Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 512.5

КОММУТАТОРНАЯ ШИРИНА ЭЛЕМЕНТОВ СПЛЕТЕНИЯ СВОБОДНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е. И. Тимошенко

Аннотация. Представлен алгоритм, вычисляющий коммутаторную ширину произвольного элемента из коммутанта дискретного сцепления свободных абелевых групп.

Ключевые слова: коммутаторная ширина, абелева группа, дискретное сплетение, алгоритм.

Рассмотрим свободную группу F счетного ранга с базисом $\{x, y, \dots\}$. Для произвольной группы G и произвольного элемента $w(x, y, \dots, z) \in F$ обозначим через $w[G]$ множество значений элемента w на группе G:

$$w[G] = \{w(g_1, \dots, g_n) \mid g_1, g_2, \dots, g_n \in G\}.$$

Подгруппа $w(G)$, порожденная множеством $w[G]$, называется *вербальной подгруппой* группы G. *w-Ширина* элемента $g \in w(G)$ определяется как наименьшее натуральное число $l = l_w(g)$ такое, что g можно записать в виде произведения l элементов из $w[G]$ или их обратных. $[x, y]$-Ширина элемента g из коммутанта $[G, G]$ группы G называется *коммутаторной шириной*. Если множество $\{l_w(g) \mid g \in w[G]\}$ ограничено, то его наибольший элемент называется *w-шириной* группы G или *шириной вербальной подгруппы* $w(G)$. Если множество $\{l_w(g) \mid g \in w[G]\}$ не ограничено, то w-ширину группы полагают равной бесконечности.

Перечислим несколько известных фактов о ширине групп.

Каждая конечно порожденная группа G, содержащая подгруппу H конечного индекса, являющуюся расширением абелевой группы с помощью нильпотентной, имеет конечную ширину относительно любого слова w [1].

Пусть группа G содержит абелеву нормальную подгруппу A такую, что группа G/A удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп. Тогда каждая конечно порожденная группа G с этим условием имеет конечную коммутаторную ширину. Следовательно, любая конечно порожденная разрешимая группа ступени разрешимости не более 3 имеет конечную коммутаторную ширину [2].

Ширина всякой вербальной подгруппы полициклической группы конечна [3].

Отметим, что вопрос 4.34 М. И. Каргаполова из «Коуровской тетради» [4] о конечности ширины коммутанта конечно порожденной разрешимой группы до сих пор открыт.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00084) и Министерства образования и науки РФ (соглашение № 14.B37.21.0359).

Недавно была положительно решена известная проблема Оре, поставленная в 1951 г. [5], а именно в [6] установлено, что коммутаторная ширина каждого элемента неабелевой простой конечной группы равна 1.

Интересные вопросы, связанные с w-шириной групп, и более подробный список литературы можно найти в [7, 8].

Цель заметки — указать алгоритм, позволяющий вычислять коммутаторную ширину каждого элемента из коммутанта дискретного сплетения свободных абелевых групп.

Заметим, что коммутаторная ширина дискретного сплетения свободных абелевых групп A и B рангов n и m соответственно вычислена в [9]. Она равна целой части числа $(m+1)/2$ и не зависит от n.

Напомним определение дискретного сплетения групп. Пусть A, B — группы. Обозначим через $\mathrm{fun}(B, A)$ прямое произведение изоморфных копий группы A, индексированных элементами группы B. Таким образом, $\mathrm{fun}(B, A)$ — это группа функций $B \to A$ с обычным умножением и конечными носителями. Для $f \in \mathrm{fun}(B, A)$, $b \in B$, определим функцию f^b, полагая $f^b(x) = f(bx)$ для $x \in B$.

Непосредственно проверяется, что отображение $\hat{b} : \mathrm{fun}(B, A) \to \mathrm{fun}(B, A)$, сопоставляющее элементу f элемент f^b, является автоморфизмом группы $\mathrm{fun}(B, A)$, а отображение $B \to \mathrm{Aut}(\mathrm{fun}(B, A))$, сопоставляющее каждому элементу b из B автоморфизм $\hat{b}$, является при $A \neq 1$ изоморфным вложением. Группу B отождествим с ее образом.

Расширение группы $\mathrm{fun}(B, A)$ посредством группы B называется *дискретным сплетением* группы A с группой B и обозначается через $A \wr B$.

