Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ПЯТИКОМПОНЕНТНЫМ ГРАФОМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

А. В. Заварницин

Аннотация. Получена классификация конечных групп, граф простых чисел которых имеет пять компонент связности. В частности, доказано, что всякая такая группа проста. В связи с этим получены некоторые результаты о представлениях простых групп.

Ключевые слова: конечная группа, граф простых чисел.

К 70-летию Виктора Даниловича Мазурова

1. Введение

Графом простых чисел $\Gamma(G)$ конечной группы G, также известным как граф Грюнберга — Кегеля, называется граф, множеством вершин которого является множество $\pi(G)$ простых делителей порядка $|G|$, в котором две различные вершины $p, q \in \pi(G)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. Граф простых чисел впервые возник из результатов работы [1] в связи с теорией представления целочисленных групповых колец, а в настоящее время он широко изучается в различных проблемах распознаваемости. Стоит отметить, что граф $\Gamma(G)$ в отличие от множества порядков элементов группы G может быть определен по таблице обыкновенных характеров G. Это следует из хорошо известного результата [2, теорема 8.21] о том, что по таблице характеров определяются множества простых делителей порядков элементов. Таким образом, граф $\Gamma(G)$ является фундаментальным инвариантом группы G, достойным изучения.

Пусть $s(G)$ обозначает число компонент связности графа $\Gamma(G)$. Это число было определено для всех простых групп в [3, 4]. В качестве следствия получается, что $s(G) \leq 6$ для любой конечной группы G. Кроме того, известно [5], что спорадическая группа J_4 — единственная конечная группа G, для которой $s(G) = 6$. В настоящей работе мы показываем, что группы с условием $s(G) = 5$ также допускают классификацию. Основным результатом является

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа с условием $s(G) = 5$. Тогда G — простая группа, изоморфная $E_8(q)$, где $q \equiv 0, \pm 1 \pmod 5$.*

Для доказательства теоремы 1 нам потребовалось установить некоторые результаты о представлениях простых групп. Один из таких результатов, сформулированный ниже, может представлять самостоятельный интерес.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11–01–00456, 11–01–91158, 12–01–90006) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт 14.740.11.0346).

Предложение 2. *Пусть группа $G = {}^3D_4(q)$ действует на ненулевом векторном пространстве V над полем характеристики, не делящей q (возможно, нулевой). Тогда каждый элемент из G порядка $q^4 - q^2 + 1$ оставляет неподвижным ненулевой вектор из V.*

2. Вспомогательные факты и определения

Обозначим через $\pi_i(G)$, где $i = 1, \dots, s(G)$, множество вершин i-й компоненты связности графа $\Gamma(G)$. Если $2 \in \pi(G)$, то будем предполагать, что $2 \in \pi_1(G)$. Ребро, соединяющее p и q в $\Gamma(G)$, будет обозначаться через (p, q).

Напомним (см. [5]), что граф простых чисел иногда удобно представлять в компактной форме как граф, вершины которого отмечены попарно взаимно простыми натуральными числами. Вершина с меткой n представляет полный подграф графа $\Gamma(G)$ на $\pi(n)$ вершинах. Ребро, соединяющее n и m, представляет множество ребер графа $\Gamma(G)$, соединяющих каждое простое число из $\pi(n)$ с каждым числом из $\pi(m)$. Ясно, что граф $\Gamma(G)$ однозначно восстанавливается по такому его компактному представлению. Например, на рис. 1 показана компактная форма графа $\Gamma(J_4)$ (сравни [5, рис. 3]).

Рис. 1.

Компактификация графа $\Gamma(G)$ производится следующим образом: две различные смежные вершины $p, q \in \pi(G)$ сливаются в одну вершину компактной формы в том и только в том случае, если для любой вершины $r \in \pi(G) \setminus \{p, q\}$ либо оба ребра (p, r) и (q, r) принадлежат множеству ребер графа $\Gamma(G)$, либо оба не принадлежат. Можно показать, что компактная форма графа определена однозначно с точностью до возможного переобозначения вершин различными числами n с одинаковым множеством $\pi(n)$.

