Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 514.764.214

О КЛАССИФИКАЦИИ АЛГЕБР ГОЛОНОМИИ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. С. Галаев

Аннотация. Проблема классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий может быть сведена к проблеме классификации неприводимых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, которые линейно порождаются образами линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathfrak{h}$, удовлетворяющих тождеству, аналогичному тождеству Бьянки. Т. Лайстнер классифицировал все такие подалгебры, и оказалось, что полученный список совпадает со списком неприводимых алгебр голономии римановых многообразий. Возникает естественная проблема получить простое прямое доказательство этого факта. Здесь дано такое доказательство для случая полупростых алгебр Ли $\mathfrak{h}$, не являющихся простыми.

Ключевые слова: алгебра голономии, лоренцево многообразие, алгебра Берже, слабая алгебра Берже, продолжение Танака.

1. Введение

Берже [1, 2] классифицировал возможные связные неприводимые группы голономии $H \subset \mathrm{SO}(n)$ римановых многообразий, не являющихся локально симметрическими. При этом он использовал теорию представлений. Оказалось, что эти группы действуют транзитивно на единичной сфере касательного пространства. Саймонс [3] получил прямое доказательство этого утверждения, а совсем недавно Олмос [4] предложил элегантное геометрическое доказательство.

Проблема классификации алгебр голономии (т. е. алгебр Ли групп голономии) лоренцевых многообразий может быть сведена к проблеме классификации неприводимых слабых подалгебр Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, т. е. подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, которые линейно порождаются образами отображений из пространства

$$\mathscr{P}(\mathfrak{h}) = \{P \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathfrak{h} \mid (P(X)Y, Z) + (P(Y)Z, X) + (P(Z)X, Y) = 0,\ X, Y, Z \in \mathbb{R}^n\}.$$

Легко видеть, что алгебра голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждого риманова многообразия является слабой алгеброй Берже. Обратное утверждение совершенно неочевидно, тем не менее оно имеет место, что доказал Лайстнер [5].

Если n четно и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ комплексного типа, т. е. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}\left(\frac{n}{2}\right)$, то можно показать, что $\mathscr{P}(\mathfrak{h}) \simeq (\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})^{(1)}$, где $(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})^{(1)}$ — первое продолжение подалгебры $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{gl}\left(\frac{n}{2}, \mathbb{C}\right)$ (сравни [5, 6]). Используя этот факт и классификацию неприводимых представлений с нетривиальными продолжениями, Лайстнер доказал, что каждая слабая алгебра Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}\left(\frac{n}{2}\right)$ является алгеброй голономии некоторого риманова многообразия.

Случай подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ вещественного типа является куда более сложным. В этом случае Лайстнер рассмотрел комплексифицированное представление $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, являющееся неприводимым. Используя классификацию неприводимых представлений комплексных полупростых алгебр Ли, он нашел критерий в терминах весов этих представлений того, что представление $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ является слабой алгеброй Берже. Далее Лайстнер рассмотрел случаи простых алгебр Ли $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$, а затем и полупростых алгебр (проблема сводится к случаю полупростых алгебр Ли вида $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}$, где алгебра $\mathfrak{k}$ простая, и снова различные возможности для $\mathfrak{k}$ были рассмотрены).

Рассматриваем случай полупростых неприводимых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, не являющихся простыми, с неприводимой комплексификацией $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$. Простым способом покажем, что достаточно рассматривать случай $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}$, где $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ — простая неприводимая подалгебра, а пространством представления является тензорное произведение $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2m}$. Также покажем, что в этом случае пространство $\mathscr{P}(\mathfrak{h})$ совпадает с $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{g}_1$, где $\mathfrak{g}_1$ — первое продолжение Танака неположительно градуированной алгебры Ли

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0,$$

$\mathfrak{g}_{-2} = \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}^{2m}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{2m}}$, а градуировка определяется элементом $-\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{2m}}$. Если $\mathscr{P}(\mathfrak{h})$ нетривиально, то $\mathfrak{g}_1$ изоморфно $\mathbb{C}^{2m}$, второе продолжение Танака $\mathfrak{g}_2$ изоморфно $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{g}_3 = 0$. Тогда полное продолжение Танака определяет простую $|2|$-градуированную комплексную алгебру Ли

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

Известно, что такая алгебра Ли определяет (с точностью до двойственности) односвязное кватернионно-кэлерово симметрическое риманово пространство, алгебра голономии этого пространства совпадает с $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Таким образом, если подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ полупростая и не является простой и $\mathscr{P}(\mathfrak{h}) \neq 0$, то мы предъявляем риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$.