Таким образом, $A \wr B \cong \mathrm{fun}(B, A) \leftthreetimes B$, причем $bfb^{-1} = f^b$, $b \in B$, $f \in \mathrm{fun}(B, A)$.

Пусть G — некоторая группа, T — свободный правый $\mathbb{Z}G$-модуль с базой $\{t_1, \dots, t_r\}$. Обозначим через $\mathbf{M}_r(G)$ группу матриц

$$\begin{pmatrix} G & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \mid g \in G,\ t \in T \right\}.$$

Пусть F_r — свободная группа ранга r, R — нормальная подгруппа из F_r и A_r — свободная абелева группа ранга r. Известно, что дискретное сплетение $A_r \wr F_r/R$ изоморфно группе матриц $\mathbf{M}_r(F_r/R)$.

Группа матриц $\mathbf{M}_r(F_r/R)$ играет важную роль при изучении групп вида $F_r/[R, R]$, в частности свободных разрешимых групп. Группа $F_r/[R, R]$ вкладывается в группу матриц $\mathbf{M}_r(F_r/R)$. Это хорошо известное вложение Магнуса. Более подробные сведения о вложении Магнуса можно найти, например, в [10, 11].

Пусть G — некоторая группа, а $\varepsilon : G \longrightarrow 1$ — гомоморфизм тривиализации, отображающий группу G на единичную группу. Гомоморфизм ε продолжим по линейности до гомоморфизма $\bar{\varepsilon}$ колец $\mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}$. Ядро гомоморфизма $\bar{\varepsilon}$ называется *фундаментальным идеалом кольца* $\mathbb{Z}G$ и обозначается через Δ_G.

Каждый элемент γ, принадлежащий фундаментальному идеалу Δ_B свободной абелевой группы B ранга m, можно представить, вообще говоря, неоднозначно в виде

$$\gamma = \gamma_1(1 - b_1) + \dots + \gamma_p(1 - b_p), \tag{1}$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ — элементы из $\mathbb{Z}B$, а $b_1, \dots, b_p$ — некоторые элементы из B, p — натуральное число, не превосходящее ранга m группы B.

Пусть β_u, $1 \leq u \leq v$, — некоторые элементы из Δ_B. Запишем каждый из них в виде (1):

$$\beta_u = \beta_{1,u}(1 - b_1) + \dots + \beta_{p,u}(1 - b_p). \tag{2}$$

Число p назовем *длиной записи* (2) элементов β_u. Запись (2) элементов β_u наименьшей длины p назовем *короткой.*

Лемма 1. *Пусть* (2) — *короткая запись элементов* β_u, $1 \leq u \leq v$. *Тогда ранг подгруппы* $\overline{B}$, *порожденной элементами* $b_1, \dots, b_p$, *равен* p.

Доказательство. Предположим, что ранг группы $\overline{B}$ меньше p. Тогда в группе B можно выбрать базис $\{c_1, \dots, c_m\}$ так, что элементы $b_1, \dots, b_p$ записываются через некоторые q элементов этого базиса, причем $q < p$. Для любых целых чисел $l_1, \dots, l_q$ элемент $1 - c_1^{l_1} \dots c_q^{l_q}$ принадлежит идеалу, порожденному элементами $1 - c_1, \dots, 1 - c_q$. Следовательно, существует запись элементов β_u длины q. Противоречие доказывает лемму.

Запись (2) назовем *приведенной,* если выполнены следующие условия:

1) она является короткой;

2) система элементов $\{b_1, \dots, b_p\}$ примитивна, т. е. составляет часть некоторого базиса $\mathfrak{B}$ группы B.

Для любой подгруппы B_1 группы B обозначим через $\sqrt{B_1}$ ее *изолятор* в группе B. По определению $\sqrt{B_1}$ — наименьшая подгруппа, содержащая B_1, такая, что фактор-группа $B/\sqrt{B_1}$ не содержит элементов конечного порядка. Подгруппа $\sqrt{B_1}$ выделяется в B прямым множителем. Значит, любой ее базис можно дополнить до базиса группы B.

Подгруппа B_1 группы B называется *изолированной,* если $\sqrt{B_1} = B_1$.

