Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 517.54

ОТОБРАЖЕНИЯ, МАЛО ИЗМЕНЯЮЩИЕ ФИКСИРОВАННОЕ АНГАРМОНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ

В. В. Асеев

Аннотация. Для заданного комплексного числа $\lambda \neq 0, 1$ рассматриваются локальные гомеоморфизмы области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, которые в окрестности каждой точки мало (с заданным параметром малости δ) меняют ангармоническое отношение тетрад с фиксированным ангармоническим отношением λ. Доказывается квазиконформность таких отображений и выводятся оценки коэффициента квазиконформности, стремящиеся к 1 при $\delta \to 0$.

Ключевые слова: ангармоническое отношение, мёбиусово отображение, квазиконформное отображение, коэффициент квазиконформности, критерий мёбиусовости, условие мёбиусовых середин.

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Напомним, что *ангармоническое отношение* упорядоченной четверки попарно различных точек (*тетрады*) $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ определяется равенством

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)},$$

если все точки тетрады конечные, и равенствами

$$[\infty : z_2 : z_3 : z_4] := -\frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_2}, \quad [z_1 : \infty : z_3 : z_4] := -\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_1},$$

$$[z_1 : z_2 : \infty : z_4] := -\frac{z_2 - z_4}{z_4 - z_1}, \quad [z_1 : z_2 : z_3 : \infty] := -\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2},$$

если одной из точек тетрады является ∞.

Известно, что свойство $\mathscr{R}$ (сохранение ангармонического отношения любой тетрады из области определения) служит критерием мёбиусовости в классе инъективных отображений $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$, сохраняющих ориентацию.

Обратная задача критерия мёбиусовости в общей постановке выглядит так: *в заданном классе $\mathscr{F}$ отображений указать свойство $\mathscr{A}$, выполнение которого на любом подмножестве из заданного семейства $\mathscr{T}$ подмножеств в области определения необходимо и достаточно для мёбиусовости отображения.* При этом эффективность критерия мёбиусовости тем больше, чем шире класс $\mathscr{F}$, чем слабее условие $\mathscr{A}$ и чем меньше семейство $\mathscr{T}$ тех подмножеств, на которых проверяется выполнение этого условия.

В работе Т. А. Кергиловой [1] дано решение обратной задачи критерия мёбиусовости в классе $\mathscr{F}$ инъективных измеримых по Борелю отображений для

© 2013 Асеев В. В.

свойства $\mathscr{R}'$ (сохранение ангармонического отношения с точностью до комплексного сопряжения) на семействе $\mathscr{T}_\lambda$ всех тетрад с фиксированным ангармоническим отношением λ, где λ — заданное комплексное число, отличное от 0 и 1.

Замечание. Так как свойство мёбиусовости локально, не составляет труда немного повысить эффективность критерия мёбиусовости в [1], заменив его локальным условием: у каждой точки z из области определения существует окрестность $U(z)$, на которой ограничение $f|U(z)$ обладает свойством $\mathscr{R}$. Это ведет к уменьшению семейства $\mathscr{T}_\lambda$ тех тетрад, на которых требуется проверка условия $\mathscr{R}$.

В данной статье рассматривается проблема устойчивости решения обратной задачи критерия мёбиусовости в классе локальных гомеоморфизмов, сохраняющих ориентацию, в следующей постановке.

Определение 1.1. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, $0 \le \delta < 1$ и U — область в $\overline{\mathbb{C}}$. Инъективное отображение $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$ *удовлетворяет условию* $\mathscr{R}[\lambda;\delta]$ на множестве $A \subset U$, если для любой тетрады $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset A$ с ангармоническим отношением λ выполняется оценка

$$|[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] - \lambda| \le \delta \cdot \min\{|\lambda|, |1-\lambda|\}. \tag{1.1}$$

Заметим, что в классе локально гомеоморфных отображений, сохраняющих ориентацию, свойство $\mathscr{R}[\lambda;0]$ (при $\delta = 0$) означает в силу теоремы Кергиловой [1, с. 70], что f дробно-линейно и, в частности, квазиконформно с коэффициентом квазиконформности $K[f] = 1$. Основным результатом данной статьи является следующая теорема устойчивости.