Другие результаты об алгебрах голономии лоренцевых многообразий можно найти в [7, 8].

2. Алгебры голономии римановых многообразий

Неприводимые алгебры голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ римановых многообразий, не являющихся локально симметрическими, исчерпываются алгебрами $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}\left(\frac{n}{2}\right)$, $\mathfrak{su}\left(\frac{n}{2}\right)$, $\mathfrak{sp}\left(\frac{n}{4}\right) \oplus \mathfrak{sp}(1)$, $\mathfrak{sp}\left(\frac{n}{4}\right)$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$ и $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$. Этот список получил Берже [1, 2] (изначальный список был не вполне точным). Он классифицировал неприводимые подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, линейно порожденные образами отображений из пространства

$$\mathscr{R}(\mathfrak{h}) = \{R \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathfrak{h} \mid R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,\ X, Y, Z \in \mathbb{R}^n\}$$

алгебраических тензоров кривизны типа $\mathfrak{h}$ при условии, что пространство

$$\mathscr{R}^{\nabla}(\mathfrak{h}) = \{S \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathscr{R}(\mathfrak{h}) \mid S_X(Y,Z) + S_Y(Z,X) + S_Z(X,Y) = 0,\ X, Y, Z \in \mathbb{R}^n\}$$

алгебраических ковариантных производных тензоров кривизны типа $\mathfrak{h}$ нетривиально. Берже использовал классификацию неприводимых представлений компактных групп Ли. Список связных подгрупп Ли группы Ли $\mathrm{SO}(n)$, соответствующих приведенным выше подалгебрам алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$, лишь незначительно отличается от списка групп Ли, действующих транзитивно на единичной сфере размерности $n-1$, и результат Берже можно переформулировать следующим образом: если неприводимая группа голономии риманова многообразия (M,g) не действует транзитивно на единичной сфере касательного пространства, то многообразие (M,g) локально симметрическое. Прямое алгебраическое доказательство этого результата предложил Саймонс [3], а совсем недавно Олмос [4] получил элегантное геометрическое доказательство.

Пространства $\mathscr{R}(\mathfrak{h})$ для неприводимых алгебр голономии римановых многообразий $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ вычислил Д. В. Алексеевский [9]. Для $R\in\mathscr{R}(\mathfrak{h})$ определим соответствующий тензор Риччи, полагая

$$\operatorname{Ric}(R)(X,Y)=\operatorname{tr}(Z\mapsto R(Z,X)Y),$$

$X,Y\in\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathscr{R}(\mathfrak{h})$ допускает следующее разложение в прямую сумму $\mathfrak{h}$-модулей:

$$\mathscr{R}(\mathfrak{h})=\mathscr{R}_0(\mathfrak{h})\oplus\mathscr{R}_1(\mathfrak{h})\oplus\mathscr{R}'(\mathfrak{h}),$$

где $\mathscr{R}_0(\mathfrak{h})$ состоит из тензоров кривизны с нулевым тензором Риччи, $\mathscr{R}_1(\mathfrak{h})$ состоит из тензоров, обнуляемых алгеброй Ли $\mathfrak{h}$ (это пространство тривиально или одномерно), а $\mathscr{R}'(\mathfrak{h})$ — дополнение к этим двум пространствам. Если $\mathscr{R}(\mathfrak{h})=\mathscr{R}_1(\mathfrak{h})$, то каждое риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ локально симметрическое. Такие подалгебры $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ называются *симметрическими алгебрами Берже*. Алгебры голономии неприводимых римановых симметрических пространств исчерпываются алгебрами $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}\left(\frac{n}{2}\right)$, $\mathfrak{sp}\left(\frac{n}{4}\right)\oplus\mathfrak{sp}(1)$ и симметрическими алгебрами Берже $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$.

Известно, что имеет место взаимно однозначное соответствие между односвязными неразложимыми симметрическими римановыми многообразиями (M,g) и простыми $\mathbb{Z}_2$-градуированными алгебрами Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{R}^n$ такими, что $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$. Подалгебра $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ совпадает с алгеброй голономии многообразия (M,g). Пространство (M,g) можно восстановить, используя его алгебру голономии $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ и значения $R\in\mathscr{R}(\mathfrak{h})$ тензора кривизны пространства (M,g) в некоторой точке. Для этого определим структуру алгебры Ли на векторном пространстве $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$[A,B]=[A,B]_{\mathfrak{h}},\quad [A,X]=AX,\quad [X,Y]=R(X,Y),\quad A,B\in\mathfrak{h},\ X,Y\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда $M=G/H$, где G — односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а $H\subset G$ — связная подгруппа Ли, соответствующая подалгебре $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$.