Лемма 2. *Для любого конечного числа элементов* $\beta_u \in \Delta_B$, $1 \leq u \leq v$, *существует приведенная запись.*

Доказательство. Очевидно, что для любого конечного числа элементов $\beta_u \in \Delta_B$ существует короткая запись. Предположим, что (2) — короткая запись этих элементов. Рассмотрим подгруппу B_1 группы B, порожденную элементами $b_1, \dots, b_p$. Пусть $\{c_1, \dots, c_q\}$ — какой-то базис группы $\sqrt{B_1}$. Его можно дополнить до базиса группы B. Заметим, что по лемме 1 $q = p$. Каждый элемент b_i, $1 \leq i \leq p$, распишем через этот базис. Следовательно, элементы β_u можно записать в виде $\beta_u = \gamma_{1,u}(1-c_1) + \dots + \gamma_{p,u}(1-c_p)$, где $\gamma_{i,u} \in \mathbb{Z}B$. Лемма доказана.

Как видно из доказательств леммы 4 и теоремы, введение приведенной записи элементов β_u из Δ_B позволяет сформулировать более эффективный алгоритм для вычисления ширины элемента из коммутанта сплетения свободных абелевых групп, чем при использовании короткой записи. Сокращение вычислений объясняется тем, что при рассмотрении приведенных записей достаточно рассматривать лишь изолированные подгруппы группы B, содержащие данные элементы этой группы.

Очевидно, что имеет место следующая

Лемма 3. *Для любого конечного множества элементов* β_u, $1 \leq u \leq v$, *тогда и только тогда найдется приведенная запись длины* p, *когда выполнено следующее условие: существует изолированная подгруппа* $B_1 \subseteq B$ *ранга* p *такая, что все элементы* β_u *принадлежат ядру естественного гомоморфизма* $\mathbb{Z}B \longmapsto \mathbb{Z}(B/B_1)$, *причем* p — *наименьшее число с этим свойством.*

Каждый элемент $\beta \in \mathbb{Z}B$ можно записать (однозначно) в виде линейной комбинации

$$\beta = \sum_{g \in B} n_{\beta,g} g, \quad n_{\beta,g} \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

причем только конечное число коэффициентов $n_{\beta,g}$ не равно нулю. Обозначим $\operatorname{supp}(\beta) = \{g \mid n_{\beta,g} \neq 0\}$.

Лемма 4. *Существует алгоритм, позволяющий найти длину p приведенной записи для любого конечного числа элементов β_u, $1 \leq u \leq v$, из фундаментального идеала Δ_B свободной абелевой группы B конечного ранга m.*

Доказательство. По лемме 3 нужно указать алгоритм для нахождения ранга p изолированной подгруппы $B_1, B_1 \leq B$, такой, что все элементы β_u принадлежат ядру естественного гомоморфизма $\varphi : \mathbb{Z}B \longmapsto \mathbb{Z}(B/B_1)$ и p — наименьшее число с этим свойством.

Так как для всех u, $1 \leq u \leq v$, имеют место включения $\beta_u \in \Delta_B$, такая подгруппа существует.

Пусть $\psi : \mathbb{Z}B \longrightarrow \mathbb{Z}\overline{B}$ — гомоморфизм колец, являющийся продолжением группового гомоморфизма $\phi : B \longrightarrow \overline{B}$. Очевидно, что элемент $\beta \in \mathbb{Z}B$ принадлежит ядру гомоморфизма ψ тогда и только тогда, когда для некоторого положительного l имеет место равенство

$$\beta = \beta^{(1)} + \dots + \beta^{(l)}, \tag{4}$$

причем выполнены условия:

1) $\operatorname{supp}(\beta^{(i)}) \cap \operatorname{supp}(\beta^{(j)}) = \varnothing$ при $1 \leq i \neq j \leq l$;

2) тривиализация $\bar{\varepsilon}(\beta^{(i)})$ равна нулю для всех i, $1 \leq i \leq l$;

3) образы $\bar{g} = \phi(g)$ и $\bar{h} = \phi(h)$ элементов $g, h \in \operatorname{supp}(\beta^{(i)})$ совпадают.

Пусть $S = \bigcup\limits_{u=1}^{v} \operatorname{supp}(\beta_u)$. С учетом вышесказанного и леммы 3 доказательство леммы равносильно описанию алгоритма, позволяющего определить такое разбиение множества S на подмножества S_i, что при естественном гомоморфизме группы B на некоторую свободную абелеву группу B/B_1 образы элементов из каждого подмножества одинаковы, а сумма коэффициентов при них в записи (3) равна нулю для каждого подмножества S_i. При этом ранг подгруппы B_1 должен быть минимальным.

