Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.544.33

РАСШИРЕНИЕ ЦЕНТРАЛИЗАТОРА В НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ

М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников

Аннотация. Дано решение гипотезы о неприводимых координатных группах алгебраических множеств для нильпотентных R-групп ступени нильпотентности 2, где R — евклидово кольцо. Доказано, что результат, аналогичный результату Линдона [1] для свободных групп, верен в этом случае, а аналог теоремы Мясникова — Харлампович [2] нет.

Ключевые слова: нильпотентная группа, биномиальное кольцо, неприводимая координатная группа, гипотеза о неприводимых координатных группах.

К 70-летию Виктора Даниловича Мазурова

1. Введение. Понятия расширения централизатора неединичного элемента группы G и итерированного расширения централизаторов над G введены в работе [3] (определения в п. 1 данной статьи), в которой начато исследование этой конструкции в группах.

В середине 90-х гг. прошлого столетия А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников сформулировали следующую гипотезу о неприводимых координатных группах: *пусть F — свободная группа и H — ее неприводимая координатная группа, тогда H изоморфна подгруппе некоторого итерированного расширения централизаторов над F*. В несколько более слабой форме второй автор статьи сформулировал гипотезу о координатных группах еще в 1991 г. в докладе на Международной конференции в г. Барнауле (расширенная версия доклада опубликована в [4]). К тому времени было известно, что конечно порожденные подгруппы итерированного расширения централизаторов над F являются неприводимыми координатными группами над F. Это следует из результатов Линдона [1]. В знаменитой теореме А. Г. Мясникова и О. Г. Харлампович [2] доказано и обратное утверждение, а потому гипотеза, сформулированная выше, верна в случае свободных групп.

В этой статье рассматривается вопрос: верна ли гипотеза о координатных группах в классе нильпотентных групп и в классе нильпотентных R-групп в случае, когда R является евклидовым кольцом?

Для этого мы вводим понятие $CT_{1,R}$-групп, обобщающее известное понятие коммутативно транзитивной группы (или CT-группы), и детально исследуем свойства $CT_{1,R}$-групп в многообразии двуступенно нильпотентных групп $\mathfrak{N}_{2,R}$ над евклидовым кольцом R (теорема 1). Далее показываем, что аналог результата Линдона верен в классе $CT_{1,R}$-групп из многообразия $\mathfrak{N}_{2,R}$, где R — евклидово кольцо (теорема 2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00081) и МОиН РФ (№ 14.B37.21.0359, 0859).

Отсюда следует, что в классе $CT_{1,R}$-групп из $\mathfrak{N}_{2,R}$ без R-кручения, где R — евклидово кольцо, все конечно порожденные R-подгруппы из итерированного расширения централизаторов над G являются неприводимыми координатными группами над G и гипотеза о координатных группах в одну сторону верна.

Далее на примерах показываем, что не любая неприводимая координатная группа над G является подгруппой итерированного расширения централизаторов над G, так что аналог теоремы Мясникова — Харлампович неверен в классе нильпотентных групп.

Наконец, приводим примеры R-групп ступени нильпотентности 4, которые показывают, что теорема 2 не обобщается с двуступенно нильпотентных групп на группы ступени 4 и выше.

2. Расширение централизатора. Пусть G — группа, g — неединичный элемент, $C = C_G(g)$ — централизатор элемента g в G и $\mathfrak{M}$ — многообразие, порожденное группой G. Тогда группу H, заданную представлением

$$H = \langle G, t \mid t^{-1}ct = c \ \forall c \in C\rangle_{\mathfrak{M}}$$

в многообразии $\mathfrak{M}$ будем называть, следуя [3], *расширением централизатора ранга* 1.

Объединение цепочки подгрупп

$$G = H_1 < H_2 < \cdots < H_k = H, \quad k \geq 2,$$

где группа H_{i+1}, $i = 1, \ldots, k-1$, — расширение централизатора C_i ранга 1 группы H_i, будем называть *итерированным расширением централизаторов над* G.

В этой статье будем изучать конструкцию расширения централизаторов для конечно порожденных R-групп, где R — евклидово кольцо.

3. Холловы R-группы. Начнем с определения нильпотентных R-групп над произвольным биномиальным кольцом R, следуя [5].

Определение 1. Кольцо R называется *биномиальным кольцом*, если R — область целостности, содержащая $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца, и с каждым элементом $\alpha \in R$ включает все биномиальные коэффициенты $C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Примерами биномиальных колец являются любое поле нулевой характеристики, кольцо многочленов над таким полем и кольцо целых чисел.

Определение 2. Нильпотентная группа G ступени нильпотентности m называется *R-группой* (здесь R — биномиальное кольцо), если для любого $\alpha \in R$ и $x \in G$ единственным образом определен элемент $x^\alpha \in G$, и для всех элементов группы G и кольца R выполнены следующие аксиомы ($x, y, x_1, \ldots, x_n \in G, \alpha, \beta \in R$):

1) $x^1 = x$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$,

2) $(y^{-1}xy)^\alpha = y^{-1}x^\alpha y$,

3) $x_1^\alpha \ldots x_n^\alpha = (x_1 \ldots x_n)^\alpha \tau_2^{C_\alpha^2}(X) \ldots \tau_m^{C_\alpha^m}(X)$, где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\tau_k(X)$ — k-е слово Петреску.