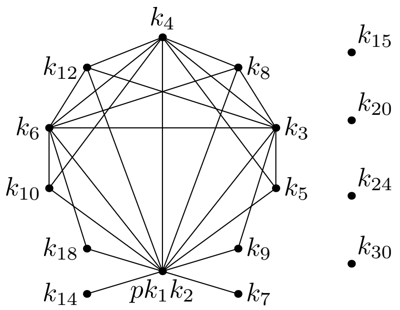

Рис. 2. $\Gamma(E_8(q))$, $q = p^n \equiv 0, \pm 1 \pmod 5$.

Граф $\Gamma(E_8(q))$ при $q = p^n \equiv 0, \pm 1 \pmod 5$ для простого числа p имеет компактную форму, показанную на рис. 2 (сравни [6, рис. 5]), где $k_i = k_i(q)$ обозначает *примитивную часть* числа $q^i - 1$, т. е. π-часть этого числа, где π — множество всех его примитивных простых делителей. (Напомним, что простой делитель числа $q^i - 1$ *примитивный*, если он не делит $q^j - 1$ для всех $1 \leq j < i$.) Например, $k_{24}(q) = q^8 - q^4 + 1$.

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа такая, что $s(G) \geq 3$. Тогда существуют нильпотентная нормальная $\pi_1(G)$-подгруппа $N \trianglelefteq G$ и неабелева простая группа P с условием $s(P) \geq s(G)$ такие, что $P \leq G/N \leq \mathrm{Aut}(P)$ и $G/N \cong P.A$, где A — $\pi_1(G)$-группа.*

Доказательство следует из [3]. $\square$

Лемма 4 [7, лемма 1]. *Если группа Фробениуса KC с ядром K и циклическим дополнением C точно действует на векторном пространстве V над полем ненулевой характеристики p, взаимно простой с порядком K, то полупрямое произведение $V \leftthreetimes C$ содержит элемент порядка $p|C|$.*

Лемма 5 [8, лемма 10]. *Пусть N — нормальная элементарная абелева подгруппа группы G, $K = G/N$ и $G_1 = N \leftthreetimes K$ — естественное полупрямое произведение. Если n — порядок некоторого элемента группы G_1, то n также является порядком некоторого элемента группы G.*

Лемма 6. *Пусть $G = U_3(11)$ действует на ненулевом векторном пространстве V. Тогда каждый элемент группы G порядка 37 оставляет неподвижным ненулевой вектор из V.*

Доказательство. Пусть p — характеристика основного поля пространства V. Очевидно, можно предполагать, что $p \neq 37$. Анализируя обыкновенные и p-модулярные таблицы брауэровых характеров группы G при $p = 2, 3, 5, 11$, которые содержатся, например, в [9, 10], можно видеть, что ограничение каждого неприводимого брауэрова характера θ группы G на ее подгруппу C порядка 37 всегда содержит ее главный характер с ненулевой кратностью. Это следует из того факта, что скалярное произведение $(\theta|_C, 1_C)$ всегда положительно в рассматриваемых случаях. Отсюда вытекает, что C оставляет неподвижным ненулевой вектор из V. Поскольку все подгруппы из G порядка 37 сопряжены, получаем требуемое. □

Лемма 7. *Пусть $G = J_4$ действует на ненулевом пространстве V над полем положительной характеристики и $V \leftthreetimes G$ — естественное полупрямое произведение. Тогда $s(V \leftthreetimes G) \leq 4$.*

Доказательство. Из рис. 1 следует, что $\pi_1(G) = \{2, 3, 5, 7, 11\} \subseteq \pi_1(V \leftthreetimes G)$. Пусть характеристика основного поля модуля V равна p. Рассуждаем от противного. Предположим, что $s(V \leftthreetimes G) \geq 5$. Тогда G действует точно на V, и по лемме 3 получаем, что $p \in \pi_1(V \leftthreetimes G)$.

Сначала покажем, что 23 или 31 принадлежит множеству $\pi_1(V \leftthreetimes G)$ и тем самым $s(V \leftthreetimes G) \leq 5$. Это верно, если p равно 23 или 31, поэтому можно предполагать, что $p \neq 23, 31$. Покажем, что в этом случае расширение $V \leftthreetimes G$ содержит элемент порядка $23p$ или $31p$.

Максимальная подгруппа $2^{11} : M_{24}$ группы G содержит фробениусову подгруппу вида $2^{11} : 23$. Значит, если $p \neq 2$, то вершины 23 и p смежны в графе $\Gamma(G)$ по лемме 4. Предположим, что $p = 2$ и любой элемент из G порядка 23 действует на V без неподвижных точек. Пусть φ — брауэров характер ограничения G-модуля V на подгруппу M_{24} из G. Из таблицы 2-модулярных брауэровых характеров группы M_{24} (см. [10]) следует, что из 13 неприводимых брауэровых характеров единственными возможными компонентами φ являются брауэровы характеры, указанные в табл. 1, где классы сопряженности нетривиальных степеней элементов даны в строке «степени», а значения, отмеченные «*» не играют для нас роли.

Пусть m — сумма кратностей вхождения φ_2, φ_3 в φ, а n — сумма кратностей φ_4, φ_5 в φ. Тогда для x из класса $3a$ имеем $\dim C_V(x) = 5m + 14n$, а для x из $3b$ имеем $\dim C_V(x) = 3m + 16n$. Так как все элементы G порядка 3 сопряжены, получаем $5m + 14n = 3m + 16n$, откуда $m = n$ и $\dim C_V(x) = 19m$. Если элемент $y \in M_{24}$ имеет порядок 15, то

$$\dim C_V(y) = \frac{m}{15}(11 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4(\alpha + \bar{\alpha})) + \frac{n}{15}(44 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1)) = m + 2n = 3m.$$

Все элементы G порядка 15 сопряжены. Значит, $\dim C_V(x)/\dim C_V(y) = 19/3$ для любых элементов $x, y \in G$ порядков 3 и 15 соответственно.

Таблица 1. Неприводимые 2-модулярные брауэровы характеры группы M_{24} при условии действия 23-элементов без неподвижных точек

классы	$1a$	$3a$	$3b$	$5a$	$15a$	$15b$	$23a$	$23b$	другие
степени					$15b$, $5a$, $3a$	$15a$, $5a$, $3a$	$23b$	$23a$	
φ_2	11	2	-1	1	α	$\bar{\alpha}$	β	$\overline{\beta}$	$*$
φ_3	11	2	-1	1	$\bar{\alpha}$	α	$\bar{\beta}$	β	$*$
φ_4, φ_5	44	-1	2	-1	-1	-1	-2	-2	$*$

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{-15}}{2}, \quad \beta = \frac{-1+\sqrt{-23}}{2}$$

Пусть, напротив, все элементы порядка 31 действуют на V без неподвижных точек. Ограничивая V на максимальную подгруппу $L_2(32):5$ группы G, получаем брауэров характер ψ, неприводимые компоненты которого такие, как в табл. 2.

Таблица 2. Неприводимые 2-модулярные брауэровы характеры группы $L_2(32):5$ при условии действия 31-элементов без неподвижных точек

	$1a$	$3a$	$5a-5d$, $15a-15d$	$31a$	$31b$	$31c$	другие
ψ_6	10	-5	0	α_1	α_2	α_3	$*$
ψ_7	20	5	0	$-1-\alpha_2$	$-1-\alpha_3$	$-1-\alpha_1$	$*$
ψ_8	20	5	0	$-1-\alpha_1$	$-1-\alpha_2$	$-1-\alpha_3$	$*$
ψ_9	40	-5	0	$-1+\alpha_3$	$-1+\alpha_1$	$-1+\alpha_2$	$*$
ψ_{10}	40	-5	0	$\alpha_3+3\alpha_2$	$\alpha_1+3\alpha_3$	$\alpha_2+3\alpha_1$	$*$
ψ_{11}	80	5	0	$-2+2\alpha_2$	$-2+2\alpha_3$	$-2+2\alpha_1$	$*$

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^{10} \zeta^{3^j \cdot 23^k}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \zeta = e^{2\pi i/31}$$

Пусть ограничение ψ на подгруппу порядка 15 имеет значения a и b на элементах порядка 1 и 3 соответственно. Тогда, поскольку остальные значения нулевые, получаем $\dim C_V(x) = (a+2b)/3$ для x порядка 3 и $\dim C_V(y) = (a+2b)/15$ для y порядка 15. Таким образом, $\dim C_V(x)/\dim C_V(y) = 5$, что противоречит доказанному выше. Поэтому $s(V \rtimes G) = 5$, как и утверждалось.