Теорема 1.2. *Пусть фиксированы $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ и δ, удовлетворяющее неравенству*

$$0 \le \delta < 1/\psi(\lambda),$$

где

$$\psi(\lambda) = (16|\lambda|^2 + 88|\lambda| + 96). \tag{1.2.1}$$

Если локальный гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ таков, что у каждой точки $z_0 \in D \setminus (\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty))$ имеется окрестность $U(z_0) \subset D \setminus (\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty))$, на которой ограничение $f|U(z_0)$ инъективно и удовлетворяет условию $\mathscr{R}[\lambda;\delta]$, то f является локально квазиконформным отображением с оценкой для его коэффициента квазиконформности

$$K[f] \le \sqrt{1 + \delta^2(\psi(\lambda))^2} + \delta \cdot \psi(\lambda) \le 1 + 2\psi(\lambda) \cdot \delta, \tag{1.2.2}$$

стремящейся к 1 *при* $\delta \to 0$.

В частном случае при $D = \overline{\mathbb{C}}$ в [2, теорема 8] получена аналогичная теорема устойчивости в классе сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, и приведенная там оценка коэффициента квазиконформности несколько лучше, чем (1.2.2).

Отметим, что при некоторых значениях λ общая оценка (1.2.2) может быть существенно улучшена. В следующей теореме будет показано, что чем меньше отношение $|\operatorname{Re}\lambda|/|\operatorname{Im}\lambda|$, тем лучше оценка близости коэффициента квазиконформности к 1 при $\delta \to 0$.

Теорема 1.3. *Пусть локально гомеоморфное сохраняющее ориентацию отображение $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ таково, что у каждой точки $z \in D \setminus (\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty))$ имеется окрестность $U(z) \subset D \setminus (\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty))$, на которой ограничение $f|U(z)$ инъективно, удовлетворяет условию $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$ с фиксированным $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \neq 0, 1$ и*

$$0 \leq \delta < (16|\lambda|^2 + 88|\lambda| + 96)^{-1}. \tag{1.3.1}$$

Тогда отображение f локально квазиконформно с оценкой для коэффициента квазиконформности

$$K[f] \leq 1 + \delta\sqrt{1 + \frac{\min\{\lambda_1^2, (1-\lambda_1)^2\}}{\lambda_2^2}}. \tag{1.3.2}$$

В частности, при $\lambda_1 \in \{0, 1\}$ справедлива оценка

$$K[f] \leq 1 + \delta. \tag{1.3.3}$$

Проблема устойчивости в классе квазиконформных отображений областей в $\mathbb{R}^n$ формулируется следующим образом: при каких геометрических условиях на область $D \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ любое квазиконформное отображение $f : D \to f(D) \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ с коэффициентом квазиконформности $K[f] \leq 1+\varepsilon$ с малым ε близко к мёбиусову преобразованию с оценкой этой близости через ε? Всестороннее изучение проблемы устойчивости в классах квазиконформных отображений (и в более общих классах отображений с ограниченным искажением) в пространстве $\mathbb{R}^n$ с $n \geq 3$ проведено в работах Ю. Г. Решетняка и его последователей (см. монографию [3] и имеющуюся там библиографию). Для квазиконформных автоморфизмов расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ верна теорема Лиувилля, и в этом случае проблема устойчивости также имеет положительное решение. Но для произвольной области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ ввиду теоремы Римана $(1 + \varepsilon)$-квазиконформное отображение в общем случае не имеет оценок близости к мёбиусовым отображениям. В связи с полученной нами оценкой квазиконформности (1.2.2) естественно возникает вопрос о возможности продолжить отображение со свойством $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$ с области D до квазиконформного автоморфизма расширенной плоскости с оценкой квазиконформности вида $1 + k(\lambda) \cdot \delta$ или же (более слабая задача) вопрос о существовании такой оценки отклонения отображения со свойством $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$ от мёбиусова, которая зависит только от λ и δ и стремится к 0 при $\delta \to 0$. Ответы на эти вопросы автору пока не известны.

§ 2. Условие мёбиусовых середин

В этом параграфе исследуем связь между условием $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$ и условием мёбиусовых середин, введенным в [4–6] в качестве мёбиусово-инвариантной модификации условия середин из [7, определение 0.2].

Определение 2.1 [4, 5]. *Мёбиусовой серединой* упорядоченной тройки попарно различных точек (триады) $T = \{z_1, z_2, z_3\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ называем такую точку $z \in \overline{\mathbb{C}}$, для которой $[z : z_2 : z_1 : z_3] = 1/2$. Мёбиусову середину триады T обозначаем символом $\mathrm{Mid}(T)$.