Если симметрическое пространство является кватернионно-кэлеровым, то $\mathfrak{h}=\mathfrak{sp}(1)\oplus\mathfrak{f}\subset\mathfrak{so}(4k)$, где $n=4k$ и $\mathfrak{f}\subset\mathfrak{sp}(k)$. Комплексификация алгебры $\mathfrak{h}\oplus\mathbb{R}^{4k}$ совпадает с $(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{k})\oplus(\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{2k})$, где $\mathfrak{k}=\mathfrak{f}\otimes\mathbb{C}\subset\mathfrak{sp}(2k,\mathbb{C})$. Пусть e_1,e_2 — стандартный базис пространства $\mathbb{C}^2$, и пусть

$$F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

— базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Получаем следующую $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры Ли $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$:

$$\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}=\mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2=\mathbb{C}F\oplus e_2\otimes\mathbb{C}^{2k}\oplus(\mathfrak{k}\oplus\mathbb{C}H)\oplus e_1\otimes\mathbb{C}^{2k}\oplus\mathbb{C}E.$$

Обратно, каждая такая простая $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли определяет с точностью до двойственности односвязное кватернионно-кэлерово симметрическое пространство.

3. Слабые тензоры кривизны

Пространства $\mathscr{P}(\mathfrak{h})$ вычислены в [6]. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводимая подалгебра. Существует разложение

$$\mathscr{P}(\mathfrak{h}) = \mathscr{P}_0(\mathfrak{h}) \oplus \mathscr{P}_1(\mathfrak{h}),$$

где $\mathscr{P}_0(\mathfrak{h})$ — ядро $\mathfrak{h}$-эквивариантного отображения

$$\widetilde{\mathrm{Ric}} : \mathscr{P}(\mathfrak{h}) \to \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{\mathrm{Ric}}(P) = \sum_{i=1}^n P(e_i)e_i$$

($e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$), а $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h})$ — ортогональное дополнение пространства $\mathscr{P}_0(\mathfrak{h})$ в $\mathscr{P}(\mathfrak{h})$. Пространство $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h})$ либо тривиально, либо изоморфно $\mathbb{R}^n$. Если $n \geq 4$, то $\mathscr{P}_0(\mathfrak{h}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{R}_0(\mathfrak{h}) \neq 0$. Далее, $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{R}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}$. Для симметрических алгебр Берже $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}^n$ и $\mathscr{P}_0(\mathfrak{h}) = 0$.

4. Продолжения Танака

Рассмотрим $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру Ли вида

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0.$$

Для $k \geq 1$ с помощью индукции определяется k-е продолжение Танака:

$$\mathfrak{g}_k = \{u \in (\mathfrak{g}_{-2}^* \otimes \mathfrak{g}_{k-2}) \oplus (\mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{k-1}) \mid u([X,Y]) = [u(X),Y] + [X,u(Y)],\\ X,Y \in \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}\}.$$

Пусть $k \geq 1$ и $l \geq 0$. Для $u \in \mathfrak{g}_k$ и $v \in \mathfrak{g}_l$ определим скобку Ли $[u,v] \in \mathfrak{g}_{k+l}$ условием

$$[u,v]X = [[u,X],v] + [u,[v,X]], \quad X \in \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1};$$

скобка Ли элементов $u \in \mathfrak{g}_k$ и $X \in \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ определена равенством $[u,X] = Xu$. Тем самым получаем структуру алгебры Ли на векторном пространстве $\bigoplus_{k=-2}^{\infty} \mathfrak{g}_k$.

Для $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$, $m \geq 2$, рассмотрим подалгебру

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{g}_{-2} = \mathbb{C}F, \quad \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}^{2m}, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{C}H$$

с ненулевыми скобками Ли

$$[X,Y] = \Omega(X,Y)F, \quad [A,X] = AX, \quad [A,B] = [A,B]_{\mathfrak{k}},$$
$$[H,X] = -X, \quad [H,F] = -2F,$$

где $X, Y \in \mathbb{C}^{2m}$, $A, B \in \mathfrak{k}$, а Ω — симплектическая форма на $\mathbb{C}^{2m}$.