Заметим, что $p \neq 37$, поскольку иначе $37 \in \pi_1(V \rtimes G)$ и $s(V \rtimes G) \leq 4$. Из леммы 6 и того факта, что G содержит максимальную подгруппу вида $U_3(11):2$, следует, что $V \rtimes G$ имеет элемент порядка $37p$. Отсюда получаем $s(V \rtimes G) \leq 4$ вопреки предположению. □

3. Доказательства основных результатов

Доказательство предложения 2. Пусть $\mathscr{X}$ — представление группы $G = {}^3D_4(q)$, соответствующее модулю V. Можно считать, что $\mathscr{X}$ абсолютно неприводимо. Если характеристика основного поля $\mathscr{X}$ является простым числом p, то положим p^s равным наибольшей степени p, делящей $q^4 - q^2 + 1$. Если эта характеристика нулевая, то положим $p^s = 1$. Ясно, что задача равносильна доказательству того, что каждая циклическая подгруппа T группы G порядка

$(q^4-q^2+1)/p^s$ оставляет неподвижным ненулевой вектор из V. Заметим, что все такие подгруппы G-сопряжены, так как лежат в сопряженных максимальных торах порядка q^4-q^2+1 группы G. Достаточно показать, что ограничение $\mathscr{X}$ на T имеет главную компоненту с ненулевой кратностью.

Сначала рассмотрим неприводимые обыкновенные характеры группы G. Они описаны в [11, 12]. В табл. 3 приведены значения унипотентных обыкновенных характеров χ_i (их восемь) и серии полупростых характеров θ_k на классах C_a неединичных элементов порядка a, делящего q^4-q^2+1, из G. Параметры характеров и классов $k, a = 1, 2, \dots, q^4-q^2$ удовлетворяют равенствам $\theta_k = \theta_{kq^3}$ и $C_a = C_{aq^3}$, где индексы берутся по модулю q^4-q^2+1. В частности, всего имеется $(q^4-q^2)/4$ таких характеров и классов. Все характеры, не включенные в табл. 3, принимают на C_a нулевое значение и поэтому, очевидно, имеют главную компоненту при ограничении на T.

Таблица 3. Значения некоторых неприводимых обыкновенных характеров группы $^3D_4(q)$ на элементах порядка, делящего q^4-q^2+1

χ	обозн. из [12]	$1a$	C_a	$(\chi\vert_T, 1_T)$
χ_1	$\mathbf{1}$	1	1	1
χ_2	$[\varepsilon_1]$	$q(q^4-q^2+1)$	0	p^sq
χ_3	$[\rho_1]$	$\frac{1}{2}q^3(q^3+1)^2$	-1	$\frac{1}{2}p^s(q^2+1)(q^3+2)-1$
χ_4	$[\rho_2]$	$\frac{1}{2}q^3(q+1)^2(q^4-q^2+1)$	0	$\frac{1}{2}p^sq^3(q+1)^2$
χ_5	$^3D_4[-1]$	$\frac{1}{2}q^3(q^3-1)^2$	1	$\frac{1}{2}p^s(q^2+1)(q^3-2)+1$
χ_6	$^3D_4[1]$	$\frac{1}{2}q^3(q-1)^2(q^4-q^2+1)$	0	$\frac{1}{2}p^sq^3(q-1)^2$
χ_7	$[\varepsilon_2]$	$q^7(q^4-q^2+1)$	0	p^sq^7
χ_8	St	q^{12}	1	$p^s(q^6-1)(q^2+1)+1$
θ_k	$\{\chi_{14}\}$	$(q^6-1)^2$	$\sum_{j=0}^{3}\zeta^{akq^{3j}}$	$p^s(q^2+1)(q^6-3)$, $\vert T\vert\nmid k$,
				$p^s(q^2+1)(q^6-3)+4$, $\vert T\vert \mid k$

$$\zeta = e^{2\pi i/(q^4-q^2+1)}$$

С помощью этой информации можно вычислить значение скалярного произведения $(\chi|_T, 1_T)$. Например,

$$(\theta_k|_T, 1_T) = \frac{1}{|T|}\Big((q^6-1)^2 + 4\sum_{\substack{t=1,\dots,q^4-q^2,\\ p^s|t}} \zeta^{kt}\Big)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{|T|}((q^6-1)^2-4) = p^s(q^2+1)(q^6-3) & \text{при } |T|\nmid k, \\ \frac{1}{|T|}((q^6-1)^2+4(|T|-1)) = p^s(q^2+1)(q^6-3)+4 & \text{при } |T| \mid k, \end{cases}$$

поскольку в каждом классе C_t ровно 4 элемента из T. Также, например,

$$(\chi_3|_T, 1_T) = \frac{1}{|T|}\left(\frac{1}{2}q^3(q^3+1)^2 - (|T|-1)\right) = \frac{1}{2}p^s(q^2+1)(q^3+2)-1,$$

и аналогично для других унипотентных характеров. Полный результат приведен в последней колонке табл. 3. Так как все значения этого скалярного произведения положительны, мы, в частности, получаем требуемое в случае, когда характеристика основного поля равна нулю либо не делит $|G|$.

Перейдем к модулярному случаю. Пусть p делит $|G|$. Неприводимые модулярные представления группы ${}^3D_4(q)$ в неопределяющей характеристике изучались в [13–15]. Они описаны с точностью до нескольких неизвестных параметров в матрицах разложения. Верхние и нижние оценки этих параметров найдены в [13, 14, 16]. Этой информации достаточно для наших целей.

Пусть сначала $p \nmid q^4 - q^2 + 1$. Тогда $p^s = 1$. В силу [13, п. (6.8); 15, теорема 3.1] полупростые характеры θ_k остаются неприводимыми при p-редукции. Следовательно, если брауэров характер φ представления $\mathscr{X}$ является p-редукцией некоторого θ_k, то требуемое неравенство $(\varphi|_T, 1_T) > 0$ вытекает из вышеизложенного случая обыкновенных характеров.

Рассмотрение p-модулярного разложения унипотентных характеров разбивается на несколько подслучаев в зависимости от того, какой из сомножителей $q-1$, $q+1$, q^2-q+1, q^2+q-1 делится на p, и от того, верно ли, что $p = 3$. Мы рассмотрим только один из этих подслучаев, поскольку остальные вполне аналогичны, а многие даже проще.

Пусть $3 \neq p \mid q^2+q+1$ или $3 = p \mid q-1$. В силу [13, предложение 5.3; 15, теорема 3.1(a)] подматрица p-модулярной матрицы разложения для унипотентных характеров такая, как в табл. 4, где неизвестные параметры удовлетворяют неравенствам $1 \le a \le q$, $0 \le b \le (q^2-q)/2$, $1 \le c \le q-1$ ввиду [14, доказательство теоремы 5.1].

Таблица 4. p-Модулярное разложение унипотентных характеров группы ${}^3D_4(q)$ при $3 \neq p \mid q^2+q+1$ или $3 = p \mid q-1$

χ	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
χ_1	1	.	.	.	.	.	.	.
χ_2	.	1	.	.	.	.	.	.
χ_3	.	1	1	.	.	.	.	.
χ_4	1	.	.	1	.	.	.	.
χ_5	.	.	.	.	1	.	.	.
χ_6	.	.	.	.	.	1	.	.
χ_7	.	.	1	.	.	a	1	.
χ_8	.	.	.	1	.	b	c	1

Имеем

$$(\varphi_3|_T, 1_T) = ((\chi_3-\chi_2)|_T, 1_T) = \frac{1}{2}(q^2+1)(q^3+2)-1-q = q\left(\frac{1}{2}q^4+\frac{1}{2}q^2+q-1\right) > 0,$$

$$(\varphi_4|_T, 1_T) = ((\chi_4-\chi_1)|_T, 1_T) = \frac{1}{2}q^3(q+1)^2 - 1 > 0,$$

$$(\varphi_7|_T, 1_T) = (\chi_7|_T, 1_T) - ((\varphi_3 + a\varphi_6)|_T, 1_T) \ge (\chi_7|_T, 1_T) - ((\varphi_3 + q\varphi_6)|_T, 1_T)$$
$$= q^7 - q\left(\frac{1}{2}q^4+\frac{1}{2}q^2+q-1\right) - \frac{q}{2}q^3(q-1)^2 = q(q-1)\left(q^5+\frac{1}{2}q^4+q^3+\frac{1}{2}q^2-1\right) > 0,$$

$$(\varphi_7|_T, 1_T) \leq (\chi_7|_T, 1_T) - ((\varphi_3 + \varphi_6)|_T, 1_T) = q(q^2-1)(q^4+q-1),$$

$$\begin{aligned}(\varphi_8|_T, 1_T) = (\chi_8|_T, 1_T) - ((\varphi_4 + b\varphi_6 + c\varphi_7)|_T, 1_T) \geq (q^6-1)(q^2+1)+1 \\ - \left(\frac{1}{2}q^3(q+1)^2 - 1 + \frac{1}{4}(q^2-q)q^3(q-1)^2 - (q-1)q(q^2-1)(q^4+q-1)\right) \\ = \frac{1}{4}(q^2-1)(8q^6-3q^5+5q^4-2q^3+8q^2-4q-4) > 0.\end{aligned}$$

Таким образом, требуемое в данном случае справедливо.

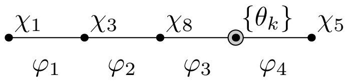

Рис. 3. Главный p-блок группы ${}^3D_4(q)$ при $p \mid q^4 - q^2 + 1$.

Пусть $p \mid q^4 - q^2 + 1$. Тогда главный p-блок группы G имеет циклическую дефектную группу. В силу [13, предложение 5.3; 15, теорема 3.1(b)] дерево Брауэра этого блока выглядит, как на рис. 3. Заметим, что полупростые характеры θ_k из главного блока, которыми отмечена особая вершина дерева, удовлетворяют соотношению $|T| \mid k$, тогда как остальные θ_k остаются неприводимыми при p-редукции. Унипотентные характеры $\chi_2, \chi_4, \chi_6, \chi_7$ имеют дефект 0.

В этом случае поскольку $q \geq 2$ имеем

$$(\varphi_2|_T, 1_T) = ((\chi_3 - \chi_1)|_T, 1_T) = \frac{1}{2}p^s(q^2+1)(q^3+2) - 2 > 0,$$

$$\begin{aligned}(\varphi_3|_T, 1_T) = ((\theta_k - \chi_5)|_T, 1_T) = p^s(q^2+1)(q^6-3) + 4 - \frac{1}{2}p^s(q^2+1)(q^3-2) - 1 \\ = \frac{1}{2}p^s(q^2+1)(2q^6-q^3-4) + 3 > 0. \quad \square\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть группа G удовлетворяет условию $s(G) = 5$. По лемме 3 существуют нильпотентная $\pi_1(G)$-подгруппа $N \trianglelefteq G$ и неабелева простая группа P с условием $s(P) \geq 5$ такие, что $P \leq G/N \leq \mathrm{Aut}(P)$ и $G/N \cong P.A$, где A — $\pi_1(G)$-группа. Поскольку $s(P) \leq 6$, требуется рассмотреть только две возможности.

Сначала пусть $s(P) = 6$. Тогда из [3, 4] имеем $P \cong J_4$ и, значит, $A = 1$. Предположим, что $N \neq 1$. Из [5] следует, что J_4 — единственная конечная группа с шестью компонентами графа простых чисел. Значит, перейдя к подходящей фактор-группе, можно считать, что N — элементарная абелева p-группа для некоторого p, на которой группа P действует неприводимо. В силу леммы 5 каждый порядок элемента из естественного расщепляемого расширения $N \leftthreetimes P$ является порядком элемента группы G. Кроме того, $\pi(N \leftthreetimes P) = \pi(G)$, откуда следует, что $s(N \leftthreetimes P) \geq s(G)$. Значит, можно считать, что $G = N \leftthreetimes P$. По лемме 7 имеем $s(N \leftthreetimes P) \leq 4$; противоречие.

Таким образом, $s(P) = 5$. Тогда $P \cong E_8(q)$ при $q \equiv 0, \pm 1 \pmod 5$. Значит, $A = 1$, так как в противном случае $s(P.A) \leq 4$ ввиду [17]. Осталось показать, что $N = 1$. Предположим противное. По лемме 3 получаем $\pi(N) \subseteq \pi_1(G)$. Пусть $p \in \pi(N)$ и $r \in \pi(q^8 - q^4 + 1)$. В силу рис. 2 достаточно показать, что (p, r) является ребром графа $\Gamma(G)$. Отсюда будет следовать, что $s(G) \leq 4$ вопреки предположению. Как и выше, взяв подходящую фактор-группу, можно считать, что N — элементарная абелева p-группа. По лемме 5 можно считать, что $G = N \leftthreetimes P$. Если q — степень числа p, то по [18, теорема 1.3(iv)] каждый элемент из P оставляет неподвижным ненулевой вектор из N. В частности, так же ведет себя любой элемент порядка r, что и требовалось. Значит, можно считать, что p не делит q. Из [19] следует существование в P максимальной подгруппы максимального ранга, изоморфной группе ${}^3D_4(q^2).6$. В силу предложения 2 каждый элемент порядка r из этой подгруппы оставляет неподвижным на N ненулевой вектор. $\square$

Автор выражает благодарность рецензенту за замечания, позволившие улучшить изложение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gruenberg K. W., Roggenkamp K. W.* Decomposition of the augmentation ideal and of the relation modules of a finite group // Proc. London Math. Soc. 1975. V. 31, N 2. P. 149–166.
2. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. Providence, RI: AMS Chelsea Publ., 2006.
3. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
4. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
5. *Заварницин А. В.* О распознавании конечных групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
6. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
7. *Мазуров В. Д.* О множестве порядков элементов конечной группы // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 1. С. 81–89.
8. *Заварницин А. В., Мазуров В. Д.* О порядках элементов в накрытиях симметрических и знакопеременных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 296–315.
9. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
10. *Jansen C., Lux K., Parker R. A., Wilson R. A.* An atlas of Brauer characters. Oxford: Clarendon Press, 1995.
11. *Spaltenstein N.* Caractères unipotents de ${}^3D_4(F_q)$ // Comment. Math. Helv. 1982. V. 57, N 4. P. 676–691.
12. *Deriziotis D. I., Michler G. O.* Character table and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 303, N 1. P. 39–70.
13. *Geck M.* Generalized Gelfand–Graev characters for Steinberg's triality groups and their applications // Comm. Algebra. 1991. V. 19, N 12. P. 3249–3269.
14. *Himstedt F.* On the 2-decomposition numbers of Steinberg's triality groups ${}^3D_4(q)$, q odd // J. Algebra. 2007. V. 309, N 2. P. 569–593.
15. *Himstedt F., Huang Sh.* On the decomposition numbers of Steinberg's triality groups ${}^3D_4(2^n)$ in odd characteristics // Comm. Algebra (to appear).
16. *Himstedt F.* Charaktertafeln parabolischer Untergruppen der Steinbergschen Trialitätsgruppen und Anwendungen auf deren Darstellungstheorie: Dissertation, RWTH Aachen, 2003. 259 p.
17. *Lucido M. S.* Prime graph components in finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. V. 102. P. 1–22.
18. *Guralnick R. M., Tiep P. H.* Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. V. 6, N 3. P. 271–310.
19. *Liebeck M. W., Saxl J., Seitz G. M.* Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. 1992. V. 65, N 2. P. 297–325.

Статья поступила 13 июня 2012 г., окончательный вариант — 26 сентября 2012 г.

Заварницин Андрей Витальевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
zav@math.nsc.ru