У любой тройки попарно различных точек мёбиусова середина существует, единственна и лежит на обобщенной окружности, проходящей через эти точки.

Так как $[z : z_1 : z_2 : z_3] = 1 - [z : z_2 : z_1 : z_3] = 1/2$, триада $\{z_2, z_1, z_3\}$ имеет ту же мёбиусову середину, что и триада $\{z_1, z_2, z_3\}$, т. е.

$$\mathrm{Mid}\{z_1, z_2, z_3\} = \mathrm{Mid}\{z_2, z_1, z_3\}. \tag{2.1.1}$$

Определение 2.2 (см. [4; 5, 1.8] или [6, 1.9]). Инъективное отображение $f : A \to \overline{\mathbb{C}}$ множества $A \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащего не менее трех различных точек, *удовлетворяет условию мёбиусовых середин* с константой $\sigma \in [0, 1/2)$, если для любой тройки попарно различных точек z_1, z_2, z_3, содержащейся в A вместе со своей мёбиусовой серединой z, выполняется оценка

$$|[f(z) : f(z_2) : f(z_1) : f(z_3)] - 1/2| \le \sigma. \tag{2.2.1}$$

Заметим, что если для триады $T = \{z_1, z_2, z_3\}$ выполняется оценка (2.2.1), то эта же оценка верна и для триады $T^* = \{z_2, z_1, z_3\}$. Действительно, из (2.1.1) и равенства $[w_0 : w_1 : w_2 : w_3] = 1 - [w_0 : w_2 : w_1 : w_3]$ следует, что

$$\begin{aligned} |[f(z) : f(z_1) : f(z_2) : f(z_3)] - 1/2| &= |1 - [f(z) : f(z_2) : f(z_1) : f(z_3)] - 1/2| \\ &= |[f(z) : f(z_2) : f(z_1) : f(z_3)] - (1/2)| \le \sigma. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Утверждение 2.3. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $0 \le \delta < 1$. Если инъективное отображение $f : A \to \overline{\mathbb{C}}$ множества $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяет условию $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$, то оно удовлетворяет и условию $\mathscr{R}[(1 - \lambda); \delta]$.*

Доказательство. Пусть тетрада $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset A$ такова, что $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = 1 - \lambda$. Тогда для тетрады $\{z_4, z_2, z_3, z_1\} \subset A$ имеем равенство $[z_4 : z_2 : z_3 : z_1] = 1 - [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \lambda$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\delta \cdot \min\{|\lambda|, |1 - \lambda|\} \ge |[f(z_4) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_1)] - \lambda| \\ &= |1 - [f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] - \lambda| = |[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] - (1 - \lambda)|. \end{aligned}$$

Ввиду произвольного выбора в A тетрады $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ с ангармоническим отношением $1 - \lambda$ это означает выполнение условия $\mathscr{R}[(1 - \lambda); \delta]$. Утверждение доказано.

Лемма 2.4. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 1/2\}$ и $0 \le \delta < 1/(4|\lambda| + 8)$. Пусть отображение $f : P \to \overline{\mathbb{C}}$, заданное в замкнутой верхней полуплоскости $P = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z \ge 0\} \cup \{\infty\}$, имеет неподвижные точки $0, 1, \infty$ и удовлетворяет условию $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$. Тогда*

$$|f(1/2) - 1/2| \le \delta \cdot (8|\lambda|^2 + 44|\lambda| + 48). \tag{2.4.1}$$

Доказательство. По крайней мере одно из чисел $\lambda, 1 - \lambda$ лежит в P, обозначим это число через μ. Утверждение 2.3 гарантирует выполнение условия $\mathscr{R}[\mu; \delta]$. Так как $[\mu : 1 : 0 : \infty] = \mu$, то $|[f(\mu) : 1 : 0 : \infty] - \mu| \le \delta \cdot a$, где $a = \min\{|\lambda|, |1 - \lambda|\} = \min\{|\mu|, |1 - \mu|\}$. Поэтому $|f(\mu) - \mu| \le \delta a$ и

$$f(\mu) = \mu + \xi_1, \quad \text{где } |\xi_1| \le \delta a. \tag{2.4.2}$$

Поскольку $\mu - 1 \in P$, $[0 : \mu : (\mu - 1) : \infty] = 1 - \mu$ и по утверждению 2.3 выполняется условие $\mathscr{R}[1 - \mu; \delta]$, то $|[0 : f(\mu) : f(\mu - 1) : \infty] - (1 - \mu)| \le \delta a$, т. е.

$$\frac{f(\mu - 1)}{f(\mu - 1) - f(\mu)} = 1 - \mu + \xi_2, \quad \text{где } |\xi_2| \le \delta a.$$

Используя (2.4.2), получаем равенство

$$f(\mu-1)=\frac{\mu+\xi_1}{\mu-\xi_2}(\mu-1-\xi_2). \tag{2.4.3}$$

Тетрада $\{1,\mu/2,\mu-1,\infty\}$ (учитываем, что $\mu\neq 1/2$) лежит в P и $[1:(\mu/2):(\mu-1):0]=\mu$. Поэтому в силу условия $\mathscr{R}[\mu;\delta]$ имеем неравенство $|[1:f(\mu/2):f(\mu-1):0]-\mu|\le\delta a$, т. е.

$$\frac{(1-f(\mu-1))\cdot f(\mu/2)}{(f(\mu-1)-f(\mu/2))(0-1)}=\mu+\xi_3, \quad \text{где } |\xi_3|\le\delta a.$$

Используя (2.4.3), приходим к равенству

$$f(\mu/2)=\frac{(\mu+\xi_3)(\mu+\xi_1)(\mu-1-\xi_2)}{(\mu+\xi_3)(\mu-\xi_2)+(\mu+\xi_1)(\mu-1-\xi_2)-(\mu-\xi_2)}. \tag{2.4.4}$$

Так как $[(\mu/2):(1/2):0:\infty]=\mu$, в силу условия $\mathscr{R}[\mu;\delta]$ верно неравенство $|[f(\mu/2):f(1/2):0:\infty]-\mu|\le\delta a$, из которого следует, что

$$\frac{f(\mu/2)}{f(1/2)}=\mu+\xi_4, \quad \text{где } |\xi_4|\le\delta a.$$

Значит,

$$f(1/2)-1/2=\frac{2f(\mu/2)-\mu-\xi_4}{2(\mu+\xi_4)}. \tag{2.4.5}$$

Подставив в (2.4.5) выражение (2.4.4) для $f(\mu/2)$, получим $f(1/2)-1/2=X/Y$, где

$$X=(\mu+\xi_1)(\mu+2\xi_3-\xi_4)(\mu-1-\xi_2)-(\mu-\xi_2)(\mu+\xi_4)(\mu-1+\xi_3),$$

$$\begin{aligned}Y&=2(\mu+\xi_4)\cdot[(\mu+\xi_1)(\mu-1-\xi_2)+(\mu-\xi_2)(\mu-1+\xi_3)]\\&=2\mu(\mu-1)-[\mu(2\xi_2-\xi_1-\xi_3)-\xi_2+\xi_1+\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3].\end{aligned}$$

Поскольку $|\mu(2\xi_2-\xi_1-\xi_3)-\xi_2+\xi_1+\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3|\le\delta a(4|\mu|+2+2\delta a)$ и $\delta a<|\mu-1|/(4(1+|\mu|))<1$, то

$$|\mu(2\xi_2-\xi_1-\xi_3)-\xi_2+\xi_1+\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3|\le 4\delta a(|\mu|+1)\le 4\delta|\mu|(1+|\mu|)\le|\mu(\mu-1)|.$$

Отсюда следует нижняя оценка для модуля знаменателя

$$|Y|\ge 2|\mu(\mu-1)|-|\mu(\mu-1)|=|\mu(\mu-1)|. \tag{2.4.6}$$

Выведем верхнюю оценку для модуля числителя $|X|$. Раскрывая скобки в выражении для X, получаем равенство

$$\begin{aligned}X=\mu^2&(\xi_1+\xi_3-2\xi_4)\\&+\mu(2\xi_1\xi_3-\xi_1\xi_4-\xi_1\xi_2-\xi_2\xi_3+2\xi_2\xi_4-\xi_3\xi_4-\xi_1-\xi_2-2\xi_3+2\xi_4)\\&+(\xi_4-2\xi_3)\xi_1(1+\xi_2)-\xi_2\xi_4(1-\xi_3).\end{aligned}$$

Учитывая, что $|\xi_j|\le\delta a<1$ для $j=1,2,3,4$, находим верхнюю оценку для $|X|$:

$$|X|\le 4\delta a|\mu|^2+(8\delta^2a^2+6\delta a)|\mu|+4\delta^2a^2(1+\delta a)\le\delta a(4|\mu|^2+14|\mu|+8).$$

Вместе с оценкой (2.4.6) это дает неравенство

$$|f(1/2)-1/2|\le\delta a\frac{4|\mu|^2+14|\mu|+6}{|\mu|\cdot|\mu-1|}.$$

Так как $|\mu|\le 1+|\lambda|$, $a=\min\{|\lambda|,|\lambda-1|\}$ и $|\mu(\mu-1)|=|\lambda|\cdot|\lambda-1|$, используя неравенство $\max\{|\lambda|,|\lambda-1|\}\ge 1/2$, приходим к требуемой оценке (2.4.1). Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть заданы $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ и δ такие, что*

$$0 \le \delta < (16|\lambda|^2 + 88|\lambda| + 96)^{-1}. \tag{2.5.1}$$

Если инъективное отображение $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$ области $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяет условию $\mathscr{R}[\lambda;\delta]$ в U, то ограничение $f|\Sigma$ на любой обобщенной окружности $\Sigma \subset U$, ограничивающей круг $B \subset U$, удовлетворяет условию мёбиусовых середин с константой

$$\sigma = \delta \cdot (8|\lambda|^2 + 44|\lambda| + 48). \tag{2.5.2}$$

Доказательство. В силу (2.2.2) достаточно рассмотреть случай, когда точки z_1, z_2, z_3 расположены на $\Sigma = \partial B$ в порядке положительного направления обхода границы круга B (иначе заменим эту триаду на $\{z_2, z_1, z_3\}$).

Если $\lambda = 1/2$, то требуемая оценка (2.5.1) вытекает непосредственно из определения условия $\mathscr{R}[\lambda;\delta]$, равенства $[z : z_2 : z_1 : z_3] = 1/2 = \lambda$ и неравенства $\delta \cdot \min\{|\lambda|, |1-\lambda|\} \le \delta \cdot |\lambda| < \delta \cdot (8|\lambda|^2 + 44|\lambda| + 48) = \sigma$.

Пусть теперь $\lambda \ne 1/2$. Построим дробно-линейные преобразования $\mu, \nu : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ такие, что $\mu(z_1) = 0 = \nu(f(z_1))$, $\mu(z_2) = 1 = \nu(f(z_2))$ и $\mu(z_3) = \infty = \nu(f(z_3))$. Преобразование μ переводит точку $z_0 = \mathrm{Mid}\{z_1, z_2, z_3\}$ в точку $\mu(z_0) = \mathrm{Mid}\{0, 1, \infty\} = 1/2$, круг B — в верхнюю полуплоскость, а его границу Σ — в вещественную ось, дополненную точкой $\{\infty\}$.

В силу инвариантности условия $\mathscr{R}[\lambda;\delta]$ при дробно-линейных преобразованиях отображение $g = \nu \circ f \circ \mu^{-1}$ в замыкании верхней полуплоскости удовлетворяет тому же условию $\mathscr{R}[\lambda;\delta]$ и имеет неподвижные точки $0, 1, \infty$. Тем самым оно удовлетворяет всем условиям леммы 2.4, согласно которой

$$|g(1/2) - 1/2| \le \delta(8|\lambda|^2 + 44|\lambda| + 48) < 1/2.$$

Но

$$g(1/2) = [g(1/2) : g(1) : g(0) : g(\infty)] = [f(z_0) : f(z_2) : f(z_1) : f(z_3)].$$

Поэтому полученная оценка равносильна неравенству

$$|[f(z_0) : f(z_1) : f(z_2) : f(z_3)] - 1/2| \le \delta(8|\lambda|^2 + 44|\lambda| + 48),$$

которое и требовалось установить. Лемма доказана.

В доказательстве теоремы 1.2 воспользуемся следующей теоремой (анонсирована в [4, теорема 2]; доказательство с улучшенной оценкой коэффициента квазиконформности см. в [6, теорема 1.10]).

Теорема 2.6. *Пусть $0 \le \sigma < 1/2$, D — область в $\overline{\mathbb{C}}$ и отображение $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ обладает следующим свойством: у любой точки $z_0 \in D$ имеется такая окрестность $U(z_0) \subset D$, что на любой обобщенной окружности $\Sigma \subset U(z_0)$ ограничение $f|U(z_0)$ является топологическим вложением, удовлетворяющим условию мёбиусовых середин с константой σ. Тогда f — локально квазиконформное отображение с коэффициентом квазиконформности*

$$K[f] \le \sqrt{1 + 4\sigma^2} + 2\sigma. \tag{2.6.1}$$

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

Для произвольно взятой точки $z_0 \in D \setminus (\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty))$ построим ее окрестность $U(z_0) \subset D \setminus (\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty))$, указанную в условии теоремы, и найдем открытый круг $B(z_0, R(z_0)) \subset U(z_0)$. Так как каждая обобщенная окружность $\Sigma \subset B(z_0, R(z_0))$ является границей круга $B \subset B(z_0, R(z_0))$ и ограничение $f|B(z_0; R(z_0))$ — инъективное отображение, удовлетворяющее условию $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$, по лемме 2.5 отображение f удовлетворяет условию мёбиусовых середин с константой $\sigma = \delta(8|\lambda|^2 + 44|\lambda| + 48)$ на любой окружности $\Sigma \subset B(z_0, R(z_0))$. Значит, f удовлетворяет условиям теоремы 2.6, в силу которой в области $D \setminus (\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty))$ оно локально квазиконформно с коэффициентом квазиконформности, имеющим оценку (2.6.1).

Подставив выражение (2.5.2) для σ, получим оценку (1.2.2) для коэффициента квазиконформности. Так как ввиду локальной гомеоморфности f все точки множества $\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty)$ изолированы в D, по известной теореме об устранимости изолированной особенности для квазиконформных отображений (см., например, [8, гл. II, § 2]) локальный гомеоморфизм f локально квазиконформный во всей области D. Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1.3

Наделив $\mathbb{R}^2$ естественной комплексной структурой (т. е. отождествляя точки $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$), считаем в дальнейшем, что $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{R}}^2 = \overline{\mathbb{C}}$.

Шаг 1. Рассмотрим случай, когда $D = \mathbb{R}^2$ и f — линейное преобразование с матрицей L, $\det L > 0$. Запишем сингулярное разложение этой матрицы: $L = U \cdot \Lambda \cdot V$, где U и V — ортогональные матрицы с определителем $+1$, а

$$\Lambda = \begin{bmatrix} k_{\max} & 0 \\ 0 & k_{\min} \end{bmatrix}.$$

Преобразования U^{-1} и V^{-1} не меняют ангармонического отношения в $\mathbb{R}^2$, поэтому линейное преобразование $\Lambda = U^{-1} \circ L \circ V^{-1}$ также удовлетворяет условию $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$. Для произвольно малого $\varepsilon > 0$ положим $p := i/\varepsilon$, $s := \lambda i/(1 + \varepsilon(\lambda - 1))$ и рассмотрим тетраду $\{s, i, 0, p\} \subset \mathbb{C}$. Поскольку

$$[s : i : 0 : p] = \frac{s(i-p)}{i(s-p)} = \lambda,$$

оценка

$$|[\Lambda(s) : \Lambda(i) : 0 : \Lambda(p)] - \lambda| \le \delta \cdot \min\{|\lambda|, |1 - \lambda|\}$$

верна при любых $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \to 0$ имеем сходимость $s \to \lambda i$, $p \to \infty$, поэтому в пределе получим неравенство

$$|[\Lambda(\lambda i) : \Lambda(i) : 0 : \infty] - \lambda| \le \delta \cdot \min\{|\lambda|, |1 - \lambda|\}. \tag{4.1}$$

Так как $\Lambda(\lambda_1 i - \lambda_2) = -k_{\max}\lambda_2 + ik_{\min}\lambda_1$ и $\Lambda(i) = ik_{\min}$, то

$$[\Lambda(\lambda i) : \Lambda(i) : 0 : \infty] = \frac{\Lambda(\lambda i)}{\Lambda(i)} = \frac{-k_{\max}\lambda_2 + ik_{\min}\lambda_1}{ik_{\min}} = \lambda_1 + ik\lambda_2,$$

где $k = K[\Lambda] = k_{\max}/k_{\min}$. Неравенство (4.1) принимает вид $|\lambda_1 + ik\lambda_2 - \lambda_1 - i\lambda_2| \le \delta \cdot \min\{|\lambda|, |1 - \lambda|\}$, т. е.

$$(k-1)|\lambda_2| \le \delta \cdot \sqrt{\min\left\{\lambda_1^2 + \lambda_2^2, (\lambda_1 - 1)^2 + \lambda_2^2\right\}}.$$

Следовательно, в этом случае имеем требуемую оценку

$$K[L] = K[\Lambda] = k \le 1 + \delta\sqrt{1 + \frac{\min\{\lambda_1^2, (1-\lambda_1)^2\}}{\lambda_2^2}}. \tag{4.2}$$

Шаг 2. По теореме 1.2 отображение f локально квазиконформно в области D и, следовательно, дифференцируемо почти всюду в D. Пусть $z_0 \in D \setminus (\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty))$ — точка дифференцируемости отображения f и $L = T_f(z_0)$ — матрица Якоби отображения f в точке z_0. Убедимся, что линейное преобразование L, сохраняющее ориентацию, удовлетворяет условию $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$ на $\mathbb{R}^2$.

Для натурального n построим сохраняющие ориентацию отображения подобия $\tau_n : z \mapsto z_0 + z/n$ и $\eta_n : w \mapsto n(w - f(z_0))$, которые, очевидно, не меняют ангармонического отношения для тетрад в $\mathbb{R}^2$.

Пусть $R(z_0)$ таково, что круг $B(z_0, R(z_0))$ содержится в области $U(z_0) \subset D \setminus (\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty))$, на которой отображение f инъективно и удовлетворяет условию $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$. Тогда круг $B_n := B(0, nR(z_0))$ переводится подобием τ_n в круг $\tau_n(B_n) = B(z_0, R(z_0))$.

Для произвольно заданной тетрады $T = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ с ангармоническим отношением $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = \lambda$ при всех достаточно больших номерах n тетрада T содержится в B_n, а отображения $f_n = \eta_n \circ f \circ \tau_n$ инъективны и удовлетворяют условию $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$ в B_n. Поэтому при всех достаточно больших n выполняется оценка

$$|[f_n(x_1) : f_n(x_2) : f_n(x_3) : f_n(x_4)] - \lambda| \le \delta \min\{|\lambda|, |1-\lambda|\}. \tag{4.3}$$

В силу дифференцируемости f в точке z_0 при $n \to \infty$ имеет место сходимость $f_n \to L$, равномерная на компактах в $\mathbb{R}^2$. Переходя в (4.3) к пределу при $n \to \infty$, получаем оценку

$$|[L(x_1) : L(x_2) : L(x_3) : L(x_4)] - \lambda| \le \delta \cdot \min\{|\lambda|, |1-\lambda|\}.$$

Это означает, что линейное отображение $L = T_f(z_0)$ удовлетворяет условию $\mathscr{R}[\lambda; \delta]$ в $\mathbb{R}^2$. Тогда, как было установлено на 1-м шаге доказательства, это отображение имеет оценку (4.2) для коэффициента квазиконформности. Поэтому в каждой точке дифференцируемости z_0 отображения f (т. е. почти всюду в D) его касательное отображение имеет оценку (4.2) для коэффициента квазиконформности. Следовательно, такую же оценку имеет и коэффициент квазиконформности отображения f, так как $K[f] = \operatorname*{ess\,sup}_{z \in D} K[T_f(z)]$. Теорема доказана.

Автор благодарен рецензенту за сделанные им замечания, позволившие значительно улучшить окончательный текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кергилова Т. А.* Мёбиусовость инъективных, измеримых по Борелю отображений, сохраняющих фиксированное ангармоническое отношение с точностью до комплексного сопряжения // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 4. С. 68–81.
2. *Асеев В. В., Кергилова Т. А.* Ангармоническое отношение и минимальные критерии мёбиусовости // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 1. С. 14–28.
3. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.

4. *Асеев В. В.* Условие мёбиусовых середин, квазиконформность и квазимёбиусовость // Современные методы теории функций и смежные проблемы / Мат. конф. Воронежск. мат. шк. Воронеж: Издат.-полиграф. центр Воронежск. гос. ун-та, 2009. С. 13–14.
5. *Асеев В. В.* Условие мёбиусовых середин как признак квазиконформности и квазимёбиусовости // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 38–58.
6. *Асеев В. В.* Квазимёбиусовость на малых окружностях и квазиконформность // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 258–269.
7. *Асеев В. В., Кузин Д. Г.* Достаточные условия квазисимметричности отображений прямой и плоскости // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1225–1235.
8. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.

Статья поступила 25 сентября 2012 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`btp@math.nsc.ru`