Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.55

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПОЛУАРТИНОВЫХ КОЛЕЦ

А. Н. Абызов

Аннотация. Известно, что для произвольного кольца R из слабой регулярности всех правых R-модулей не следует слабая регулярность всех левых R-модулей. В настоящей статье описаны кольца, над которыми каждый правый и левый модули слабо регулярны. Также получено описание полуартиновых CSL-колец.

Ключевые слова: слабо регулярный модуль, квазипроективный модуль, полуартиново кольцо, SV-кольцо, CSL-кольцо.

Работа является непосредственным продолжением [1, 2]. Определения и результаты из [2–4] предполагаются известными. Слова типа «полуартиново кольцо» означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева.

В монографии [5, с. 452] поставлена проблема о существовании обобщенного справа SV-кольца, которое не является обобщенным слева SV-кольцом. Соответствующий пример кольца приведен в [1, с. 735]. В разд. 2 настоящей статьи для произвольного кольца R приводим ряд необходимых и достаточных условий, при которых R является обобщенным SV-кольцом. В разд. 3 изучаются связи между SV-кольцами, CSL-кольцами, CC-кольцами и mod-ретрактабельными кольцами.

1. Предварительные результаты

Настоящий раздел содержит необходимые для дальнейших рассуждений результаты, многие из которых касаются квазипроективных модулей. Рассмотрение квазипроективных модулей позволяет развивать соответствующую теорию в рамках категорий Висбауэра и получать результаты, связанные с гомологической классификаций модулей. Данный подход предложен Висбауэром и широко предоставлен в его монографии [6].

Согласно [7, с. 76] в полуартиновом справа кольце каждый примитивный справа идеал является примитивным слева идеалом, и наоборот. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении полуартиновых колец мы не будем различать примитивные справа и слева идеалы.

Лемма 1.1. *Для полуартинова справа кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *у кольца R каждый примитивный образ артинов;*

(2) *для каждого фактор-кольца R/S, у которого $J(R/S) = 0$, каждая однородная компонента $\mathrm{Soc}(R/S_R)$ имеет конечную длину;*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 10–01–00431–а).

(3) *для каждого простого правого R-модуля S левое векторное пространство ${}_{\mathrm{End}(S)}S$ конечномерно.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) Предположим противное. Тогда для некоторого фактор-кольца R/S такого, что $J(R/S)=0$, одна из однородных компонент $\mathrm{Soc}(R/S_R)$ имеет бесконечную длину. Легко видеть, что в этом случае в кольце R/S найдется бесконечное семейство взаимно ортогональных ненулевых идемпотентов $e_1, e_2, \dots$ такое, что e_1R — простой подмодуль модуля R/S_R и $e_1R \cong e_iR$ для каждого натурального i. Тогда $T=\mathrm{Ann}(e_1R)$ — примитивный идеал и $e_i \notin T/S$ для каждого i. Следовательно, R/T содержит бесконечное семейство взаимно ортогональных ненулевых идемпотентов, что противоречит предположению п. 1.

(2)$\Rightarrow$(1) Пусть T — примитивный идеал кольца R. Тогда очевидно, что $\mathrm{Soc}(R/T_R)$ имеет только одну однородную компоненту. Следовательно, длина модуля $\mathrm{Soc}(R/T_R)$ конечна, и R/T — артиново кольцо.

(1)$\Rightarrow$(3) Пусть S — простой правый R-модуль и P — его аннулятор. Тогда S можно рассматривать как правый R/P-модуль. Так как R/P — простое артиново кольцо, то $\dim({}_{\mathrm{End}(S)}S)=\lg(R/P_{R/P})$.

(3)$\Rightarrow$(1) Пусть P — примитивный идеал кольца R. Если R/P не является артиновым, то $\mathrm{Soc}(R/P)$ не является модулем конечной длины. Тогда в кольце R/P найдется бесконечное семейство примитивных взаимно ортогональных идемпотентов $e_1, e_2, \dots$ такое, что $e_1R \cong e_iR$ для каждого натурального i. Так как $e_1Re_i \neq 0$, то $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} e_1Re_i$ является бесконечномерным подпространством левого векторного пространства ${}_{e_1Re_1}e_1R$, что противоречит условию п. 3. $\square$

Для произвольного правого R-модуля M введем следующее условие:
$(*)$ для каждого инвариантного подмодуля N модуля M, у которого $J(M/N)=0$, однородные компоненты $\mathrm{Soc}(M/N)$ имеют конечные длины.

Лемма 1.2. *Пусть P — конечно порожденный квазипроективный R-модуль. Если у кольца $\mathrm{End}(P)$ каждый примитивный образ артинов, то модуль P удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такой инвариантный подмодуль P_0 модуля P, что $J(P/P_0)=0$ и P/P_0 содержит подмодуль вида $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} N_i$, где $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ — попарно изоморфные простые подмодули модуля P/P_0. Так как P квазипроективен, естественный гомоморфизм $\varphi: \mathrm{End}(P)/\mathrm{Hom}(P,P_0) \to \mathrm{End}(P/P_0)$ является изоморфизмом. Из [6, 22.2] следует, что $J(\mathrm{End}(P/P_0))=0$. Поскольку каждый простой подмодуль в P/P_0 является прямым слагаемым, $\mathrm{Hom}(P/P_0, N_i) \neq 0$ для каждого i. Согласно [2, лемма 1] правый $\mathrm{End}(P/P_0)$-модуль $\mathrm{Hom}\left(P/P_0, \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} N_i\right) = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Hom}(P/P_0, N_i)$ полупрост. Следовательно, у кольца $\mathrm{End}(P)/\mathrm{Hom}(P,P_0)$ цоколь содержит однородную компоненту бесконечной длины. Из доказательства импликации (1)$\Rightarrow$(2) леммы 1.1 следует, что у кольца $\mathrm{End}(P)$ не каждый примитивный образ артинов. Получили противоречие с предположением исходной леммы. $\square$

Следующая лемма непосредственно вытекает из [8, следствие 2.2].