Напомним, что для любого натурального k k-е слово Петреску рекурсивно определяется формулой $x_1^k \ldots x_n^k = \tau_1^{C_k^1}(X)\tau_2^{C_k^2}(X) \ldots \tau_{k-1}^{C_k^{k-1}}(X)\tau_k^{C_k^k}(X)$ в свободной группе F с порождающими $x_1, \ldots, x_n$. В частности,

$$\tau_1(X) = x_1 x_2 \ldots x_n, \quad \tau_2(X) = \prod_{i>j, i,j=1}^{n} [x_i, x_j] \mod \gamma_3(F),$$

где $\gamma_3(F)$ — третий член нижнего центрального ряда группы F.

Будем работать с нильпотентными группами ступени $m = 2$. Всюду далее будем обозначать через $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ коммутатор двух элементов $x, y \in G$, через G' — коммутант группы G и через $Z(G)$ — центр группы G.

Определение 3. Многообразие двуступенно нильпотентных групп $\mathfrak{N}_2$ определяется следующим тождеством: $[x, y, z] = [[x, y], z] = 1$.

Если группа G из многообразия групп $\mathfrak{N}_2$, то коммутант G' содержится в центре $Z(G)$ группы G. В многообразии $\mathfrak{N}_2$ аксиома 3 в определении 2 R-группы выглядит следующим образом:

$$3')\ x_1^{\alpha} \dots x_n^{\alpha} = (x_1 \dots x_n)^{\alpha} \tau_2^{C_{\alpha}^2}(X), \quad \text{где } \tau_2(X) = \prod_{i>j,\ i,j=1}^{n} [x_i, x_j].$$

Класс двуступенно нильпотентных R-групп будем обозначать через $\mathfrak{N}_{2,R}$. Покажем, что класс $\mathfrak{N}_{2,R}$ является многообразием в подходящем языке. Рассмотрим язык $L_R = L_{gr} \cup \{f_{\alpha} \mid \alpha \in R\}$, где L_{gr} — стандартный групповой язык, а f_{α} — унарная алгебраическая операция. Пусть G — некоторая алгебраическая система языка L_R. Для удобства будем интерпретировать в G функциональные символы $f_{\alpha}(x)$ через x^{α}, где $x \in G$, и предположим, что G — двуступенно нильпотентная группы и в ней выполняются аксиомы 1–3 из определения 2.

Будем называть алгебраические системы языка L_R *R-группами*, если в них выполняются аксиомы группы и аксиомы 1, 2 из определения 2, и *нильпотентными R-группами*, если G — нильпотентная группа и в ней выполнены аксиомы 1–3. Как обычно в универсальной алгебре, можно говорить о свободных R-группах, о многообразии R-групп и об универсальных классах R-групп. С этой точки зрения класс $\mathfrak{N}_{2,R}$ является многообразием двуступенно нильпотентных групп в языке L_R. Понятия R-подгруппы, R-гомоморфизма, R-изоморфизма определяются естественным образом.

Приведем простые факты о группах из $\mathfrak{N}_{2,R}$.

Предложение 1. *Пусть G — группа из многообразия $\mathfrak{N}_{2,R}$. Тогда*

1) коммутант G' и центр $Z(G)$ группы G являются R-модулями;

2) если G без R-кручения, то $G/Z(G)$ — R-модуль без кручения;

3) если G — конечно порожденная без R-кручения группа и R — евклидово кольцо, то $Z(G)$ и $G/Z(G)$ — свободные R-модули без кручения.

Доказательство. 1. Так как G — группа из $\mathfrak{N}_{2,R}$, в ней выполнено квазитождество: $\forall x, y\ [x, y] = 1 \to [x, y^r] = [x, y]^r = 1$, а потому $Z(G)$ является R-модулем. Непосредственно доказывается также, что G' — R-подмодуль R-модуля $Z(G)$.

2. Из свойства 1 следует, что $G/Z(G)$ — фактор-модуль, и пусть для элемента $g \notin Z(G)$ существует элемент $r \in R$ такой, что $g^r \in Z(G)$, и пусть h — элемент из G такой, что $[g, h] = 1$. Тогда $[g^r, h] = [g, h]^r = 1$, и так как G — группа без R-кручения, $r = 0$.

3. Следует из свойств конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов.

4. Элементы алгебраической геометрии над группами. В [6, 7] изложены основные понятия и базовые результаты алгебраической геометрии над группами. Для полноты изложения приведем некоторые из них, формулируя эти понятия и результаты специально для нильпотентных групп ступени 2. Пусть G — группа из $\mathfrak{N}_2$. Декартова степень $G^n = G \times \dots \times G$ (n копий) называется *аффинным пространством над* G. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество букв, $G[X]$ — нильпотентное произведение $G *_{\mathfrak{N}_2} F(X)$, где $F(X)$ — свободная нильпотентная группа в $\mathfrak{N}_2$ с базой X. Система уравнений S над G есть подмножество из $G[X]$. Элемент $u \in S$ может рассматриваться как некоммутирующий полином от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из G: $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Элемент $p = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ называется *корнем полинома* $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, если $u(g_1, \ldots, g_n) = 1$ в G. Пусть S — подмножество $G[X]$, тогда p называется *корнем* S, если p является корнем для каждого $u \in S$.

Определение 4. Подмножество V аффинного пространства G^n называется *алгебраическим множеством над* G, если V — множество всех решений системы уравнений $S \subseteq G[X]$.

Для данного S через $V_G(S)$ обозначим алгебраическое множество всех решений системы S. Кроме того, для V из S таких, что $V = V_G(S)$, определим

$$\mathrm{Rad}(V) = \{u \in G[x] \mid u(p) = 1 \text{ для всех } p \in V_G(S)\}.$$

Очевидно, что $\mathrm{Rad}(V)$ всегда является нормальной подгруппой в $G[X]$.