Запишем каждый элемент β_u в виде (3) как линейную комбинацию с целыми коэффициентами элементов $g \in S$. При этом некоторые коэффициенты могут быть равны нулю.

Длина приведенной записи элементов β_u равна p тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) множество S можно представить в виде объединения непересекающихся подмножеств S_i, $i \in I$: $S = \bigsqcup\limits_{i \in I} S_i$;

2) для любых i, u, $i \in I$, $1 \leq u \leq v$, все элементы $g \in S_i \cap \operatorname{supp} \beta_u$ сравнимы между собой по модулю некоторой изолированной подгруппы $B_1 \subseteq B$ ранга p;

3) для всех u и любого $i \in I$ сумма по i коэффициентов при элементах $g \in S_i$ в записи (3) равна нулю;

4) число p со свойствами 1–3 наименьшее.

Отсюда получаем алгоритм для нахождения приведенной записи элементов β_u. Он состоит в следующем.

Шаг 1. Выписываем все такие разбиения $\chi_w, w \in W$, множества S на подмножества $S_i^{(w)}$, $i \in I$, что сумма коэффициентов при элементах $g \in S_i^{(w)}$ в записи (3) равна нулю для любых u, $1 \leq u \leq v$, и $i \in I$.

Шаг 2. Для любого разбиения $w \in W$ вычисляем ранг R_w изолированной подгруппы B_w, порожденной всеми множествами

$$G_{u,i}^w = \{g'g^{-1} \mid g, g' \in S_i^{(w)} \cap \operatorname{supp}(\beta_u)\}, \quad 1 \leq u \leq v, \ i \in I.$$

Множество W разбиений множества S со свойствами, указанными в шаге 1, конечно и непусто, так как тривиальное разбиение, при котором $|I| = 1$, удовлетворяет всем условиям на разбиения. Образы элементов β_u в кольце $\mathbb{Z}(B/B_w)$ равны нулю. Поэтому $p = \min\{R_w \mid w \in W\}$. Лемма доказана.

Сделаем одно замечание, которое наряду с приведенной записью элементов позволяет сократить вычисления в указанном алгоритме.

Будем говорить, что *разбиение* $\chi_{w'}$ множества S *меньше, чем разбиение* χ_w этого множества, если все $S_i^{(w')}$ являются подмножествами некоторых $S_{j_i}^{(w)}$, причем хотя бы одно $S_i^{(w')}$ является истинным подмножеством для какого-то $S_{j_i}^{(w)}$.

Как следует из описания шага 2 алгоритма, достаточно рассматривать на шагах 1 и 2 не все, а только минимальные разбиения множества S.

Лемма 5. *Существует алгоритм для нахождения приведенной записи любого конечного множества β_u, $1 \leq u \leq v$, элементов из $\mathbb{Z}B$.*

Доказательство. Занумеруем все примитивные системы элементов группы B длины p, где p определено с помощью алгоритма, указанного в предыдущей лемме. Запишем систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{p} X_{u,j}(b_j - 1) = \beta_u, \quad 1 \leq u \leq v, \tag{5}$$

где $\{b_1, \ldots, b_p\}$ — примитивная система элементов. Вопрос о разрешимости этой системы (и нахождение решения в случае его существования) решается алгоритмически (см., например, [12]).

Перебираем примитивные системы элементов длины p до тех пор, пока не найдем совместную систему уравнений (5). Найденная запись элементов β_u будет приведенной. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть группа $G = C \leftthreetimes D$ равна полупрямому произведению абелевых групп C и D. Коммутаторная ширина элемента $g \in [G, G]$ равна l тогда и только тогда, когда элемент g можно записать в виде произведения*

$$g = [c_1, d_1] \ldots [c_p, d_p], \tag{6}$$

где $c_i \in C$, $d_i \in D$, а p равно $2l$ или $2l - 1$ и не существует записи элемента g в виде (3) *при $p \leq 2l - 2$.*

Доказательство. Для $c_1, c_2 \in C$, $d_1, d_2 \in D$ имеем

$$[c_1 d_1, c_2 d_2] = [c_1, d_2]\left[c_2^{-1}, d_1\right]. \tag{7}$$

Предположим, что коммутаторная ширина элемента g равна l. Тогда, используя формулу (7), элемент g можно записать в виде произведения не более $2l$