Лемма 1.3. *Для примитивного справа кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R — классически полупростое кольцо;*

(2) *в кольце R существует такой идемпотент e, что eR и Re являются соответственно правым и левым простыми инъективными R-модулями.*

Для произвольного правого R-модуля M с помощью трансфинитной индукции для каждого ординального числа α определим подмодуль $SI(M)$ следующим образом. При $\alpha = 0$ положим $SI_\alpha(M) = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $SI_{\beta+1}(M)/SI_\beta(M)$ — сумма всех простых $M/SI_\beta(M)$-инъективных подмодулей правого R-модуля $M/SI_\beta(M)$. Когда α — предельное ординальное число, положим $SI_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} SI_\beta(M)$. Пусть τ — наименьший ординал, для которого имеют место равенства $SI_\tau(M) = SI_{\tau+1}(M)$. Далее через $SI(M)$ будем обозначать подмодуль $SI_\tau(M)$, для произвольного кольца R и каждого ординала α через $SI_\alpha(R)$ — правый идеал $SI_\alpha(R_R)$, который, как легко заметить, является идеалом.

Лемма 1.4. *Пусть P — произвольный правый R-модуль, N — простой $P/SI_\alpha(P)$-инъективный модуль. Тогда N P-инъективен.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть α — наименьший ординал, для которого утверждение леммы не выполняется. Согласно [6, 16.3] существует эпиморфизм $f : \bigoplus\limits_{i\in I} P_i \to E_P(N)$, где $\bigoplus\limits_{i\in I} P_i$ — внешняя прямая сумма модулей и $P_i = P$ для каждого i. Допустим, что $f(SI_\alpha(\bigoplus\limits_{i\in I} P_i)) \neq 0$. Пусть $\beta \leq \alpha$ — наименьший ординал, для которого имеет место неравенство $f(SI_\beta(\bigoplus\limits_{i\in I} P_i)) \neq 0$. Ясно, что β — непредельный ординал. Тогда гомоморфизм f индуцирует ненулевой гомоморфизм

$$\bar{f} : SI_\beta\Big(\bigoplus_{i\in I} P_i\Big)/SI_{\beta-1}\Big(\bigoplus_{i\in I} P_i\Big) \to E_P(N).$$

Следовательно, $E_P(N)$ содержит в себе простой P-инъективный подмодуль, и $E_P(N) = N$. Предположим теперь, что $f(SI_\alpha(\bigoplus\limits_{i\in I} P_i)) = 0$. Тогда гомоморфизм f индуцирует эпиморфизм $\bar{f} : \bigoplus\limits_{i\in I} P_i/SI_\alpha(\bigoplus\limits_{i\in I} P_i) \to E_P(N)$. Легко видеть, что

$$\bigoplus_{i\in I} P_i/SI_\alpha\Big(\bigoplus_{i\in I} P_i\Big) \cong \bigoplus_{i\in I}(P_i/SI_\alpha(P_i)).$$

Тем самым $E_P(N) \in \sigma(P/SI_\alpha(P))$, и поскольку N — $P/SI_\alpha(P)$-инъективный модуль, имеем $E_P(N) = N$. □

Лемма 1.5. *Пусть P — квазипроективный модуль, N_0 — локальный P-инъективный подмодуль модуля P длины не больше двух, у которого $N_0/J(N_0)$ P-инъективен, и $P = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \oplus N$, где $N_i \cong N_0$ для каждого i, а N — подмодуль модуля P, который не содержит подмодулей, изоморфных модулю N_0. Если модули N_0 и $P/I(P)$ не имеют изоморфных простых подфакторов, то $N_1 \oplus \cdots \oplus N_k = \pi(P)$, где π — центральный идемпотент кольца* $\mathrm{End}(P)$.

Доказательство. Пусть π — проекция модуля P на подмодуль $N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$ относительно разложения $P = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \oplus N$. Покажем, что π — центральный идемпотент кольца $S = \mathrm{End}(P)$. Если $(1-\pi)S\pi \neq 0$, то существует ненулевой гомоморфизм из подмодуля πP в подмодуль $(1-\pi)P = N$. Легко видеть, что в этом случае в подмодуле N найдется подмодуль, изоморфный модулю N_0, что противоречит выбору подмодуля N. Таким образом, $(1-\pi)S\pi = 0$.

Покажем теперь, что $\pi S(1-\pi) = 0$. Предположим противное. Тогда существует ненулевой гомоморфизм из подмодуля N в подмодуль πP. Этот гомоморфизм можем продолжить до такого гомоморфизма ϕ, действующего из P в πP, что $\phi(\pi P) = 0$. В силу выбора модуля N имеем $\phi(I_1(P)) = 0$. Тогда гомоморфизм ϕ индуцирует ненулевой гомоморфизм $\widetilde{\phi} : P/I_1(P) \to \pi P \subset I_1(P)$. С помощью трансфинитной индукции несложно показать, что для каждого ординала α имеет место равенство $\widetilde{\phi}(I_\alpha(P)/I_1(P)) = 0$. Тогда гомоморфизм $\widetilde{\phi}$ индуцирует ненулевой гомоморфизм $\overline{\phi} : P/I(P) \to \pi P$. Следовательно, у модулей $P/I(P)$ и πP имеются изоморфные простые подфакторы, что противоречит выбору модуля πP. Таким образом, $(1-\pi)S\pi = \pi S(1-\pi) = 0$, и, значит, π — центральный идемпотент кольца $\mathrm{End}(P)$. $\square$

Пример кольца верхнетреугольных матриц второго порядка над некоторым полем показывает, что предыдущая лемма перестает быть верной, если в ней опустить условие о неизоморфности простых подфакторов модулей N_0 и $P/I(P)$.