Определение 5. Группа $\Gamma(V) = G[X]/\mathrm{Rad}(V)$ называется *координатной группой алгебраического множества* V.

Беря в качестве предбазы замкнутых множеств все алгебраические множества из G^n, превратим G^n в топологическое пространство (топология Зарисского). Стандартным способом определяется в G^n понятие неприводимого алгебраического множества. Координатную группу неприводимого алгебраического множества будем называть *неприводимой координатной группой.* Известно [6], что координатная группа алгебраического множества над G является G-подгруппой декартова произведения $G^I = \prod\limits_{i \in I} G^{(i)}$, $G^{(i)} \cong G$, $i \in I$, причем сама группа G отождествляется с диагональю группы G^I, $\Delta : G \to G^I$, $\Delta(g) = (\ldots, g, \ldots)$.

Основы алгебраической геометрии над произвольной алгебраической системой изложены в [5, 8]. В концентрированном виде основные результаты этих статей сформулированы в виде двух объединяющих теорем. Приведем их в виде, необходимом для наших приложений.

Теорема A (без коэффициентов). *Пусть A и C — алгебраические системы языка L, причем система A нётерова по бескоэффициентным уравнениям, а C конечно порождена. Тогда следующие свойства алгебраической системы C равносильны:*

1) *C — координатная система неприводимого алгебраического множества над A для системы бескоэффициентных уравнений;*

2) *универсальная теория* $\mathrm{Th}_\forall(A)$ *системы A содержится в универсальной теории* $\mathrm{Th}_\forall(C)$ *системы C, другими словами, C принадлежит* $\mathrm{ucl}(A)$ – *универсальному замыканию системы A;*

3) *алгебраическая система C вложима в ультрастепень системы A;*

4) *алгебраическая система C дискриминируется алгебраической системой A.*

По определению система A нётерова по уравнениям, если для любой системы уравнений S (бескоэффициентных уравнений) от конечного числа неизвестных над A существует конечная подсистема $S_0 \subseteq S$ такая, что либо S_0, S одновременно несовместны, либо их множества решений совпадают.

Говорят, что *система C дискриминируется системой A*, если для любого конечного множества попарно не равных друг другу элементов из C существует

L-гомоморфизм из C в A такой, что образы элементов из выбранного подмножества также попарно не равны друг другу.

Обозначим через L_A обогащение языка L новыми константными символами $\{c_a \mid a \in A\}$. Мы называем алгебраическую систему C языка L_A A-*системой*, если подсистема в C, состоящая из выбранных элементов для констант c_a, $a \in A$, канонически изоморфна A.

Теорема B (с коэффициентами). *Пусть A и C — алгебраические системы языка L, причем A нётерова по уравнениям, а C — конечно порожденная A-система. Тогда следующие свойства алгебраической A-системы C равносильны:*

1) *C — координатная алгебраическая система неприводимого алгебраического множества над A для системы уравнений с коэффициентами в A;*

2) *$\mathrm{Th}_{\forall,A}(A) = \mathrm{Th}_{\forall,A}(C)$;*

3) *A-система C A-вложима в ультрастепень системы A;*

4) *A-система C A-дискриминируется алгебраической системой A.*

Замечание. В дальнейшем будем работать с конечно порожденными нильпотентными R-группами, где R — евклидово кольцо. Эти группы удовлетворяют условию максимальности для нормальных R-подгрупп, и, следовательно, они нётеровы по системам уравнений как в случае без коэффициентов, так и с коэффициентами. Поэтому в дальнейшем будем использовать в нужных местах теоремы A и B.

5. Нильпотентные CT_1-группы. Напомним определение свойства CT (транзитивность коммутирования): группа G (R-группа) называется CT-группой (R-группой), если для любого неединичного элемента x централизатор $C_G(x)$ является абелевой подгруппой (R-модулем).

Это свойство для групп записывается в виде универсальной формулы

CT: $\forall x, y, z\ \{x \neq 1 \wedge [x, y] = 1 \wedge [x, z] = 1 \to [y, z] = 1\}$.

В случае R-группы свойство CT_R записывается в виде серии универсальных формул:

CT_R: CT-аксиома, серия аксиом $\{\psi_r \mid r \in R, r \neq 0\}$, где ψ_r имеет вид

$$\forall x, y\ \{x \neq 1 \wedge [x, y] = 1 \to [x, y^r] = 1 \mid r \in R\}.$$

Определение свойства CT_1: группа G называется CT_1-*группой*, если для любого нецентрального элемента x централизатор $C_G(x)$ является абелевой подгруппой.

Это свойство для групп записывается в виде универсальной формулы

CT_1: $\forall x, y, z, t\ \{[x, t] \neq 1 \wedge [x, y] = 1 \wedge [x, z] = 1 \to [y, z] = 1\}$.

В случае R-групп свойство $CT_{1,R}$ записывается в виде следующей серии аксиом:

$CT_{1,R}$: CT_1-аксиома и серия аксиом $\{\psi_r \mid r \in R, r \neq 0\}$, где ψ_r — определенная выше аксиома.

Свойства CT_1-группы и нильпотентных $CT_{1,R}$-групп представлены следующими результатами.

Теорема 1. I. *Класс всех CT_1-групп ($CT_{1,R}$-групп) является универсальным классом в языке L_{gr} (L_R) и, следовательно, замкнут относительно операции взятия подгрупп (R-подгрупп) и ультрапроизведений.*

II. *Если G является CT_1-группой ($CT_{1,R}$-группой), то координатные группы (R-группы) неприводимых алгебраических множеств над G также являются CT_1-группами (R-группами).*

III. *Пусть G — CT_1-группа ($CT_{1,R}$-группа) и A — абелева группа (R-модуль). Тогда прямое произведение $G \times A$ является CT_1-группой ($CT_{1,R}$-группой).*

Пусть, кроме того, далее R — евклидово кольцо.

IV. *Свободная m-нильпотентная группа (R-группа) является CT_1-группой ($CT_{1,R}$-группой) при $m < 4$.*

V. *Группы $UT_3(R)$ и $UT_4(R)$ являются $CT_{1,R}$-группами.*

VI. *Пусть G_1, G_2 — две нильпотентные конечно порожденные CT_1-группы ($CT_{1,R}$-группы) без кручения такие, что $Z(G_i) = G_i'$, $i = 1, 2$. Тогда свободное произведение $G_1 * G_2$ групп (R-групп) в многообразии $\mathfrak{N}_2$ ($\mathfrak{N}_{2,R}$) также является CT_1-группой ($CT_{1,R}$-группой).*

Доказательство. I. Следует из общих теорем универсальной алгебры и теории моделей.

II. Следует из объединяющих теорем, сформулированных в п. 4.

III. Непосредственно следует из определений.

Остальные пункты теоремы требуют развернутого доказательства и информации о централизаторах нецентральных элементов в соответствующих группах. Свойства централизаторов в нильпотентных группах будут рассмотрены в следующих пунктах, и там же будет завершено доказательство теоремы 1. □

6. Свойства централизаторов в двуступенно нильпотентных CT_1-группах. Примем следующие соглашения на весь этот пункт: R — евклидово кольцо, G — конечно порожденная двуступенно нильпотентная R-группа без R-кручения, x — нецентральный элемент, $C_G(x)$ — централизатор x в G, $Z(G)$ — центр G, G' — коммутант G. По предложению 1 $Z(G)$, G' и $G/Z(G)$ — свободные R-модули конечного ранга.

Определение 6. Нецентральный элемент x будем называть *корневым*, если образ $\bar{x}$ элемента x в $G/Z(G)$ можно включить в базу свободного модуля $G/Z(G)$.

Лемма 1. *Для любого нецентрального элемента $y \in G$ существует такой корневой элемент x, что $C_G(x) = C_G(y)$.*

Доказательство. Пусть $y = x^r z$, $r \in R$, $z \in Z(G)$. Тогда если $t \in C_G(x)$, то $t \in C_G(y)$, так что $C_G(x) \subseteq C_G(y)$. Обратно, пусть $1 = [y, t] = [x, t]^r$, и поскольку группа G без кручения, имеем $[x, t] = 1$, следовательно, $C_G(x) = C_G(y)$. Осталось доказать, что существует такой корневой элемент x, что $y = x^r z$. Ввиду того, что $G/Z(G)$ — свободный R-модуль и R — евклидово кольцо, образ $\bar{y}$ лежит в некотором максимальном R-подмодуле $\langle \bar{x} \rangle_R$ и $\bar{x}$ включается в базу $G/Z(G)$, следовательно, x — корневой элемент. □

Докажем пп. IV, V теоремы 1. Свойства IV и V для свободных групп из $\mathfrak{N}_{2,R}$ и $UT_3(R)$ доказываются непосредственным вычислением централизатора для нецентрального элемента x: $C_G(x) = C_G(y) = \langle y \rangle_R \times Z(G)$, где y — корневой элемент.

Если G — свободная группа из $\mathfrak{N}_{3,R}$ или $UT_4(R)$, то G' — абелева подгруппа, и если x — нецентральный элемент и $x \in G'$, то $C_G(x)$ совпадает с G' и потому абелев. Если $x \notin G'$, то существует такой корневой элемент, что $C_G(x) = C_G(y) = \langle y \rangle_R \times Z(G)$ и централизатор также является абелевой подгруппой. Следовательно, пп. IV и V теоремы 1 доказаны. □

Соглашение: в силу доказанной выше леммы в дальнейшем при работе с централизаторами $C_G(x)$, где x — нецентральный элемент, будем всегда предполагать, что x — корневой элемент.

Лемма 2. *Пусть G — конечно порожденная $CT_{1,R}$-группа без R-кручения. Тогда верны следующие утверждения.*

1. $C_G(x) = A$ — абелева R-подгруппа (R-модуль), и существует такая R-подгруппа B, что $G = A \cdot B$, $A \cap B = Z(G)$.

2. Пусть системы элементов $\{a_1, \ldots, a_r\}$, $\{b_1, \ldots, b_s\}$ таковы, что образы элементов из этих систем составляют базу свободного R-модуля $A/Z(G)$, $B/Z(G)$ соответственно. Тогда для любого индекса $i = 1, \ldots, r$ элементы $[a_i, b_1], \ldots, [a_i, b_s]$ линейно независимы в свободном R-модуле $Z(G)$.

Доказательство. 1. Так как G — $CT_{1,R}$-группа, то $C_G(x) = A$ — абелева R-подгруппа и тем самым R-модуль, содержащий $Z(G)$. Кроме того, G — конечно порожденная R-группа без R-кручения. Следовательно, по предложению 1 существует система элементов $\{a_1, \ldots, a_r\}$, $r \neq 0$, такая, что элементы $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_r}$ составляют базис свободного R-модуля $A/Z(G)$. Так как группа G без R-кручения, если $0 \neq c \in C_G(x)$ и $c = d^t$, $t \in R$, то $d \in C_G(x)$. Следовательно, R-модуль $\overline{A} = A/Z(G)$ дополняем в свободном модуле $G/Z(G)$, и пусть $G/Z(G) = \overline{A} \oplus \overline{B}$ и $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_s}$ — база $\overline{B}$. Тогда R-подгруппа, порожденная центром и элементами $b_1, \ldots, b_s$ (прообразами $\overline{b_j}$, $j = 1, \ldots, s$) в G, искомая.

2. Фиксируем элемент $a_i \in \{a_1, \ldots, a_r\}$ в вышеприведенной системе элементов, и пусть $\{c_j = [a_i, b_j] \mid j = 1, \ldots, s\}$ — система элементов из $Z(G)$. Если существует линейная зависимость $c_1^{r_1} \ldots c_s^{r_s} = 1$ в $Z(G)$, то $\left[a_i, b_1^{r_1} \ldots b_s^{r_s}\right] = 1$, стало быть, $b_1^{r_1} \ldots b_s^{r_s} \in C_G(x) = A$. Отсюда $r_1 = \cdots = r_s = 0$, ибо образы элементов $b_1, \ldots, b_s$ линейно независимы по модулю $Z(G)$. $\square$

Закончим доказательство теоремы 1. Для этого сформулируем п. VI теоремы 1 в такой форме.

Предложение 2. *Пусть G_1, G_2 — конечно порожденные $CT_{1,R}$-группы без R-кручения из $\mathfrak{N}_{2,R}$, причем $Z(G_i) = G_i'$, $i = 1, 2$, и R — евклидово кольцо. Тогда свободное произведение $G_1 * G_2$ в многообразии $\mathfrak{N}_{2,R}$ также является $CT_{1,R}$-группой.*

Доказательство. Пусть $G_1 = \langle X \mid R_1 \rangle_{\mathfrak{N}_{2,R}}$ и $G_2 = \langle Y \mid R_2 \rangle_{\mathfrak{N}_{2,R}}$ — представления R-групп G_1 и G_2 в многообразии $\mathfrak{N}_{2,R}$. Тогда свободное произведение $G_1 * G_2$ в многообразии $\mathfrak{N}_{2,R}$ есть группа из $\mathfrak{N}_{2,R}$, заданная представлением

$$G = G_1 * G_2 = \langle X \cup Y \mid R_1 \cup R_2 \rangle_{\mathfrak{N}_{2,R}}.$$

По предложению 1 существует система элементов $\{a_1, \ldots, a_r; u_1, \ldots, u_p\}$ из G таких, что $u_1, \ldots, u_p$ — базис свободного R-модуля $G_1' = Z(G_1)$, а образы $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_r}$ составляют базу R-модуля $G_1/Z(G_1)$; $\{b_1, \ldots, b_s; v_1, \ldots, v_q\}$ — аналогичная система элементов из G_2. Тогда непосредственным вычислением можно показать, что $Z(G) = G'$ и $G/Z(G) \cong G_1/Z(G_1) \times G_2/Z(G_2)$ и что система элементов $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q, [a_i, b_j] \mid i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s\}$ есть R-база для $Z(G) = G'$.

Пусть g — нецентральный элемент из G. Для доказательства предложения 2 достаточно доказать, что $C = C_G(g)$ — абелева подгруппа. Таким образом, можно предполагать, что g — корневой элемент. Запишем g в виде $g = a_1^{\alpha_1} \ldots a_r^{\alpha_r} b_1^{\beta_1} \ldots b_s^{\beta_s} z = abz$, где $z \in Z(G)$. Так как добавка z не влияет на вычисление централизатора, будем предполагать, что $g = ab$, $a \in G_1$, $b \in G_2$. Разберем три случая.

1. $b = 1$, и пусть $[g, h] = 1$, где $h = a_1 b_1,\ a_1 \in G_1,\ b_1 \in G_2$. Тогда $1 = [g, h] = [a, a_1][a, b_1]$. Ясно, что если $b_1 \neq 1$, то $[g, h] \neq 1$, поэтому $C_G(a) = C_{G_1}(a) Z(G)$ и эта подгруппа является абелевой в G.

2. Если $a = 1$, то рассуждение аналогично вышеприведенному.

3. $a \neq 1, b \neq 1$ и $[g,h] = 1$ и $h = a_1 b_1$. Докажем, что в этом случае существует такой элемент $\gamma \in R$, что $a_1 = a^\gamma \mod Z(G)$, $b_1 = b^\gamma \mod Z(G)$.

В самом деле, $1 = [g,h] = [a,a_1][b,b_1][a,b_1][b,a_1]$. Из описания базы для $Z(G)$ выше следует, что $[a,a_1] = [b,b_1] = 1$, значит,

$$[a,b_1][b,a_1] = 1. \tag{1}$$

Запишем $h = a_1^{x_1} \dots a_r^{x_r} b_1^{y_1} \dots b_s^{y_s}$ с неизвестными элементами $x_1, \dots, y_s$ из R. Учитывая, что элементы $[a_i, b_j]$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$, R-линейно независимы в $Z(G)$, и равенство (1), получаем, что ранг 2-строчной матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_s \\ x_1 & \dots & x_r & y_1 & \dots & y_s \end{pmatrix}$$

равен 1, и так как по условию $g = ab$ — корневой элемент в G, существует такое $\gamma \in R$, что $h = g^\gamma z$, $z \in Z(G)$. Следовательно, в этом случае $C_G(g) = \{g^\gamma z \mid \gamma \in R, z \in Z(G)\}$ и $C_G(g)$ — абелева подгруппа. Доказательство предложения 2, а с ним и доказательство теоремы 1 завершены. $\square$

7. Итерированные расширения централизаторов. Основной целью этого пункта является доказательство следующего результата.

Теорема 2. *Пусть R — евклидово кольцо, G — конечно порожденная двуступенно нильпотентная группа без R-кручения со свойством $CT_{1,R}$ и H — итерированное расширение централизаторов над G. Тогда группа H G-дискриминируется группой G. В частности, H является $CT_{1,R}$-группой, и все ее подгруппы, содержащие G, суть неприводимые координатные группы над G.*

Доказательство. Достаточно доказать тот факт, что H G-дискриминируется группой G, ибо в этом случае вторая часть утверждения теоремы следует из объединяющей теоремы (с коэффициентами), а свойство $CT_{1,R}$ непосредственно вытекает из дискриминируемости. Кроме того, ясно, что теорему достаточно доказать только для одного расширения централизатора.

Итак, пусть

$$H = \langle G, t \mid t^{-1}ct = c,\ c \in C \rangle_{\mathfrak{N}_{2,R}},$$

где $C = C_G(x)$ и x — корневой нецентральный элемент из G.

Так как R-группа G конечно порождена и без R-кручения, а R — евклидово кольцо, по предложению 1 C — свободный R-модуль с базой $c_1, \dots, c_m$.

По лемме 2 $G = C \cdot B$, $C \cap B = Z(G)$, и пусть $c_1, \dots, c_r$, $r \leq m$, и $b_1, \dots, b_s$ — две системы элементов, построенных при доказательстве этой леммы, причем их образы $\overline{c_1}, \dots, \overline{c_r}, \overline{b_1}, \dots, \overline{b_s}$ дают R-базис свободного R-модуля $G/Z(G)$. Представление выше для G индуцирует аналогичное представление для H в форме $H = C_1 \cdot B_1$, где R-модуль C_1 равен $C \oplus \langle t \rangle_R \oplus D$, $B_1 = B \times D$, где D — свободный R-модуль с базой $z_1 = [t, b_1], \dots, z_s = [t, b_s]$, причем $C_1 \cap B_1 = Z(G) \oplus D$. Кроме того, $H = G \cdot (\langle t \rangle_R \oplus D)$ есть произведение двух R-подгрупп G и $\langle t \rangle_R \oplus D$, причем пересечение этих подгрупп равно 1. Следовательно, для любого элемента $h \in H$ существует однозначная запись в виде

$$h = g t^r z_1^{\beta_1} \dots z_s^{\beta_s}, \qquad g \in G,\ r, \beta_i \in R. \tag{2}$$

Все утверждения выше доказываются стандартным способом: на множестве всех записей H_1 в виде (2) естественным образом определяются групповая операция и операция возведения в степень $h \to h^r$, $r \in R$, так что H_1 — R-группа, и далее доказывается, что существует канонический гомоморфизм ψ из H_1 в H, и что $\ker(\psi) = 1$. Для завершения доказательства теоремы 2 осталось доказать следующий результат.

Лемма 3. *Группа H G-дискриминируется группой G.*

Доказательство. Определим семейство G-гомоморфизмов $\Phi = \{\psi_c \mid 1 \neq c \in C = C_G(x)\}$ из H в G отображением на множестве порождающих H:

$$\psi_c^0 : g \to g \text{ для всех } g \in G; \quad \psi_c^0 : t \to c.$$

Из (2) непосредственно следует, что это отображение продолжается до G-гомоморфизма $\psi : H \to G$ (как R-групп).

Докажем, что семейство Φ является G-дискриминирующим для H. Пусть $h_1, \dots, h_m$ — неединичные элементы из H. Необходимо найти такое ψ_c, что $\psi_c(h_1) \neq 1, \dots, \psi_c(h_m) \neq 1$ в G. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что система $h_1, \dots, h_m$ имеет следующий вид:

$$h_1 = g_1 t^{r_1} u_1, \ \dots, \ h_p = g_p t^{r_p} u_p, \ h_{p+1} = u_{p+1}, \ \dots, h_m = u_m,$$

где $p \leq m$, $g_i \in G$, причем элементы $g_i t^{r_i}$ и $g_j t^{r_j}$ неединичные и попарно различные, $u_i \in D$, $i = 1, \dots, m$, $k = p+1, \dots, m$.

Перепишем элементы u_k, $k = p+1, \dots, m$, в виде $u_k = [t, b_k]$, причем $b_k \in B$ в представлении $G = C \cdot B$.

Так как $u_k \neq 1$, то $b_k = b_1^{\alpha_1} \dots b_s^{\alpha_s}$ и $\alpha_j \neq 0$ по крайней мере для одного из индексов $j \in \{1, \dots, s\}$. Если c — нецентральный элемент из $A = C_G(x)$, то $[c, b_k] \neq 1$ по лемме 2 (п. 2) для любого такого элемента c, следовательно, $\psi_c(u_k) \neq 1$ в G. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $p = m$.

Допустим, что какой-то индекс i таков, что $r_i \neq 0$, и элемент $c \in C$ такой, что

$$\psi_c(g_i t^{r_i} u_i) = \psi_c(g_i) c^{r_i} \psi_c(u_i) = 1. \tag{3}$$

Ясно, что существует только конечное число элементов из C, удовлетворяющих уравнениям типа (3). Обозначим через C^* множество C за вычетом конечного числа указанных выше элементов, тогда $\psi_c(h_i) \neq 1$, если $c \in C^*$. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 0$, и, сокращая, если это нужно, множество C^* на конечное число элементов, можно предполагать, что элементы $g_1, \dots, g_m$ содержатся в коммутанте G' группы G, а элемент u_i представим в виде $u_i = [t, e_i]$, $e_i \in B$, $i = 1, \dots, m$.

Допустим, что $\psi_c(h_i) = \psi_c(g_i)\psi_c(u_1) = 1$. Тогда $g_i = \psi_c(g_i) = [e_i, t]$, $e_i = b_1^{\alpha_{i_1}} \dots b_s^{\alpha_{i_s}}$, следовательно,

$$g_i = [b_1, c]^{\alpha_{i_1}} \dots [b_s, c]^{\alpha_{i_s}}. \tag{4}$$

Если элемент $c_1 \in C^*$ — другое решение системы (4), то имеем равенство $1 = [e_i, d]$, где $d = c c_1^{-1}$, и если $d \neq 1$, то $e_i \in C_G(d) = C_G(x) = C$, что не так. Следовательно, уравнение (4) имеет единственное решение. Выкинув из C^* конечное число таких решений, получим искомый G-гомоморфизм ψ_c из H в G.

Лемма 3 и вместе с ней теорема 2 доказаны. □

Эта теорема является аналогом результата Линдона для свободных групп, упомянутого во введении.

Введем важный для теории расширений централизаторов в нильпотентных группах термин «единственность расширения централизатора для $CT_{1,R}$-групп». Под этим термином мы понимаем последнее равенство из следующего предложения.

Предложение 3. *Пусть G — конечно порожденная $CT_{1,R}$-группа из $\mathfrak{N}_{2,R}$ без R-кручения, H — расширение централизатора $C_G(x) = A$ для корневого нецентрального элемента x и $G = A \cdot B$ — представление G, как в лемме 2. Пусть $g = ab$, $a \in A$, b — нецентральный элемент из B. Тогда $C_H(ab) = C_G(ab) \mod Z(H)$.*

Доказательство. Пусть $h \in C_H(g)$ и $h = h_1 t^r$, $r \in R$, $h_1 \in G$. Тогда $1 = [g, h] = [ab, h_1 t^r]$ и $[ab, h_1] = [t^r, ab] = [t, b]^r$.

Если $[b, t] \neq 1$, то $[t, b]^r$ — неединичный элемент из D, а $[ab, h_1] \in G'$. Так как $G \cap D = 1$, имеем $r = 0$ и $h_1 \in G'$. Отсюда непосредственно вытекает нужный результат. □

8. Примеры.

Пример 1. Приведем пример, который демонстрирует тот факт, что теорему 2 нельзя распространить на $CT_{1,R}$-группы ступени нильпотентности, большей либо равной четырем.

Итак, пусть R — евклидово кольцо (например, $R = \mathbb{Z}$) и G — свободная R-группа ступени нильпотентности 4 с базой, состоящей из двух элементов a, b, и $C = C_G(a)$. Рассмотрим расширение H централизатора C ранга 1 над группой G:

$$H = \langle G, t \mid t^{-1} a t = a \rangle_{\mathfrak{N}_{4,R}}.$$

Докажем, что $H \notin G\text{-qvar}(G)$ и, следовательно, по объединяющей теореме A, H не будет координатной группой над G.

Отметим свойства группы G.

1. Элементы $a, b, [b, a], [b, a, a], [b, a, b], [b, a, a, a], [b, a, a, b], [b, a, b, b]$ составляют мальцевскую базу для группы G.

2. Коммутант G' группы G является абелевой подгруппой (R-модулем) с базисом, состоящим из базисных элементов веса, большего либо равного двум. Следовательно, G является метабелевой группой.

3. Центр $Z(G)$ группы G порождается как R-модуль последними тремя базисными элементами.

4. Группа G является $CT_{1,R}$-группой.

Свойство 1 — известное свойство свободных холловых нильпотентных R-групп [9]. Свойства 2 и 3 непосредственно следуют из свойства 1.

Свойство 4 вытекает из описания централизаторов элементов в свободных нильпотентных группах (см., например, [10]), но в данном примере может быть доказано непосредственно таким образом: если x — нецентральный элемент и $x \in G'$, то $C_G(x) = G'$ и поэтому C — абелева подгруппа; если x не принадлежит G', то существует элемент y, который можно включить в систему базисных элементов для G такой, что $C_G(x) = C_G(y) = \langle y \rangle_R \times Z(G)$, тем самым элемент $C_G(x)$ также абелев.

Отметим свойства группы H.

1. Базисные элементы от трех букв a, b, t веса, меньшего либо равного четырем, записи которых ($a < b < t$) не начинаются с коммутатора $[t, a]$ и без коммутатора $[[t, b], [t, a]]$, составляют мальцевскую базу для группы H; в частности, среди них есть базисный элемент $[[t, b], [b, a]]$ веса 4.

Отсюда следует второе свойство H.

2. Группа H не метабелева, и, следовательно, $H \notin G\text{-qvar}(G)$, ибо две эти группы различает тождество метабелевости.

Докажем свойство 1. Пусть F_3 — свободная R-группа в многообразии $\mathfrak{N}_{4,R}$ с a, b, t ($a < b < t$ — линейное упорядочение базы), ψ — канонический R-гомоморфизм из F_3 в H и $N = \ker(\psi)$. Тогда N как R-подгруппа в F_3 порождается сопряженными элементами вида $[t, a]^f$, $f \in F_3$. Требуемый результат получится, если доказать, что для любого $f \in F_3$ запись элемента $[t, a]^f$ через базисные коммутаторы содержит только выброшенные коммутаторы. Это доказывается индукцией по длине слова f с помощью коммутаторных равенств: $[t, a]^f = [t, a][t, a, f]$, $[t, a, f_1, f_2] = [t, a, f_1]^{-f_2}[t, a, f_2]$, и наблюдения, что $[t, b] > [t, a]$.

Пример 2. Укажем пример R-группы ($R = \mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел), который показывает, что, хотя аналог теоремы Линдона верен для двуступенно нильпотентных $CT_{1,R}$-групп без кручения, аналог теоремы Мясникова — Харлампович неверен для групп этого класса.

Пусть $R = \mathbb{Q}$ и G — $\mathbb{Q}$-группа, заданная представлением

$$G = \langle x, y, z, t \mid [x, y] = [z, t] = 1,\ [x, z] = [y, t] \rangle_{\mathfrak{N}_{2,\mathbb{Q}}}.$$

Следующие свойства группы G проверяются рутинным способом.

1. $Z(G) = G'$ — векторное пространство размерности 3 над $\mathbb{Q}$ с базой $[x, z], [x, t], [y, z]$.

2. $C_G(x)$, $C_G(z)$ — векторные пространства размерности 5 над $\mathbb{Q}$, $C_G(x) \cap C_G(z) = Z(G)$.

3. Группа G $F_{\mathbb{Q}}(2)$-дискриминируется группой $F_{\mathbb{Q}}(2)$, поэтому есть неприводимая координатная группа для $F_{\mathbb{Q}}(2)$; здесь $F_{\mathbb{Q}}(2) = \langle x, z \rangle_{\mathbb{Q}}$ — свободная группа в $\mathfrak{N}_{2,\mathbb{Q}}$ ранга 2.

4. Группа G не изоморфна никакой подгруппе итерированного расширения централизаторов над $F_{\mathbb{Q}}(2)$, поэтому неверен аналог теоремы Мясникова — Харлампович в многообразии $\mathfrak{N}_{2,\mathbb{Q}}$.

Первые два свойства G доказываются непосредственными вычислениями. Проведем доказательство двух других свойств.

Свойство 3. Рассмотрим $R = \mathbb{Q}[t]$ — кольцо многочленов от t над $\mathbb{Q}$, и группу $UT_3(R)$. Так как кольцо $\mathbb{Q}[t]$ дискриминируется $\mathbb{Q}$, группа $UT_3(R)$ $F_{\mathbb{Q}}(2)$-дискриминируется группой $UT_3(\mathbb{Q}) \cong F_{\mathbb{Q}}(2)$ и, следовательно, любая ее $UT_3(\mathbb{Q})$-подгруппа также $F_{\mathbb{Q}}(2)$-дискриминируется группой $F_{\mathbb{Q}}(2)$. Нетрудно проверить, что группа G изоморфна подгруппе $UT_3(\mathbb{Q}[t])$, порожденной четырьмя матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при отображении $x \to A$, $y \to B$, $z \to C$, $t \to D$.

Свойство 4. В силу единственности расширения централизатора (предложение 3) если G есть подгруппа итерированного расширения централизаторов для группы $F_{\mathbb{Q}}(2)$, то существует цепочка из двух расширений $F_{\mathbb{Q}}(2)$ для элементов x и z и G изоморфна группе

$$H_0 = \langle F_{\mathbb{Q}}(2) \mid [x, s_1] = 1,\ [z, s_2] = 1 \rangle.$$

Но это не так, ибо $\dim_{\mathbb{Q}}(G') = 3$, а $\dim_{\mathbb{Q}}(H_0') = 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lyndon R.* Groups with parametric exponents // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 9, N 6. P. 518–533.

2. *Kharlampovich O., Myasnikov A.* Irreducible affine varieties over a free group. II. System in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups // J. Algebra. 1998. V. 200. P. 517–570.

3. *Myasnikov A., Remeslennikov V.* Exponential groups. II. Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups // Int. J. Algebra Comput. 1996. V. 6, N 6. P. 687–711.

4. *Remeslennikov V.* ∃-Free groups and groups with length function // Int. conf. on algebra dedicated to the memory of A. I. Shirshov, Barnaul, 20–25 Aug. 1991. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 369–376. (Contemp. Math.; V. 184).

5. *Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V.* Unification theorems in algebraic geometry // Algebra Discr. Math. 2008. V. 1. P. 80–111.

6. *Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. 1999. V. 219, N 1. P. 16–79.

7. *Myasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations // J. Algebra. 2000. V. 234, N 1. P. 225–276.

8. *Даниярова Э., Мясников А., Ремесленников В.* Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 1. С. 65–106.

9. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика: Сб. переводов. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.

10. *Мищенко А. А., Трейер А. В.* Структура централизаторов для частично коммутативной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группы // Вестн. Омского ун-та. Спец. выпуск. 2007. С. 98–102.

Статья поступила 29 октября 2012 г.

Амаглобели Михаил Георгиевич
Тбилисский гос. университет им. Ив. Джавахишвили,
пр. Чавчавадзе, 1, Тбилиси 0128, Грузия.
`mikheil.amaglobeli@tsu.ge`

Ремесленников Владимир Никанорович
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
`remesl@ofim.oscsbras.ru`