коммутаторов вида $[c, d]$, $c \in C$, $d \in D$. Предположим, что элемент g можно записать как произведение $2l - 2$ коммутаторов вида $[c, d]$. Тогда по формуле (7) найдется запись элемента g в виде произведения $l - 1$ коммутаторов. Это противоречит предположению, что коммутаторная ширина элемента g равна l. Предположим, что для элемента g существует запись (3) длины $2l$ или $2l - 1$, но не существует записи (3) длины $2l - 2$. Тогда очевидно, что коммутаторная ширина элемента g равна l. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть группа $G = C \leftthreetimes D$ — полупрямое произведение абелевых групп C и D. Предположим, что элемент $g \in [G, G]$ можно записать в виде произведения $g = [c_1, d_1] \dots [c_p, d_p]$, где $c_i \in C$, $d_i \in D$, и p — наименьшее из возможных с этим свойством. Тогда коммутаторная ширина элемента g равна целой части числа $(p + 1)/2$.*

Теорема. *Пусть $G = A \wr B$ — дискретное сплетение свободных абелевых групп A и B рангов n и m соответственно. Существует алгоритм, позволяющий определять коммутаторную ширину l любого элемента $c \in [G, G]$ и записать c в виде произведения l коммутаторов.*

Доказательство. Группа G изоморфна группе матриц $\mathbf{M}_n(B)$. Поэтому элемент c можно представить в виде матрицы

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1\alpha_1 + \dots + t_n\alpha_n & 1 \end{pmatrix},$$

где $t_1\alpha_1 + \dots + t_n\alpha_n \in T$. Для любых матриц $V = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $b \in B$, $\lambda = \lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n \in T$ их коммутатор $[V, \Lambda] = V^{-1}\Lambda^{-1}V\Lambda$ равен матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda(1 - b) & 1 \end{pmatrix}$. Так как

$$\mathbf{M}_n(B) \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \leftthreetimes \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

по лемме 6 вопрос о нахождении коммутаторной ширины элемента c сводится к нахождению наименьшего натурального числа p, элементов $\lambda_{ji} \in \mathbb{Z}B$, $1 \le j \le n$, $1 \le i \le p$, и некоторой примитивной системы элементов $\{b_1, \dots, b_p\}$ группы B таких, что

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ji}(1 - b_i) = \alpha_j,$$

т. е. к нахождению приведенной записи элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. По лемме 5 существует алгоритм для решения этого вопроса. Из следствия 1 получаем, что коммутаторная ширина l элемента c равна целой части числа $(p+1)/2$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $G = A \wr B$ — дискретное сплетение свободных абелевых групп A и B конечных рангов. Существует алгоритм, позволяющий ответить на вопрос о разрешимости уравнения*

$$[x_1, y_1] \dots [x_l, y_l] = g$$

в группе G для любого целого $l \ge 1$ и любого $g \in G$. Кроме того, в случае разрешимости уравнения алгоритм позволяет найти некоторое его решение $x_1, y_1, \dots, x_l, y_l$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stroud P. W.* Topics in the theory of verbal subgroups: PhD Thesis. Univ. Cambridge, 1966.
2. *Rhemtulla A. H.* Commutators of certain finitely generated soluble groups // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 1160–1164.
3. *Романьков В. А.* О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 1. С. 60-72.
4. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп, 15-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002.
5. *Ore O.* Some remarks on commutators // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. V. 2. P. 307–314.
6. *Liebeck M., O'Brian E., Shalev A., Tiep P.* The Ore conjecture // J. Eur. Math. Soc. 2010. V. 12. P. 939–1008.
7. *Myasnikov A., Roman'kov V.* Verbally closed subgroups of free groups // arXiv:1201.0497v2 [math.GR] 10 Jan. 2012.
8. *Segal D.* Words: notes on verbal width in groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. (London Math. Soc. Lect. Notes; V. 361).
9. *Тимошенко Е. И.* Об элементарных теориях сплетений // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: Ярославск. гос. ун-т, 1979. Вып. 2. С. 169–174.
10. *Тимошенко Е. И.* Эндоморфизмы и универсальные теории разрешимых групп. Новосибирск: НГТУ, 2011.
11. *Ремесленников В. Н., Соколов В. Г.* Некоторые свойства вложения Магнуса // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 5. С. 566–578.
12. *Тимошенко Е. И.* Некоторые алгоритмические вопросы для метабелевых групп // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 2. С. 232–240.

Статья поступила 30 июля 2012 г.

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru