c\rangle_{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Sub}_2\,\mathfrak{A}$, $c \notin \langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}}$, то $\langle a, b, c\rangle_{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Sub}_4\,\mathfrak{A}$. Если при этом $\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a, b, d\}$, то существует $h \in \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ такой, что $\mathrm{dom}\,h = \langle d, c\rangle_{\mathfrak{A}}$, $\mathrm{rang}\,h = \langle a, c\rangle_{\mathfrak{A}}$ и $h(d) = a$, $h(c) = c$.

(sl$_8$) Для любого натурального n и любых $b_1, \dots, b_n, c \in A$ таких, что $c \in \langle b_1, \dots, b_n\rangle_{\mathfrak{A}}$, существуют натуральное k и отображение f множества $\{0, 1, \dots, k-1\}$ в совокупность конечных подмножеств $P_\omega(A)$ множества A такие, что $f(0) = \{b_1, \dots, b_n\}$ и для любого $0 < r \leqslant k-1$ и любого $a' \in f(r) \setminus f(r-1)$ найдутся $a'', a''' \in f(r-1)$ такие, что $a' \in \langle a'', a'''\rangle_{\mathfrak{A}}$, при этом $c \in f(k-1)$.

(sl$_9$) Для любого частичного отображения h множества A в себя $h \in \mathrm{Ihm}(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in \mathrm{dom}\,h$ ограничение $h \restriction \langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}}$ до множества $\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}}$ входит в $\mathrm{Ihm}(\mathfrak{A})$.

Непосредственно замечается выполнимость условий (sl$_1$)–(sl$_9$) для любой полурешетки $\mathfrak{A}$. Покажем теперь, что если для алгебры $\mathfrak{A}$ выполнены условия (sl$_1$)–(sl$_9$), то $\mathfrak{A}$ неявно эквивалентна некоторой полурешетке.

Прежде всего отметим ряд простых следствий выполнимости условий (sl$_1$)–(sl$_9$) для алгебры $\mathfrak{A}$. Будем считать, что $|A| \neq 1$. Тогда в силу условий (sl$_2$)–(sl$_4$) существует, причем единственная с точностью до изоморфизма, двухэлементная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $a, b \in A$, $a \neq b$ и $|\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}}| = 2$. Пусть $D(x_1, x_2)$ — диаграмма подалгебры $\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{A} \models D(a, b)$. В силу условия (sl$_3$) $\mathfrak{A} \not\models D(b, a)$.

Определим теперь отношение $\leqslant$ на A следующим образом: для $c, d \in A$ отношение $c \leqslant d$ имеет место тогда и только тогда, когда $c = d$ либо $\mathfrak{A} \models D(c, d)$.

В силу замеченного выше рефлексивное отношение $\leqslant$ антисимметрично. Условие (sl$_5$) влечет свойство транзитивности для отношения $\leqslant$, и тем самым отношение $\leqslant$ является отношением частичного порядка на основном множестве алгебры $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим две возможные ситуации: когда существует трехэлементная двухпорожденная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ и когда все двухпорожденные подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ двухэлементны.

Остановимся лишь на первом случае, второй случай (когда $\langle A; \leqslant\rangle$ линейно упорядоченно) рассматривается аналогично. Итак, пусть $a, b \in A$, $a \neq b$ и $|\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}}| = 3$. Пусть $\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a, b, t(a, b)\}$, где $t(x, y)$ — некоторый терм сигнатуры σ. В силу условия (sl$_4$) либо $\mathfrak{A} \models D(t(a, b), a)$, либо $\mathfrak{A} \models D(a, t(a, b))$. Для определенности выберем первый вариант (в противном случае будем иметь дело не с нижней, а с верхней полурешеткой). Из условия (sl$_4$) вытекают неравенства $t(a, b) \leqslant a$, $t(a, b) \leqslant b$. Условие (sl$_7$) влечет равенство $t(c, d) = \inf(c, d)$ в частично упорядоченном множестве $\langle A; \leqslant\rangle$ для любых несравнимых в $\langle A; \leqslant\rangle$ элементов c, d. Заметим также, что любое отображение h произвольной двухпорожденной подалгебры $\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}}$ на некоторую подалгебру $\langle c, d\rangle_{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathfrak{A}$ является гомоморфизмом тогда и только тогда, когда h является гомоморфизмом множества $\langle\langle a, b\rangle_{\mathfrak{A}}; \leqslant\rangle$ на множество $\langle\langle c, d\rangle_{\mathfrak{A}}; \leqslant\rangle$. В силу условий (sl$_8$) и (sl$_5$) любое отображение h подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$ алгебры $\mathfrak{A}$ на подалгебру $\mathfrak{L} = \langle C; \sigma\rangle$ будет внутренним гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда h является гомоморфизмом частично упорядоченного множества $\langle B; \leqslant\rangle$ на множество $\langle C; \leqslant\rangle$.

Рассмотрим следующий ∞-позитивно-условный (даже просто позитивно-условный) терм сигнатуры σ:

$$x \wedge y = \begin{cases} D^+_{\langle t(a,b),a\rangle}(x,y) \to t(x,y), \\ D^+_{\langle a,t(a,b)\rangle}(x,y) \to x, \\ D^+_{\langle a,b\rangle}(x,y) \to t(x,y). \end{cases}$$

В силу отмеченного выше если для алгебры $\mathfrak{A}$ выполнены условия (sl_1)–(sl_9), то для любых $c, d \in A$ имеет место равенство $c \wedge d = \inf(c,d)$ в частично упорядоченном множестве $\langle A; \leqslant\rangle$ и, значит, алгебра $\mathfrak{A}' = \langle A; \wedge\rangle$ является полурешеткой.

В силу свойства (sl_8) совокупности основных множеств конечно порожденных, а значит, и всех подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ и подполурешеток полурешетки $\langle A; \wedge\rangle$ совпадают. Ввиду замеченного выше о внутренних гомоморфизмах алгебры $\mathfrak{A}$ и частично упорядоченного множества $\langle A; \leqslant\rangle$ совпадают внутренние гомоморфизмы алгебры $\mathfrak{A}$ и полурешетки $\langle A; \wedge\rangle$, что и влечет по утверждению 4 неявную эквивалентность алгебры $\mathfrak{A}$ и полурешетки $\langle A; \wedge\rangle$.

Тем не менее укажем явно ∞-позитивно-условные термы сигнатуры $\langle\wedge\rangle$, определяющие сигнатурные функции $f(x_1,\dots,x_n)$ алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_{g(n)}$ — представители всех типов изоморфизма в сигнатуре σ (или, что все равно в силу замеченного выше, в сигнатуре $\langle\wedge\rangle$) n-порожденных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ с выделенными порождающими $\bar a^i = \left\langle a^i_1,\dots,a^i_n\right\rangle$ ($i \leqslant g(n)$). Здесь $g(n)$ конечно в силу локальной конечности полурешетки $\langle A; \wedge\rangle$, а значит, и алгебры $\mathfrak{A}$. Для любого $i \leqslant g(n)$ имеет место включение $f\left(a^i_1,\dots,a^i_n\right) \in \langle \bar a^i\rangle_{\mathfrak{A}}$. В силу условия ($\mathrm{sl}_8$) и того, что элементы в двухпорожденных (элементами x, y) подалгебрах алгебры $\mathfrak{A}$ совпадают со значениями термов $x, y, t(x,y)$ и в итоге со значениями на x, y операции $x \wedge y$, найдутся термы $t_i(x_1,\dots,x_n)$ сигнатуры $\langle\wedge\rangle$ такие, что

$$\mathfrak{A}' \models t_i\left(a^i_1,\dots,a^i_n\right) = f\left(a^i_1,\dots,a^i_n\right).$$

Тем самым позитивно-условный терм

$$t(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} D^+_{\bar a^1}(x_1,\dots,x_n) \to t_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D^+_{\bar a^{g(n)}}(x_1,\dots,x_n) \to t_{g(n)}(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

сигнатуры $\langle\wedge\rangle$ определяет на полурешетке $\mathfrak{A}' = \langle A; \wedge\rangle$ функцию f.

Таким образом, имеет место

Теорема. *Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ неявно эквивалентна некоторой полурешетке тогда и только тогда, когда для пары $\langle \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}, \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}\rangle$ выполнены условия* (sl_1)–(sl_9).

Подобным образом возможно описание на языке $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ для алгебр, неявно эквивалентных алгебрам любого многообразия $\mathscr{K}$ универсальных алгебр сигнатуры σ, удовлетворяющего следующим требованиям:

1) местность функциональных символов из σ не превышает некоторого натурального n; $\mathscr{K}$ аксиоматизируемо совокупностью тождеств, число переменных которых ограничено некоторым натуральным числом (пусть тем же n) в совокупности;

2) n-порожденные $\mathscr{K}$-алгебры конечны и число типов изоморфизма таких подалгебр также конечно.

Тогда алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ неявно эквивалентна некоторой $\mathscr{K}$-алгебре при выполнении следующих условий.

(а) Все не более чем n-порожденные подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ и гомоморфизмы между ними такие же, как для $\mathscr{K}$-алгебр. В силу условия 2 подобное описание возможно.

(б) Для любого натурального m и любых $b_1, \dots, b_m, c \in A$ таких, что $c \in \langle b_1, \dots, b_m \rangle_{\mathfrak{A}}$, существуют натуральное k и отображение f множества $\{0, 1, \dots, k-1\}$ в совокупность $P_\omega(A)$ конечных подмножеств множества A такие, что $f(0) = \{b_1, \dots, b_m\}$ и для любого $0 < r \leqslant k-1$ и любого $a \in f(r) \setminus f(r-1)$ найдутся $a_1, \dots, a_n \in f(r-1)$ такие, что $a \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ и при этом $c \in f(k-1)$.

(в) Для любого частичного отображения h множества A в себя $h \in \mathrm{Ihm}(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда для любых $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{dom}\, h$ ограничение $h \restriction \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ до множества $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ входит в $\mathrm{Ihm}(\mathfrak{A})$.

Без труда в явном виде на основе этой схемы находятся, к примеру, описания универсальных алгебр, неявно эквивалентных решеткам или булевым алгебрам.

3. Неявные операции по вложимости

В данном разделе предлагается вариация предыдущих рассмотрений при ином естественном истолковании неявной операции на универсальной алгебре (при ином выборе исходной категории, связанной с изучаемой универсальной алгеброй).

Напомним, что через $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ обозначена полугруппа внутренних изоморфизмов алгебры (совокупности изоморфизмов между подалгебрами алгебры $\mathfrak{A}$ с естественным образом определенной операцией суперпозиции частичных отображений).

Под *неявной операцией по вложимости на алгебре* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ будем понимать функцию f на множестве A, относительно которой замкнуты подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ и которая коммутирует с любым внутренним изоморфизмом $\mathfrak{A}$. Через $I_{\mathrm{emb}}O(\mathfrak{A})$ обозначим совокупность всех неявных операций по вложимости на алгебре $\mathfrak{A}$.

Для любого кортежа $\bar{a}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ через $D_{\bar{a}}(x_1, \dots, x_n)$ обозначим диаграмму алгебры $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}}$ такую, что $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \models D_{\bar{a}}(\bar{a})$.

Если при этом конечны сигнатура σ и алгебра $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}}$, то под $D_{\bar{a}}(\bar{x})$ будем понимать некоторую конечную часть $T(\bar{x})$ диаграммы $D_{\bar{a}}(\bar{x})$ такую, что

$$\mathfrak{A} \models \forall \bar{x} (T(\bar{x}) \to D_{\bar{a}}(\bar{x})).$$

Тем самым для любой алгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma \rangle$ и любых ее элементов $\bar{b}$

$$\mathfrak{B} \models \& D_{\bar{a}}(\bar{b})$$

тогда и только тогда, когда отображение $\varphi : a_i \to b_i$ $(i = 1, \dots, n)$ продолжимо до изоморфизма алгебры $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}}$ на алгебру $\langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}}$.

Под ∞-*условным термом* $t_\varphi(x_1, \dots, x_n)$ алгебры $\mathfrak{A}$ будем понимать схему

$$t_\varphi(\bar{x}) = \mathop{\&}_{\langle \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}}, \bar{a} \rangle \in T^n_{\mathfrak{A}}} (\& D_{\bar{a}}(\bar{x}) \to \varphi(\langle \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}}, \bar{a} \rangle)(\bar{x})),$$

где φ — произвольное отображение множества $T^n_{\mathfrak{A}}$ в совокупность Tr^n_σ термов сигнатуры σ от переменных $\bar{x}$.

Любой ∞-условный терм $t_\varphi(x_1,\dots,x_n)$ естественным образом определяет на алгебре $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma\rangle$ n-местную ∞-*условно термальную функцию* $t^{\mathfrak{A}}_\varphi(\bar{x})$: для $\bar{a}\in A$ если $\mathfrak{A}\models D_{\bar{b}}(\bar{a})$, то $t^{\mathfrak{A}}_\varphi(\bar{a})=\varphi(\langle\langle\bar{b}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{b}\rangle)(\bar{a})$.

Очевидно, что любая ∞-условно термальная функция на алгебре $\mathfrak{A}$ является неявной операцией по вложимости на $\mathfrak{A}$. Очевидно и обратное: любая неявная операция по вложимости на $\mathfrak{A}$ является ∞-условно термальной функцией на $\mathfrak{A}$.

Заметим, что в случае равномерно локально конечной алгебры $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры ∞-условно термальные функции на $\mathfrak{A}$ суть условно термальные на $\mathfrak{A}$ функции (см., к примеру, [13]).

Очевидно, что одна и та же неявная операция по вложимости на $\mathfrak{A}$ может определяться на $\mathfrak{A}$ отличными друг от друга ∞-условными термами. При этом два ∞-условных терма $t_\varphi(\bar{x})$ и $t_\psi(\bar{x})$ определяют на $\mathfrak{A}$ одну и ту же неявную операцию по вложимости тогда и только тогда, когда на $\mathfrak{A}$ истинны $L_{\infty,\omega}$-формулы

$$\forall\bar{x}(D_{\bar{a}}(\bar{x})\& D_{\bar{b}}(\bar{x})\to\varphi(\langle\langle\bar{a}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{a}\rangle)(\bar{x})=\psi(\langle\langle\bar{b}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{b}\rangle)(\bar{x}))$$

для любых $\langle\langle\bar{a}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{a}\rangle,\langle\langle\bar{b}\rangle_{\mathfrak{A}},\bar{b}\rangle\in T^n_{\mathfrak{A}}$.

Подобного типа формулы определены в [18] как условные ∞-квазитождества.

Алгебры $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma\rangle$ и $\mathfrak{B}=\langle B;\sigma\rangle$ назовем *синтаксически неявно эквивалентными по вложимости*, если на них определены одни и те же ∞-условные термы ($T^n_{\mathfrak{A}}=T^n_{\mathfrak{B}}$ для любого натурального n) и два ∞-условных терма определяют на $\mathfrak{A}$ одну и ту же неявную операцию по вложимости тогда и только тогда, когда они определяют одну и ту же неявную операцию по вложимости на алгебре $\mathfrak{B}$.

Как в разд. 1, замечается равносильность синтаксической неявной эквивалентности алгебр и совпадения ∞-квазиэквациональных теорий этих алгебр, а также равносильность условий синтаксической неявной эквивалентности по вложимости для алгебр и совпадения фрагментов теорий этих алгебр, состоящих из условных ∞-квазитождеств.

В [18] доказана равносильность условий условной геометрической эквивалентности алгебр (определение см. в [18]) совпадения фрагментов $L_{\infty,\omega}$-теорий этих алгебр, состоящих из условных ∞-квазитождеств и вложимости любой неодноэлементной конечно порожденной подалгебры одной из этих алгебр в другую.

Таким образом, имеет место

Утверждение 8. *Следующие условия для алгебр $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma\rangle$, $\mathfrak{B}=\langle B;\sigma\rangle$ равносильны:*

а) *алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ синтаксически неявно эквивалентны по вложимости,*

б) *условные ∞-квазиэквациональные теории алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадают,*

в) *алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ условно геометрически эквивалентны,*

г) *любая неодноэлементная конечно порожденная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ изоморфно вложима в алгебру $\mathfrak{B}$, и наоборот.*

Из утверждений 1 и 8 следует, что любые синтаксически неявно эквивалентные по вложимости алгебры являются и синтаксически неявно эквивалентными. Пример конечных разномощных булевых алгебр показывает, что обратное неверно. Заметим также, что в силу утверждения 8 любые бесконечные булевы алгебры синтаксически неявно эквивалентны по вложимости.

Отметим также имеющее место в силу результатов из [18] следствие утверждения 8.

Следствие 4. *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ не более чем счетной сигнатуры и для любого кардинала $k \geqslant 2^{\aleph_0}$ существует универсальная алгебра $\mathfrak{A}_k$ мощности k, синтаксически неявно эквивалентная по вложимости алгебре $\mathfrak{A}$.*

Ограничение $k \geqslant 2^{\aleph_0}$ существенно.

Алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ назовем неявно *эквивалентными по вложимости*, если существует биекция φ множества A на множество B, сопрягающая сигнатурные функции алгебры $\mathfrak{A}$ с некоторыми неявными по вложимости операциями на алгебре $\mathfrak{B}$, и обратно. Иначе говоря, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ неявно эквивалентны по вложимости, если существует биекция φ, сопрягающая совокупности неявных по вложимости операций $I_{\mathrm{emb}}O(\mathfrak{A})$ и $I_{\mathrm{emb}}O(\mathfrak{B})$ этих алгебр.

В силу указанной выше взаимосвязи неявных по вложимости операций и ∞-условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ неявно эквивалентны по вложимости тогда и только тогда, когда сигнатурные функции одной из них сопряжены с некоторыми ∞-условно термальными функциями другой, и наоборот.

Очевидным образом в силу естественного Галуа-соответствия между совокупностями неявных операций по вложимости на алгебрах $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и полугруппами $\operatorname{Iso}\mathfrak{A}$ имеет место

Утверждение 9. *Универсальные алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ неявно эквивалентны по вложимости тогда и только тогда, когда существует биекция φ множества A на множество B, сопрягающая полугруппы внутренних изоморфизмов $\operatorname{Iso}\mathfrak{A}$ и $\operatorname{Iso}\mathfrak{B}$ этих алгебр.*

В силу того, что для равномерно локально конечных конечной сигнатуры алгебр ∞-условно термальные функции суть условно термальные (см., к примеру, [13]), равномерно локально конечные конечной сигнатуры алгебры неявно эквивалентны по вложимости тогда и только тогда, когда они условно рационально эквивалентны.

Без труда замечается, что отношения неявной эквивалентности по вложимости и синтаксической неявной эквивалентности по вложимости для алгебр независимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eilenberg S., Schutzenberger M. P.* On pseudovarieties // Adv. Math. 1976. V. 19, N 3. P. 413–418.
2. *Пинус А. Г.* Неявные операции над категориями универсальных алгебр // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 146–153.
3. *Пинус А. Г.* О неявных условных операциях на псевдоуниверсальных классах // Фунд. и прикл. математика. 2004. Т. 10, № 4. С. 174–182.
4. *Пинус А. Г.* Позитивно-условные псевдомногообразия и неявные операции на них // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 372–382.
5. *Пинус А. Г.* О $\exists^+$-условных многообразиях, $\exists^+$-условных псевдомногообразиях и неявных операциях на них // Алгебра и теория моделей. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. № 5. С. 138–161.
6. *Пинус А. Г.* Геометрические шкалы многообразий алгебр и квазитождества // Мат. тр. 2009. Т. 12, № 2. С. 160–169.
7. *Пинус А. Г.* О ∞-квазимногообразиях // Изв. вузов. Математика. 2011. № 8. С. 40–45.
8. *Пинус А. Г.* Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 4. С. 432–459.

9. *Plotkin B.* Varieties of algebras and algebraic varieties // Israel Math. J. 1996. V. 96, N 2. P. 511–522.

10. *Плоткин Б. И.* Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 4. С. 224–248.

11. *Plotkin B. I.* Algebras with the same (algebraic) geometry // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. Математическая логика и алгебра: Сб. статей. К 100-летию со дня рождения акад. П. С. Новикова. М.: Наука, 2003. Т. 242. С. 176–207.

12. *Мальцев А. И.* Структурная характеристика некоторых классов алгебр // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 1. С. 29–32.

13. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.

14. *Пинус А. Г.* О функциях коммутирующих с полугруппами преобразований алгебр // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1409–1418.

15. *Пинус А. Г.* Производные структуры универсальных алгебр. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.

16. *Пинус А. Г.* О Галуа-соответствии между неявными операциями и категориями универсальных алгебр // Вестн. НГУ (в печати).

17. *Пинус А. Г.* Об алгебрах условно рационально эквивалентных полурешеткам и булевым алгебрам // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 121–128.

18. *Пинус А. Г.* Новые алгебраические инварианты для формульных подмножеств универсальных алгебр // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 209–230.

Статья поступила 7 сентября 2011 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
`algebra@nstu.ru`