Следующие два утверждения непосредственно вытекают из леммы 1.5.

Следствие 1.6. *Пусть P — квазипроективный самопорождающийся обобщенный SV-модуль, N_0 — простой P-инъективный модуль и $P = N_1 \oplus \dots \oplus N_k \oplus N$, где $N_i \cong N_0$ для каждого i, а N — подмодуль модуля P, который не содержит подмодулей, изоморфных модулю N_0. Тогда $N_1 \oplus \dots \oplus N_k = \pi(P)$, где π — центральный идемпотент кольца $\mathrm{End}(P)$.*

Следствие 1.7. *Пусть P — квазипроективный обобщенный SV-модуль. Если P — самопорождающийся модуль, удовлетворяющий условию $(*)$, то для каждого ординала α существует такое семейство взаимно ортогональных центральных идемпотентов $\{\pi_i\}_{i\in I}$ из $\mathrm{End}(P/SI_\alpha(P))$, что*

$$SI_{\alpha+1}(P)/SI_\alpha(P) = \bigoplus_{i\in I} \pi_i(P/SI_\alpha(P)).$$

Лемма 1.8. *Пусть P — конечно порожденный квазипроективный самопорождающийся обобщенный правый SV-модуль и $SI_1(P) = 0$. Если P — неполулокальный модуль, то полупростой модуль $I_1(P)/J(I_1(P))$ имеет блок бесконечной длины.*

Доказательство. Предположим, что P — неполулокальный модуль и все блоки полупростого модуля $I_1(P)/J(I_1(P))$ имеют конечные длины. Согласно [2, теорема 13] $P/I(P)$ представим в виде прямой суммы локальных модулей длины не больше двух. Тогда $P/I(P)$ имеет конечную длину и, следовательно, модуль $P/I(P)$ с точностью до изоморфизма имеет конечное число простых подфакторов. Пусть $S_1, \dots, S_n$ — представители классов изоморфизмов простых подфакторов модуля $P/I(P)$. Так как модуль P не является полулокальным, модуль $I_1(P)$ имеет бесконечную длину. Поскольку $SI(P) = 0$, несложно заметить, что $I_1(P)$ является прямой суммой локальных модулей длины два. В силу предположения в модуле $I_1(P)$ существуют $n + 1$ попарно не изоморфных локальных подмодулей длины два. Тогда модуль $I_1(P)$ обладает локальным подмодулем N длины два, у которого все подфакторы не изоморфны ни одному из модулей $S_1, \dots, S_n$. Из предположения непосредственно следует, что модуль P можно представить в виде $P = N_1 \oplus \dots \oplus N_k \oplus M$, где $N_i \cong N$ для каждого i, а модуль M не содержит подмодулей, изоморфных модулю N. Согласно лемме 1.5 существует такой центральный идемпотент

$\pi \in \mathrm{End}(P)$, что $N_1 \oplus \dots \oplus N_k = \pi(P)$. Поскольку P — порождающий объект категории $\sigma(P)$, существует ненулевой гомоморфизм из P в $J(N)$. Таким образом, существует такой гомоморфизм $f \in \mathrm{End}(P)$, что $Jm(f) = J(N_1)$. Так как $f((1-\pi)(P)) = \pi f((1-\pi)(P)) = f\pi((1-\pi)(P)) = 0$, то $f((1-\pi)(P)) = 0$ и модуль $J(N)$ является гомоморфным образом модуля $N_1 \oplus \dots \oplus N_k$. Тогда $J(N) \cong N/J(N)$, что противоречит P-инъективности модуля $N/J(N)$. Полученное противоречие показывает, что у полупростого модуля $I_1(P)/J(I_1(P))$ имеется блок бесконечной длины. $\square$

Модуль M назовем *CSL-модулем*, если каждый модуль N из категории $\sigma(M)$, у которого $\mathrm{End}(N)$ — тело, является простым. Кольцо R называется *правым CSL-кольцом*, если модуль R_R является CSL-модулем. Следуя [9], назовем кольцо R *правым CC-кольцом*, если $\mathrm{Hom}(M/N, M) \neq 0$ для каждого ненулевого правого R-модуля M и его собственного подмодуля N. Модуль P назовем *правым* mod-*ретрактабельным,* если $\mathrm{Hom}(M, N) \neq 0$ для каждого ненулевого правого R-модуля $M \in \sigma(P)$ и его ненулевого подмодуля N. Кольцо R называется *правым* mod-*ретрактабельным*, если модуль R_R является правым mod-ретрактабельным. Правые mod-ретрактабельные кольца введены в [10]. Далее для произвольных правых R-модулей M и N через $\mathrm{tr}_N(M)$ будем обозначать подмодуль модуля N вида $\sum\limits_{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)} f(M)$.

Лемма 1.9. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если P — квазипроективный полуартинов CSL-модуль, то каждый проективный простой модуль из категории $\sigma(P)$ является P-инъективным.*

(2) *Пусть R — полуартиново справа правое CSL-кольцо, e — идемпотент кольца R, у которого правый идеал eR является прямой суммой локальных правых R-модулей и правые идеалы $eR, (1-e)R$ не содержат изоморфных ненулевых прямых слагаемых. Если R является правым* max-*кольцом, то e — центральный идемпотент.*

(3) *Если R — полуартиново CSL-кольцо, то каждый примитивный образ кольца R артинов.*

(4) *Каждое правое CC-кольцо является правым CSL-кольцом.*

(5) *Если R — полное кольцо матриц над совершенным кольцом, то R — CC-кольцо.*

Доказательство. (1) Предположим, что $S \neq E_P(S)$ для некоторого простого проективного модуля S из категории $\sigma(P)$. Тогда из полуартиновости модуля P следует существование локального модуля длины два $M \in \sigma(P)$, у которого $\mathrm{Soc}(M) = S$. Из P-проективности модуля S вытекает, что $S \ncong M/S$. Значит, $\mathrm{End}(M)$ — тело, что противоречит условию пункта.

(2) Предположим, что $eR(1-e) \neq 0$. Тогда $M = \mathrm{tr}_{eR}(1-e)R \neq 0$ и из условия пункта следует, что $M \subset J(eR)$. Пусть M_0 — максимальный подмодуль модуля M и N — дополнение по пересечению к M/M_0 в eR/M_0. Тогда $L = (eR/M_0)/N$ — однородный модуль, у которого $\mathrm{Soc}(L) \cong M/M_0$ и $\mathrm{Soc}(L) \subset J(L)$. Так как R — полуартиново справа кольцо, модуль L содержит локальный подмодуль L_0 длины два. Поскольку $\mathrm{tr}_L(1-e)R = \mathrm{Soc}(L)$ и $\mathrm{tr}_{L/\mathrm{Soc}(L)}(1-e)R = 0$, кольцо $\mathrm{End}(L_0)$ является телом, что противоречит условию пункта. Полученное противоречие показывает, что $eR(1-e) = 0$. Аналогично устанавливается равенство $(1-e)Re = 0$.

(3) Утверждение пункта непосредственно следует из леммы 1.3 и п. (1) исходной леммы.

(4) Пусть M — произвольный ненулевой и непростой правый R-модуль. Согласно [7, теорема 3.10] модуль M обладает некоторым максимальным подмодулем N. Так как согласно условию пункта $\mathrm{Hom}(M/N, M) \neq 0$, то $\mathrm{End}(M)$ обладает ненулевым гомоморфизмом f, у которого $\mathrm{Ker}(f) = N \neq 0$.

(5) Ясно, что R является полуартиновым max-кольцом. Тогда утверждение пункта непосредственно следует из того факта, что над кольцом R все простые правые (левые) модули изоморфны. $\square$

Правый R-модуль M называется *регулярным*, если каждый его циклический подмодуль является прямым слагаемым модуля M.

Лемма 1.10. *Для конечно порожденного квазипроективного модуля P следующие условия равносильны:*

(1) *P является регулярным модулем;*

(2) *P самопорождающийся и $\mathrm{End}(P)$ — регулярное кольцо.*

Доказательство. (1)⇒(2) Так как модуль P регулярен, он, очевидно, порождает каждый свой подмодуль. Тогда из [6, 18.5] следует, что P самопорождающийся.

Пусть $f \in \mathrm{End}(P)$. Тогда $Jm(f)$ конечно порожден и, следовательно, выделяется в виде прямого слагаемого в P. Поскольку согласно [6, 18.3] P проективен в $\sigma(P)$, то $Jm(f)$ также проективен в $\sigma(P)$. Тем самым $\mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое в P. Тогда из [11, теорема 1] следует, что f — регулярный элемент кольца $\mathrm{End}(P)$.

(2)⇒(1) Пусть P_0 — конечно порожденный подмодуль модуля P. Так как P самопорождающийся, существует эпиморфизм $f : P_1 \oplus \cdots \oplus P_n \to P_0$, где $P_i = P$ для каждого $1 \leq i \leq n$. Рассмотрим гомоморфизм $\bar{f} : P_1 \oplus \cdots \oplus P_n \to P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, действующий по правилу $\bar{f}((p_1, p_2, \ldots, p_n)) = (f((p_1, p_2, \ldots, p_n)), 0, \ldots, 0)$. Поскольку $\mathrm{End}(P_1 \oplus \cdots \oplus P_n) \cong M_n(\mathrm{End}(P))$, то $\mathrm{End}(P_1 \oplus \cdots \oplus P_n)$ является регулярным кольцом. Следовательно, согласно [11, теорема 1] $Jm(\bar{f})$ — прямое слагаемое в $P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$. Тогда P_0 является прямым слагаемым модуля P. $\square$

2. Обобщенные SV-кольца

Теорема 2.1. *Пусть P — квазипроективный конечно порожденный самопорождающийся правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *P — обобщенный SV-модуль и у $\mathrm{End}(P)$ каждый примитивный образ артинов;*

(2) *в категории $\sigma(P/SI(P))$ каждый модуль является модулем со свойством подъема и для каждого ординала α существует такое семейство взаимно ортогональных центральных идемпотентов $\{\pi_i\}_{i\in I}$ из $\mathrm{End}(P/SI_\alpha(P))$, что*

$$SI_{\alpha+1}(P)/SI_\alpha(P) = \bigoplus_{i\in I} \pi_i(P/SI_\alpha(P)).$$

Доказательство. (1)⇒(2) Из лемм 1.2 и 1.8 вытекает, что $P/SI(P)$ — полулокальный модуль. Согласно [2, теорема 6] в категории $\sigma(P/SI(P))$ каждый модуль является модулем со свойством подъема. Вторая часть утверждения пункта получается из следствия 1.7.

(2)⇒(1) Тот факт, что P является обобщенным SV-модулем, доказывается стандартными рассуждениями. Так как согласно [6, 46.2] категория $\sigma(P/SI(P))$ эквивалентна категории всех правых $\mathrm{End}(P/SI(P))$-модулей, каждый правый $\mathrm{End}(P/SI(P))$-модуль является модулем со свойством подъема и из [5, 13.68] следует, что $\mathrm{End}(P/SI(P))$ является артиновым полуцепным кольцом, у которого $J^2(\mathrm{End}(P/SI(P))) = 0$.

Пусть T — примитивный идеал кольца $\mathrm{End}(P)$. Если $\mathrm{Hom}(P, SI(P)) \subset T$, то $\mathrm{End}(P)/T$ — гомоморфный образ $\mathrm{End}(P)/\mathrm{Hom}(P, SI(P)) \cong \mathrm{End}(P/SI(P))$ и, следовательно, $\mathrm{End}(P)/T$ — артиново простое кольцо. Пусть $\mathrm{Hom}(P, SI(P)) \nsubseteq T$ и α — наименьший ординал, для которого $\mathrm{Hom}(P, SI_\alpha(P)) \nsubseteq T$. Ясно, что α — непредельный ординал. Пусть $\phi : \mathrm{End}(P)/\mathrm{Hom}(P, SI_{\alpha-1}(P)) \to \mathrm{End}(P)/T$ — естественный гомоморфизм. Тогда $\mathrm{Hom}(P, SI_\alpha(P))/\mathrm{Hom}(P, SI_{\alpha-1}(P)) \neq 0$. Из предположения пункта вытекает, что $\mathrm{Hom}(P, SI_\alpha(P))/\mathrm{Hom}(P, SI_{\alpha-1}(P))$ — прямая сумма полных колец матриц над телами. Следовательно, в кольце $\mathrm{End}(P)/\mathrm{Hom}(P, SI_{\alpha-1}(P))$ существует такой центральный идемпотент e, что $\phi(e) \neq 0$ и $e\,\mathrm{End}(P)/\mathrm{Hom}(P, SI_{\alpha-1}(P))$ — простое артиново кольцо. Так как $\mathrm{End}(P)/T$ — неразложимое кольцо, имеем $\phi(1-e) = 0$ и, стало быть,

$$\mathrm{End}(P)/T \cong e\,\mathrm{End}(P)/\mathrm{Hom}(P, SI_{\alpha-1}(P)). \quad \square$$

Теорема 2.2. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R — обобщенное справа SV-кольцо, у которого каждый примитивный образ артинов;*

(2) *$R/SI(R)$ — артиново полуцепное кольцо, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$, и $SI_{\alpha+1}(R)/SI_\alpha(R)$ — прямая сумма полных колец матриц конечных порядков над телами для каждого ординала α;*

(3) *R — обобщенное справа SV-кольцо и каждая прямая сумма попарно изоморфных простых инъективных правых R-модулей является инъективным модулем;*

(4) *R — обобщенное справа SV-кольцо и каждый максимально неразложимый фактор R/I кольца R является артиновым полуцепным, у которого $J^2(R/I) = 0$;*

(5) *R — обобщенное SV-кольцо.*

Доказательство. Эквивалентность пп. (1), (2) следует из теоремы 2.1.

(2)$\Rightarrow$(5) Очевидно.

(5)$\Rightarrow$(1) Пусть P — примитивный идеал кольца R. Допустим, что R/P не является классически полупростым кольцом. Тогда из [1, теорема 3.4; 2, теорема 12] вытекает, что R/P — примитивное полуартиново кольцо, у которого $SI_1(R/P_{R/P}) \neq 0$ и $SI_1({}_{R/P}R/P) \neq 0$. Поскольку полупростые модули $\mathrm{Soc}(R/P_{R/P})$ и $\mathrm{Soc}({}_{R/P}R/P)$ однородны, существует такой примитивный идемпотент $e \in R/P$, что eR/P и R/Pe являются соответственно правым и левым инъективными модулями. Тогда из леммы 1.3 следует, что R/P — классическое полупростое кольцо, что противоречит нашему предположению.

(2)$\Rightarrow$(3) Пусть $\{S_i\}_{i\in I}$ — семейство попарно изоморфных простых инъективных правых R-модулей. Если $E(\bigoplus\limits_{i\in I} S_i)SI(R) \neq 0$, то для некоторого непредельного ординала α имеем $E(\bigoplus\limits_{i\in I} S_i)SI_{\alpha-1}(R) = 0$ и $E(\bigoplus\limits_{i\in I} S_i)SI_\alpha(R) \neq 0$. Следовательно, модуль $E(\bigoplus\limits_{i\in I} S_i)$ можно рассматривать как $R/SI_{\alpha-1}(R)$-модуль, и в кольце $R/SI_{\alpha-1}(R)$ найдется такой центральный идемпотент e, что $eR/SI_{\alpha-1}(R)$ — полупростой модуль и $E(\bigoplus\limits_{i\in I} S_i)e \neq 0$. Тогда $S_ie \neq 0$ и $S_i(1-e) = 0$ для каждого $i \in I$. Легко видеть, что в этом случае $E(\bigoplus\limits_{i\in I} S_i)(1-e) = 0$. Таким образом, модуль $E(\bigoplus\limits_{i\in I} S_i)$ можем рассматривать как правый $eR/SI_{\alpha-1}(R)$-

модуль. Поскольку $eR/SI_{\alpha-1}(R)$ — классически полупростое кольцо, $E(\bigoplus_{i\in I} S_i) = \bigoplus_{i\in I} S_i$. Если $E(\bigoplus_{i\in I} S_i)SI(R) = 0$, то модуль $E(\bigoplus_{i\in I} S_i)$ можно рассматривать как правый $R/SI(R)$-модуль. Поскольку $R/SI(R)$ — нётерово кольцо, из [4, 27.3] следует, что $E(\bigoplus_{i\in I} S_i) = \bigoplus_{i\in I} S_i$.