Лемма 1. *Имеем*

$$\mathfrak{g}_1 = \{\varphi \in \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_0 \mid \exists A \in \mathfrak{g}_{-1} : \varphi(X)Y - \varphi(Y)X = \Omega(X,Y)A,\ X,Y \in \mathfrak{g}_{-1}\}.$$

Если $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ — собственная неприводимая подалгебра и $\mathfrak{g}_1 \neq 0$, то $\mathfrak{g}_1 \simeq \mathbb{C}^{2m}$, $\mathfrak{g}_2 \simeq \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_3 = 0$, а алгебра Ли $\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ простая.

Доказательство. Пусть $u = \psi + \varphi$, где $\psi \in \mathfrak{g}_{-2}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}$, и $\varphi \in \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_0$. Условие $u \in \mathfrak{g}_1$ равносильно уравнениям

$$[\varphi(X),F] = \Omega(\psi(F),Y)F, \quad \varphi(X)Y - \varphi(Y)X = \Omega(X,Y)\psi(F).$$

Первое утверждение леммы состоит в том, что второе уравнение влечет первое.

Будем обозначать $\mathbb{C}^{2m}$ через V. Предположим сначала, что $\mathfrak{k} = \mathfrak{sp}(V)$. Найдем $\mathfrak{g}_1$. Имеем следующие изоморфизмы $\mathfrak{sp}(V)$-модулей: $\mathfrak{g}^*_{-2} \otimes \mathfrak{g}_{-1} \simeq V$ и

$$\mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0 \simeq V \otimes (\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathbb{C}) = V \oplus (V \oplus V_{3\pi_1} \oplus V_{\pi_1+\pi_2}),$$

где V_Λ обозначает неприводимый $\mathfrak{sp}(V)$-модуль со старшим весом Λ. По определению пересечение $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0$ совпадает с

$$(\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathbb{C}H)^{(1)} = (\mathfrak{sp}(V))^{(1)} = \odot^3 V \simeq V_{3\pi_1}.$$

Ясно, что пересечение $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}^*_{-2} \otimes \mathfrak{g}_{-1}$ тривиально. Следовательно, если $\mathfrak{g}_1$ отлично от $\mathfrak{sp}(V)^{(1)}$, то $\mathfrak{g}_1$ содержит подмодуль, изоморфный V. Всякое $\mathfrak{sp}(V)$-эквивариантное отображение из V в $(\mathfrak{g}^*_{-2} \otimes \mathfrak{g}_{-1}) \oplus (\mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0)$ имеет вид

$$Z \mapsto \psi^Z + \varphi^Z, \quad \psi^Z(F) = aZ, \quad \varphi^Z(Y) = b\Omega(Z,Y)H + cZ \odot Y,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, а элемент $Z \odot Y \in \mathfrak{sp}(V)$ определен равенством

$$(Z \odot Y)X = \Omega(Z,X)Y + \Omega(Y,X)Z.$$

Второе уравнение для $\mathfrak{g}_1$ принимает вид

$$-b\Omega(Z,X)Y + b\Omega(Z,Y)X + c(\Omega(Y,Z)X - \Omega(X,Z)Y + 2\Omega(Y,X)Z) = a\Omega(X,Y)Z.$$

Это уравнение должно выполняться для всех $X, Y, Z \in V$, и оно эквивалентно равенствам $b = -c = -\frac{1}{2}a$ (так как $\dim V \geq 4$). Второе уравнение для $\mathfrak{g}_1$ имеет вид

$$-2b\Omega(Z,Y) = a\Omega(Z,Y)$$

и следует из первого. Таким образом, ортогональное дополнение к $(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}))^{(1)}$ в $\mathfrak{g}_1$ изоморфно V, и изоморфизм имеет вид

$$Z \in V \mapsto \psi^Z + \varphi^Z, \quad \psi^Z(F) = 2Z, \quad \varphi^Z(Y) = -\Omega(Z,Y)H + Z \odot Y, \quad Y \in V.$$

Пусть $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{sp}(V)$ — собственная неприводимая подалгебра. Ясно, что

$$\mathfrak{g}_1 = ((\mathfrak{g}^*_{-2} \otimes \mathfrak{g}_{-1}) \oplus (\mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0)) \cap (\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathbb{C}H)_1$$

и $\mathfrak{h}^{(1)} = (\mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0) \cap \mathfrak{sp}(V)^{(1)}$. Известно, что $\mathfrak{h}^{(1)} = 0$. Следовательно, если $\mathfrak{g}_1 \neq 0$, то $\mathfrak{g}_1$ изоморфно V и диагонально вложено в $V \oplus \mathfrak{sp}(V)^{(1)}$.

Рассмотрим полное продолжение Танака $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i=-2}^{\infty} \mathfrak{g}_i$. Пусть $\mathfrak{g}^0 = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$. Утверждаем, что $\mathfrak{g}$ — примитивная $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли, т. е. $\mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{g}$ — максимальная градуированная подалгебра, и $\mathfrak{g}^0$ не содержит никаких градуированных идеалов в $\mathfrak{g}$, кроме $\{0\}$. В самом деле, предположим, что существует подалгебра $\tilde{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g}^0 \subsetneq \tilde{\mathfrak{g}}$. Тогда $aF + X \in \tilde{\mathfrak{g}}$ для некоторых $a \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$. Если $a \neq 0$, то, рассматривая $u \in \mathfrak{g}_1$, получим $0 \neq u(F) \in \tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}_{-1}$, т. е. можно предполагать, что существует ненулевой $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ такой, что $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Так как $\mathfrak{g}_0$ действует на $\mathfrak{g}_{-1}$ неприводимо, имеем $\mathfrak{g}_{-1} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$. Окончательно $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] = \mathfrak{g}_{-2}$, т. е. $\mathfrak{g}_{-2} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ и $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$. Предположим, что $\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathfrak{g}}_i \subset \mathfrak{g}^0$ — градуированный идеал. Для $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ и $\xi \in \tilde{\mathfrak{g}}_0$ имеем $[\xi, X] \in \mathfrak{g}_{-1}$. С другой стороны, $[\xi, X] \in \tilde{\mathfrak{g}}$, и получаем $[\xi, X] = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}_{-1}$. Это влечет $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = 0$. Таким же образом можно показать, что $\tilde{\mathfrak{g}}_k = 0$ для всех $k \geq 2$. Итак,

$\mathfrak{g}$ — примитивная $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли. Если $\mathfrak{g}$ бесконечномерна, то из теоремы 6.1 в [10] следует, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(V) \oplus \mathbb{C}H$, это дает противоречие, поскольку предполагали, что $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{sp}(V)$ — собственная подалгебра. Таким образом, $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли. Так как элемент $H \in \mathfrak{g}_0$ определяет $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры Ли $\mathfrak{g}$, каждый идеал $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ градуированный. Как в утверждении выше, можно показать, что либо $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}$, либо $\mathfrak{t} = 0$, т. е. $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Форма Киллинга $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры Ли обладает свойством $b(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l) = 0$ для $k \neq -l$. Это показывает, что $\mathfrak{g}_2 \simeq \mathbb{C}$ и $\mathfrak{g}_3 = 0$. Лемма доказана.

5. Полупростые слабые алгебры Берже, не являющиеся простыми

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — полупростая неприводимая подалгебра вещественного типа, не являющаяся простой. Если $\mathscr{P}(\mathfrak{h}) \neq 0$, то $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ является алгеброй голономии симметрического риманова пространства.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что комплексификация $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ неприводима. Так как алгебра Ли $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ полупростая и не является простой, то она может быть разложена в прямую сумму двух своих идеалов, $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. Представление $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ должно иметь форму тензорного произведения $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2}$, где $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{gl}(n_1, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{gl}(n_2, \mathbb{C})$ — неприводимые подалгебры. Так как $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, либо $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{so}(n_1, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(n_2, \mathbb{C})$, $n_1, n_2 \geq 3$, либо $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{sp}(n_1, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{sp}(n_2, \mathbb{C})$, $n_1, n_2 \geq 2$. В [6] доказано простым способом, что $\mathscr{P}(\mathfrak{so}(n_1, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(n_2, \mathbb{C})) \simeq \mathbb{C}^n$, и если $n_1, n_2 \geq 3$, то $\mathscr{P}(\mathfrak{sp}(n_1, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(n_2, \mathbb{C})) \simeq \mathbb{C}^n$. Это показывает, что для собственных неприводимых подалгебр $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ алгебр Ли $\mathfrak{so}(n_1, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(n_2, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{sp}(n_1, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(n_2, \mathbb{C})$ с $n_1, n_2 \geq 3$ имеем $\mathscr{P}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2) = 0$. Заметим, что алгебры голономии симметрических римановых пространств

$$\mathrm{SO}(n_1 + n_2)/(\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{SO}(n_2)), \quad n_1, n_2 \geq 3,$$

$$\mathrm{Sp}(n_1 + n_2)/(\mathrm{Sp}(n_1) \times \mathrm{Sp}(n_2)), \quad n_1, n_2 \geq 1,$$

равны соответственно $\mathfrak{so}(n_1) \oplus \mathfrak{so}(n_2)$ и $\mathfrak{sp}(n_1) \oplus \mathfrak{sp}(n_2)$ [2].

Остается рассмотреть случай $n_1 = 2$, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h}_2 \subsetneq \mathfrak{sp}(n_2, \mathbb{C})$. Пусть $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}_2$. Из предложения 1 (см. ниже), леммы 1 и п. 2 следует, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{f} \subset \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(k) \subset \mathfrak{so}(4k)$ — алгебра голономии некоторого кватернионно-кэлерова симметрического пространства. Этим доказательство теоремы будет закончено.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ — неприводимая подалгебра, $m \geq 2$. Тогда*

$$\mathscr{P}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}) \simeq \mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{g}_1,$$

где $\mathfrak{g}_1$ — первое продолжение Танака алгебры Ли $\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}F \oplus \mathbb{C}^{2m} \oplus (\mathfrak{k} \oplus \mathbb{C}H)$.

Доказательство. Пусть $V = \mathbb{C}^{2m}$, а Ω, ω — симплектические формы на V и $\mathbb{C}^2$. Пусть e_1, e_2 — базис пространства $\mathbb{C}^2$ такой, что $\omega(e_1, e_2) = 1$. Пусть F, H, E — базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, как выше. Для линейного отображения

$$P : \mathbb{C}^2 \otimes V \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}$$

и $X \in V$ будем писать

$$P(e_i \otimes X) = \alpha(e_i \otimes X)E + \beta(e_i \otimes X)F + \gamma(e_i \otimes X)H + T(e_i \otimes X), \quad T(e_i \otimes X) \in \mathfrak{k},$$

где $i = 1, 2$. Рассмотрим условие $P \in \mathscr{P}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k})$. Пусть $X, Y, Z \in V$. Рассматривая векторы $e_1 \otimes X$, $e_1 \otimes Y$, $e_1 \otimes Z$, получим

$$\beta(e_1 \otimes X)\Omega(Y,Z) + \beta(e_1 \otimes Y)\Omega(Z,X) + \beta(e_1 \otimes Z)\Omega(X,Y) = 0.$$

Так как $\dim V \geq 4$, это влечет $\beta(e_1 \otimes X) = 0$ для всех $X \in V$. Аналогично, рассматривая векторы $e_2 \otimes X$, $e_2 \otimes Y$, $e_2 \otimes Z$, получим $\alpha(e_2 \otimes X) = 0$.

Взяв векторы $e_1 \otimes X$, $e_1 \otimes Y$, $e_2 \otimes Z$, установим

$$\gamma(e_1 \otimes X)\Omega(Y,Z) + \Omega(T(e_1 \otimes X)Y, Z) - \gamma(e_1 \otimes Y)\Omega(X,Z) - \Omega(T(e_1 \otimes Y)X, Z) \\ - \beta(e_2 \otimes Z)\Omega(Y,X) = 0.$$

Пусть $A \in V$ — двойственный вектор к $\beta|_{e_2 \otimes V}$, т. е. $\beta(e_2 \otimes Z) = \Omega(A,Z)$ для всех $Z \in V$. Тогда

$$\gamma(e_1 \otimes X)Y + T(e_1 \otimes X)Y - \gamma(e_1 \otimes Y)X - T(e_1 \otimes Y)X + \Omega(X,Y)A = 0.$$

Последнее уравнение на P может быть получено тем же путем, и оно имеет вид

$$\gamma(e_2 \otimes X)Y - T(e_2 \otimes X)Y - \gamma(e_2 \otimes Y)X + T(e_2 \otimes Y)X + \Omega(X,Y)B = 0,$$

где вектор $B \in V$ определен равенством $\beta(e_1 \otimes Z) = \Omega(B,Z)$, $Z \in V$. Итак, $P \in \mathscr{P}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k})$ тогда и только тогда, когда отображения

$$\gamma(e_1 \otimes \cdot)H + T(e_1 \otimes \cdot), \quad \gamma(e_2 \otimes \cdot)H - T(e_2 \otimes \cdot) : V \to \mathfrak{k} \oplus \mathbb{C}H$$

принадлежат $\mathfrak{g}_1$. Таким образом,

$$\mathscr{P}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}) \simeq \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{g}_1,$$

что представляет собой изоморфизм $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}$-модулей.

6. Замечания

Остается открытой проблема получения прямого доказательства следующего факта: если для вещественного неприводимого представления $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ простой алгебры Ли $\mathfrak{h}$ имеем $\mathscr{P}(\mathfrak{h}) \neq 0$, то $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии некоторого риманова многообразия. Следует рассмотреть два случая: $\mathscr{P}_0(\mathfrak{h}) \neq 0$ и $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$. Необходимо доказать: первое условие влечет, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии некоторого риманова многообразия, не являющегося локально симметрическим; второе условие влечет, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии некоторого симметрического риманова многообразия. Было бы полезным получить прямое доказательство следующего утверждения: *если связная подгруппа Ли $H \subset SO(n)$, соответствующая неприводимой подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, не действует транзитивно на единичной сфере, то $\mathscr{P}_0(\mathfrak{h}) = 0$.*

Пространства $\mathscr{P}(\mathfrak{h})$ и $\mathscr{R}(\mathfrak{h})$ связаны соотношением

$$\mathscr{R}(\mathfrak{h}) = \{S \in \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathscr{P}(\mathfrak{h}) \mid S(X)(Y) = -S(Y)(X)\}.$$

Рассмотрим естественное отображение

$$\tau : \mathbb{R}^n \otimes \mathscr{R}(\mathfrak{h}) \to \mathscr{P}(\mathfrak{h}), \quad \tau(X \otimes R) = R(X, \cdot) \in \mathscr{P}(\mathfrak{h}).$$

В силу результатов из [5] в [6] показано, что

$$\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathscr{R}_0(\mathfrak{h})) = \mathscr{P}_0(\mathfrak{h}) \text{ (если } n \geq 4), \quad \tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathscr{R}_1(\mathfrak{h})) = \mathscr{P}_1(\mathfrak{h}).$$

Хотелось бы получить прямое доказательство этих утверждений для произвольной неприводимой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$.

Предположим, что $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$, т. е. $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}^n$. Тогда существует $\mathfrak{h}$-эквивариантный линейный изоморфизм $S : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}_1(\mathfrak{h})$, определенный с точностью до постоянного множителя. Следует доказать, что $S(X)(Y) = -S(Y)(X)$, т. е. $S \in \mathscr{R}_1(\mathfrak{h})$.

Пространство $\mathscr{P}(\mathfrak{h})$ содержится в тензорном произведении $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$. Результаты из [6] показывают, что разложение $\mathfrak{h}$-модуля $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$ в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{h}$-модулей имеет вид

$$\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h} = k\mathbb{R}^n \oplus \Big(\bigoplus_\lambda V_\lambda \Big),$$

где k — количество ненулевых отметок на схеме Дынкина, задающей представление алгебры Ли $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, а V_λ — попарно не изоморфные неприводимые $\mathfrak{h}$-модули, которые не изоморфны $\mathbb{R}^n$. Если $\mathscr{P}_0(\mathfrak{h}) \neq 0$, то это пространство совпадает со старшей неприводимой компонентой в $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$.

Пространство $\mathscr{R}(\mathfrak{h})$ содержится в $\odot^2\mathfrak{h}$ [9]. Если $\mathscr{R}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$, то это пространство натянуто на отображение $\mathrm{id}_\mathfrak{h} \in \odot^2\mathfrak{h} \subset \wedge^2\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$. Заметим, что $\mathrm{id}_\mathfrak{h}(X,Y) = \mathrm{pr}_\mathfrak{h}(X \wedge Y)$. Следовательно, если $\mathscr{R}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$, то

$$\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) = \tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_\mathfrak{h}) = \{\mathrm{pr}_\mathfrak{h}(X \wedge \cdot) \mid X \in \mathbb{R}^n\}.$$

Но совершенно неясно, почему если $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$, то это пространство должно совпадать с $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_\mathfrak{h})$ (это утверждение влекло бы $\mathscr{R}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}$).

Прямая проверка показывает справедливость следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть $S : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathfrak{h})$ — линейное отображение. Рассмотрим отображение*

$$T : \wedge^2\mathbb{R}^n \to \mathfrak{h}, \quad T(X,Y) = S(X)(Y) - S(Y)(X).$$

Тогда $T + T^* \in \mathscr{R}(\mathfrak{so}(n))$, где $T^* : \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{so}(n)$ определено равенством

$$(T^*(X,Y)Z, W) = (T(Z,W)X, Y).$$

Мы можем доказать, что условие $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$ влечет $\mathscr{R}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$ только при дополнительном условии на $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводимое представление вещественного типа простой алгебры Ли $\mathfrak{h}$ такой, что $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$. Если неприводимое представление $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ задано схемой Дынкина с одной или двумя ненулевыми отметками, то $\mathscr{R}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$, т. е. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии некоторого симметрического риманова пространства.*

Доказательство. Если ненулевая отметка только одна, то кратность модуля $\mathbb{R}^n$ в тензорном произведении $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$ — единица, а именно подмодуль в $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$, изоморфный $\mathbb{R}^n$, совпадает с $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_\mathfrak{h})$, откуда следует утверждение предложения.

Предположим, что ненулевых отметок две. Тогда кратность модуля $\mathbb{R}^n$ в тензорном произведении $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$ два. Один из подмодулей, изоморфных $\mathbb{R}^n$, совпадает с $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_\mathfrak{h})$. Ортогональное дополнение к $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_\mathfrak{h})$ в $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$ представляет собой подпространство $(\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h})_0 \subset \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$, состоящее из линейных отображений $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{h}$ с $\widetilde{\mathrm{Ric}}(\varphi) = 0$ [6]. Это пространство содержит однозначно определенный подмодуль, изоморфный $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что проекция $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h})$

на $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}})$ ненулевая. Ясно, что подпространство $W \subset \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$ элементов, обнуляемых алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, двумерное; оно содержит подпространство $\mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}} \subset \odot^2\mathfrak{h} \subset \wedge^2\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$. Так как $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}^n$, существует $\mathfrak{h}$-эквивариантный изоморфизм $S : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}_1(\mathfrak{h})$, $S \in W$. Если $W \subset \wedge^2\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$, то $S \in \mathscr{R}_1(\mathfrak{h})$. В противном случае $W = \mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{R}\psi$, где $\psi \in \odot^2\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$. Поскольку $\mathscr{P}_1(\mathfrak{h}) \not\subset (\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h})_0$, то $S \notin \mathbb{R}\psi$. Отображение $T \in \wedge^2\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$, определенное в лемме, принадлежит W, следовательно, $T = c\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$ для некоторого ненулевого $c \in \mathbb{R}$. Далее, $\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}^* = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$, и лемма влечет $\mathrm{id}_{\mathfrak{h}} \in \mathscr{R}_1(\mathfrak{h})$, т. е. $\mathscr{R}_1(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$. Это доказывает предложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berger M.* Sur les groupers d'holonomie des variétés àconnexion affine et des variétés riemanniennes // Bull. Soc. Math. France. 1955. V. 83. P. 279–330.
2. *Бессе А. Л.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т. 2.
3. *Simens J.* On the transitivity of holonomy systems // Ann. Math. 1962. V. 76, N 2. P. 213–234.
4. *Olmos C.* A geometric proof of the Berger holonomy theorem // Ann. Math. (2). 2005. V. 161, N 1. P. 579–588.
5. *Leistner Th.* On the classification of Lorentzian holonomy groups // J. Differ. Geom. 2007. V. 76, N 3. P. 423–484.
6. *Galaev A. S.* One component of the curvature tensor of a Lorentzian manifold // J. Geom. Phys. 2010. V. 60. P. 962–971.
7. *Galaev A. S.* Metrics that realize all Lorentzian holonomy algebras // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2006. V. 3, N 5–6. P. 1025–1045.
8. *Galaev A. S., Leistner Th.* Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications // Recent developments in pseudo-Riemannian geometry. Zürich: Eur. Math. Soc., 2008. P. 53–96. (ESI Lect. Math. Phys.).
9. *Алексеевский Д. В.* Римановы пространства с необычными группами голономии // Функцион. анализ и его прил. 1968. Т. 2, № 2. С. 1–10.
10. *Guillemin V.* Infinite dimensional primitive Lie algebras // J. Differ. Geom. 1970. V. 4, N 3. P. 257–282.

Статья поступила 18 февраля 2013 г.

Галаев Антон Сергеевич
Университет Градец-Кралове, факультет естественных наук,
ул. Яна Козины, Градец-Кралове 1237, Чехия
galaevas@gmail.com