(3)⇒(1) Пусть P — примитивный идеал кольца R. Тогда $\mathrm{Soc}(R/P_R)$ — однородный полупростой модуль. Предположим, что R/P не является классически полупростым кольцом. Из [1, теорема 3.4; 2, теорема 12] получаем, что R/P_R содержит простой инъективный подмодуль. Тогда в силу предположения пункта модуль $\mathrm{Soc}(R/P_R)$ инъективен. Поскольку $\mathrm{Soc}(R/P_R)$ существен в R/P_R, то $\mathrm{Soc}(R/P_R) = R/P_R$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, R/P является классически полупростым кольцом.

(2)⇒(4) Пусть R/P — максимально неразложимый фактор кольца R. Если $SI(R) \subset P$, то R/P является артиновым полуцепным кольцом, у которого $J^2(R/P) = 0$. Допустим, что $SI(R) \nsubseteq P$. Тогда, рассуждая так же, как и при доказательстве импликации (2)⇒(1) из доказательства теоремы 2.1, получаем, что R/P изоморфно полному кольцу матриц конечного размера над некоторым телом.

(4)⇒(1) Пусть P — примитивный идеал кольца R. Поскольку R/P — неразложимое кольцо, импликация непосредственно следует из [12, следствие 1.7]. □

3. SV- и CSL-кольца

Теорема 3.1. *Для квазипроективного полуартинова регулярного модуля P следующие условия равносильны:*

(1) *P — CSL-модуль;*

(2) *P — mod-ретрактабельный модуль;*

(3) *P — SV-модуль.*

Доказательство. (1)⇒(3) Так как фактор-модуль регулярного модуля по инвариантному подмодулю является регулярным модулем, импликация непосредственно следует из лемм 1.4 и 1.9.

(2)⇒(3) Пусть $S \in \sigma(P)$ — простой модуль. Предположим, что $S \neq E_P(S)$. Из доказательства п. (1) леммы 1.9 следует, что модуль $E_P(S)$ содержит локальный подмодуль L длины два, у которого $\mathrm{Soc}(L) = S$. Ясно, что существует эпиморфизм $f : \bigoplus_{i\in I} P_i \to E_P(S)$, где $P_i = P$ для каждого $i \in I$. Для некоторых непредельных ординалов α и β выполняются условия $f(\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(P)) = 0$, $f(\mathrm{Soc}_\alpha(P)) \neq 0$ и $f(\mathrm{Soc}_{\beta-1}(P)) \subset S$, $f(\mathrm{Soc}_\beta(P)) \nsubseteq S$. Поскольку $J(f(\mathrm{Soc}_\beta(P))) \neq 0$, имеем $f(\mathrm{Soc}_{\beta-1}(P)) \neq 0$. Следовательно, $\alpha < \beta$. Так как P — квазипроективный регулярный модуль, $\mathrm{Hom}(P/\mathrm{Soc}_{\beta-1}(P), \mathrm{Soc}_\alpha(P)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(P)) = 0$. Следовательно, $L/S \ncong S$ и $\mathrm{Hom}(L, S) = 0$. Получили противоречие с предположением пункта.

Импликации (3)⇒(1) и (3)⇒(2) проверяются непосредственно. □

Эквивалентность пп. (1) и (3) в следующем утверждении установлена в [13, теорема 2.8].

Следствие 3.2. *Для регулярного полуартинова кольца R следующие утверждения равносильны:*

(1) *R — правое CSL-кольцо;*

(2) *R — правое mod-ретрактабельное кольцо;*

(3) R — *правое* SV*-кольцо.*

Теорема 3.3. *Для полуартинова кольца R следующие условия равносильны:*

(1) R — mod*-ретрактабельное кольцо;*

(2) R — CSL*-кольцо;*

(3) *каждый максимальный неразложимый фактор кольца R изоморфен полному кольцу матриц конечного порядка над совершенным кольцом.*

Доказательство. (1)⇒(2) Импликация проверяется непосредственно.

(2)⇒(3) Достаточно показать, что всякое полуартиново CSL-кольцо R содержит такой ненулевой центральный идемпотент e, что eR — полное кольцо матриц конечного порядка над совершенным кольцом. Пусть R — полуартиново справа CSL-кольцо. Легко видеть, что каждый правый идеал кольца R, не содержащийся в $J(R)$, содержит в себе локальное прямое слагаемое модуля R_R. Тогда из леммы 1.1 и пп. (2), (3) леммы 1.9 непосредственно следует существование идемпотента e с указанным выше свойством.

(3)⇒(1) Пусть M — правый R-модуль и S — простой подмодуль модуля M. Покажем, что $\operatorname{Hom}(M,S) \neq 0$. Если N — дополнение по пересечению подмодуля S в M, то $(S+N)/N$ — существенный подмодуль модуля M/N. Поэтому без ограничения общности можно считать, что S — существенный подмодуль модуля M. Из условия пункта и [5, 13.12(2)] вытекает, что $R/\operatorname{Ann}(M)$ — полное кольцо матриц конечного порядка над локальным кольцом. Тогда импликация непосредственно следует из того факта, что $R/\operatorname{Ann}(M)$ — полуартиново max-кольцо, над которым все правые (левые) простые модули изоморфны. □

Эквивалентность пп. (1) и (5) в следующем утверждении установлена в [14].

Следствие 3.4. *Для кольца R следующие утверждения равносильны:*

(1) R — *совершенное* CSL*-кольцо;*

(2) R — *совершенное* mod*-ретрактабельное кольцо;*

(3) R — *правое* CC*-кольцо;*

(4) R — *левое* CC*-кольцо;*

(5) R — *конечное прямое произведение полных колец матриц конечных порядков над совершенными кольцами.*

Доказательство. Ввиду левой и правой симметричности условия п. (5) достаточно показать эквивалентность пп. (1)–(3) и (5). Эквивалентность (1) ⇔ (2) ⇔ (5) непосредственно следует из предыдущей теоремы, эквивалентность (3) ⇔ (5) — из [9, теорема 3.10] и пп. (2), (4), (5) леммы 1.9. □

Теорема 3.5. *Для регулярного кольца, у которого каждый примитивный образ артинов, следующие условия эквивалентны:*

(1) R — *правое* mod*-ретрактабельное кольцо;*

(2) R — SV*-кольцо.*

Доказательство. (1)⇒(2) Из [15, теорема 6.6; 10, теоремы 2, 8] следует, что без ограничения общности можем считать кольцо R строго регулярным. Пусть xR — произвольный правый циклический R-модуль. Если $E(xR)\operatorname{Ann}(x) \neq 0$, то для некоторого ненулевого центрального идемпотента $e \in R$ имеем $E(xR)e \cap xR \neq 0$ и $xRe = 0$. С другой стороны, $E(xR)e \cap xR = xRe = 0$. Полученное противоречие показывает, что $E(xR)$ можно рассматривать как инъективный $R/\operatorname{Ann}(x)$-модуль. Так как кольцо $R/\operatorname{Ann}(x)$ mod-ретрактабельно, существует ненулевой $R/\operatorname{Ann}(x)$-гомоморфизм $f : E(xR) \to xR$. Поскольку кольцо $R/\operatorname{Ann}(x)$ регулярно, $xR = N \oplus M$, $N \subset f(E(xR))$, где M, N — подмодули модуля xR и $N \neq 0$. Пусть π — проекция на первое слагаемое относительно разложения $xR = N \oplus M$. Так как N, очевидно, является проективным $R/\operatorname{Ann}(x)$-модулем, эпиморфизм πf расщепляющий. Таким образом, правый R- модуль xR содержит ненулевой инъективный подмодуль. Из проведенных рассуждений следует, что над кольцом R каждый правый модуль содержит ненулевой инъективный подмодуль. Тогда из теоремы 2.2 и [16] следует, что R — SV-кольцо.

(2)⇒(1) Очевидно. □

Теорема 3.6. *Пусть R — кольцо, у которого каждый правый идеал является идеалом. Следующие утверждения равносильны:*

(1) *R —* mod-*ретрактабельное кольцо;*

(2) *R — полуартиново кольцо.*

Доказательство. (1)⇒(2) Если S — простой правый R-модуль и N — ненулевой подмодуль модуля $E(S)$, то $\operatorname{Hom}(N, S) \neq 0$. Следовательно, модуль N обладает максимальным подмодулем и из [17, теорема 1] вытекает, что R — max-кольцо. Тогда из теоремы 3.5 [18, лемма 3.2; 5, 5.51, 5.54] следует, что R — полуартиново кольцо.

(2)⇒(1) Пусть S — простой подмодуль правого R-модуля M. Без ограничения общности можно считать, что S — существенный подмодуль модуля M. Пусть M_0 —максимальный подмодуль модуля M и $x \in M \backslash M_0$. Ясно, что можем рассматривать xR как правый $R/\operatorname{Ann}(x)$-модуль. Положим $\overline{R} = R/\operatorname{Ann}(x)$. Так как $\overline{R}_{\overline{R}} \cong x\overline{R}$ — полуартинов однородный модуль, $\overline{R}$ — локальное кольцо. Следовательно, $\overline{R}/J(\overline{R})_{\overline{R}} \cong S_{\overline{R}}$. Таким образом, $S_R \cong xR/J(xR) = xR/(xR \cap M_0) \cong M/M_0$. □

Следствие 3.7. *Для коммутативного кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R —* mod-*ретрактабельное кольцо;*

(2) *R — полуартиново кольцо.*

Теорема 3.8. *Пусть P — квазипроективный конечно порожденный модуль. Если P является SV-модулем, то P регулярен и* $\operatorname{End}(P)$ *— правое SV-кольцо.*

Доказательство. Из [6, 23.8] следует, что P является порождающим объектом категории $\sigma(P)$. Значит, согласно [6, 46.2] категория $\sigma(P)$ эквивалентна категории правых $\operatorname{End}(P)$-модулей. Тогда каждый ненулевой правый $\operatorname{End}(P)$-модуль содержит ненулевой инъективный подмодуль и из [16, теорема 13] следует, что $\operatorname{End}(P)$ — правое SV-кольцо. Так как согласно [19, предложение 2.3] $\operatorname{End}(P)$ является регулярным кольцом, из леммы 1.10 получаем, что модуль P регулярен. □

Следствие 3.9 [19, теорема 2.9]. *Пусть R — правое SV-кольцо и P — конечно порожденный проективный правый R-модуль. Тогда* $\operatorname{End}(P)$ *является правым SV-кольцом.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из теоремы 3.8 и того факта, что над правым SV-кольцом каждый правый модуль является SV-модулем. □

Теорема 3.10. *Для конечно порожденного квазипроективного правого R-модуля P следующие условия равносильны:*

(1) *P — SV-модуль;*

(2) *P — регулярный обобщенный SV-модуль;*

(3) *P — V-модуль, который является обобщенным SV-модулем.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) Импликация следует из теоремы 3.8.

(2)$\Rightarrow$(3) Из леммы 1.10 получаем, что P является самопорождающимся модулем и $\mathrm{End}(P)$ — регулярное кольцо. Так как согласно [6, 46.2] категория $\sigma(P)$ эквивалентна категории правых $\mathrm{End}(P)$-модулей, $\mathrm{End}(P)$ — регулярное обобщенное SV-кольцо. Тогда согласно [1, теорема 3.7] $\mathrm{End}(P)$ является правым V-кольцом. Следовательно, P — V-модуль.

(3)$\Rightarrow$(1) Импликация следует из [2, теорема 3.5]. $\square$

Из результатов разд. 3 непосредственно вытекает

Теорема 3.11. *Для кольца R следующие утверждения равносильны:*

(1) *R — SV-кольцо;*

(2) *$R = SI(R)$ и $SI_{\alpha+1}(R)/SI_{\alpha}(R)$ является прямой суммой полных колец матриц конечных порядков над телами для каждого ординала α;*

(3) *R — правое SV-кольцо, у которого каждый примитивный образ является артиновым кольцом;*

(4) *R — правое V-кольцо, над которым каждый правый и левый модули слабо регулярны;*

(5) *R — регулярное кольцо, над которым каждый правый и левый модули слабо регулярны;*

(6) *R — регулярное* mod-*ретрактабельное кольцо, у которого каждый примитивный образ артинов;*

(7) *R — регулярное полуартиново CSL-кольцо.*

Замечание. Пусть K — некоторое поле и $R = \prod\limits_{i=1}^{\infty} K_i$, где $K_i = K$ для каждого натурального числа i. Тогда из [20, теорема 18] и теоремы 3.5 следует, что R — CSL-кольцо, которое не является mod-ретрактабельным кольцом. В силу изложенных выше результатов имеют место следующие строгие включения:

$$\{CC\text{-кольца}\} \subset \{\text{mod-ретрактабельные кольца}\} \subset \{CSL\text{-кольца}\}.$$

Открытые вопросы. 1. *Описать регулярные правые CSL-кольца.*

2. *Является ли регулярное правое* mod-*ретрактабельное кольцо правым SV-кольцом?*

3. *Является ли правое* mod-*ретрактабельное кольцо полуартиновым справа кольцом?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абызов А. Н.* Слабо регулярные кольца над нормальными кольцами // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 721–738.
2. *Абызов А. Н.* Обобщенные SV-модули // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 3. С. 481–488.
3. *Абызов А. Н., Туганбаев А. А.* Кольца, над которыми все модули являются I_0-модулями. II // Фунд. и прикл. математика. 2007. Т. 14, № 2. С. 193–200.
4. *Туганбаев А. А.* Кольца, над которыми все модули являются I_0-модулями // Фунд. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 5. С. 3–12.
5. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.
6. *Wisbauer R.* Foundations of module and ring theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

7. *Camillo V. P., Fuller K. R.* A note on Loewy rings and chain conditions on primitive ideals // Module theory. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979. P. 75–86. (Lect. Notes Math.; V. 700).
8. *Jans J. P.* Projective-injective modules // Pac. J. Math. 1959. V. 9. P. 1103–1108.
9. *Amini B., Ershad M., Sharif H.* Coretractable modules // J. Aust. Math. Soc. 2009. V. 86, N 3. P. 289–304.
10. *Ecevit S., Kosan M. T.* On rings all of whose modules are retractable // Arch. Math. 2009. V. 45, N 1. P. 71–74.
11. *Shanny R. F.* Regular endomorphism rings of free modules // J. London Math. Soc. 1971. V. 2, N 4. P. 553–354.
12. *Burgess W. D., Stephenson W.* An analogue of the Pierce sheaf for noncommutative rings // Commun. Algebra. 1978. V. 6, N 9. P. 863–886.
13. *Dombrovskaya M., Marks G.* Asymmetry in the converse of Schur's lemma // Commun. Algebra. 2010. V. 38, N 3. P. 1147–1156.
14. *Alaoui M., Haily A.* Perfect rings for which the converse of Schur's lemma holds // Publ. Mat., Barc. 2001. V. 45, N 1. P. 219–222.
15. *Goodearl K. R.* Von Neumann regular rings. 2nd ed. Malabar, FL: Krieger, 1991.
16. *Dung N. V., Smith P. F.* On semiartinian V-modules // J. Pure Appl. Algebra. 1992. V. 82, N 1. P. 27–37.
17. *Faith C.* Rings whose modules have maximal submodules // Publ. Mat., Barc. 1995. V. 39, N 1. P. 201–214.
18. *Yu H. P.* On quasiduo rings // Glasgow Math. J. 1995. V. 37. P. 21–31.
19. *Baccella G.* Semi-artinian V-rings and semi-artinian Von Neumann regular rings // J. Algebra. 1995. V. 173, N 3. P. 587–612.
20. *Hirano Y., Park J. J.* Rings for which the converse of Schur's lemma holds // Math. J. Okayama Univ. 1991. V. 33, N 1. P. 121–131.

Статья поступила 25 февраля 2011 г., окончательный вариант — 21 ноября 2011 г.

Абызов Адель Наилевич
НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, отдел алгебры и математической логики,
ул. Профессора Нужина, 17, Казань 420008
aabyzov@ksu.ru