Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 517.96

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТИПА ШИЛОВА С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМ РОДОМ

В. А. Литовченко, И. М. Довжицкая

Аннотация. Для одного класса параболических систем типа Шилова с неотрицательным родом и гладкими ограниченными коэффициентами, зависящими от временной и пространственной переменных, исследуется поведение решений при неограниченном возрастании временной переменной t, предельные значения которых при $t = 0$ принадлежат широкому классу обобщенных функций.

Ключевые слова: задача Коши, параболические по Шилову системы с переменными коэффициентами, обобщенные начальные данные, стабилизация решений задачи Коши.

Введение

В [1] рассмотрен класс систем дифференциальных уравнений с частными производными порядка p вида

$$\partial_t u(t;x) = \{P_0(t;i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x)\}u(t;x), \quad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $u := \mathrm{col}(u_1,\dots,u_m)$, а $P_0(t;i\partial_x)$ и $P_1(t,x;i\partial_x)$ — матричные дифференциальные выражения порядков соответственно p и p_1, $p > p_1 \geq 0$, с коэффициентами, зависящими от временной переменной t, при этом коэффициенты у P_1 могут зависеть и от пространственной переменной x. Также предполагается, что

$$\partial_t u(t;x) = P_0(t;i\partial_x)u(t;x), \quad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^n,$$

является параболической по Шилову системой уравнений с показателем параболичности h, $0 < h \leq p$, неотрицательным родом μ и приведенным порядком p_0 [2] (т. е. существуют постоянные $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 \geq 0$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\Lambda(x) := \max_{j\in\mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\,\lambda_j(x) \leq -\delta_0\|x\|^h + \delta_1,$$

где λ_j — корни уравнения $\det(P_0(t;\zeta)-\lambda E) = 0$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, E — единичная матрица порядка m, а $\mathbb{N}_m := \{1,2,\dots,m\}$).

Напомним также, что *приведенным порядком* p_0 *системы* называется точный степенной порядок роста функции $\Lambda(\cdot)$ в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ (для параболической системы всегда $p_0 > 0$). Кроме того, *родом параболической по Шилову системы* называется наибольший показатель μ такой, что в области $G^\mu(K) := \{x+iy \in \mathbb{C}^n : \|y\| \leq K(1+\|x\|)^\mu\}$ с некоторым $K > 0$ для функции $\Lambda(\cdot)$ выполняется оценка

$$\Lambda(x+iy) \leq -\delta_*\|x\|^h + \delta_1, \quad \delta_* > 0,\ \delta_1 \geq 0.$$

Известно, что $1-(p_0-h)\le\mu\le 1$.

Для таких систем построена фундаментальная матрица решений задачи Коши (ФМРЗК) $Z(t,x;\tau,\xi)$, исследованы ее основные свойства гладкости и поведение в окрестности бесконечно удаленных пространственных точек при следующих условиях:

(A) $0\le p_1<h-n(1-h\mu/p_0)-(m-1)(p-h)$;

(B) коэффициенты системы (1) являются непрерывными по переменной t, бесконечно дифференцируемыми по переменной x комплекснозначными функциями, ограниченными вместе со своими производными в слое $[0;T]\times\mathbb{R}^n$.

В частности, установлено, что матричная функция $Z(t,x;\tau,\xi)$ является бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}^n$ функцией по каждой из пространственных переменных x и ξ, причем для всех $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ и $0\le\tau<t\le T$ имеет место оценка

$$\left|\partial_x^k\partial_\xi^q Z(t,x;\tau,\xi)\right|\le c(t-\tau)^{-\frac{n+|k+q|_*+\gamma}{h}}e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} \tag{2}$$

(здесь $\alpha_*:=\frac{\mu}{p_0}$, $\gamma:=(m-1)(p-h)$ и $|l|_*:=l_1+\dots+l_n$ для $l:=(l_1,\dots,l_n)$).

Полученные свойства матрицы Z позволили в [3] установить корректную разрешимость задачи Коши для (1) в случае, когда начальные данные являются обобщенными функциями из пространства $\mathbb{S}'_{1-\alpha_*}$ (здесь $\mathbb{S}'_\beta$ — топологически сопряженное пространство с векторным пространством $\mathbb{S}_\beta$ Гельфанда и Шилова [4]).

В работе рассмотрены свойства стабилизации решения задачи Коши для систем (1) в классе $\mathbb{S}'_\beta$ обобщенных начальных функций.

Следует отметить, что вопрос о стабилизации решения задачи Коши для уравнений и систем уравнений параболического типа рассматривался многими авторами, при этом оказалось, что результаты и методика исследований существенно зависят от наличия в структуре системы младших членов, постоянства или переменности коэффициентов, а также ограниченности либо неограниченности начальной функции. Подробный обзор работ в этом направлении приведен в [5, 6].

В случае системы (1) при $P_1\equiv 0$ исследованием стабилизации решения задачи Коши в классе ограниченных начальных функций занимались С. Д. Эйдельман, Ф. О. Порпер, С. Д. Ивасишен [7, 8]. В классах $\mathbb{S}'^\beta$ обобщенных начальных функций бесконечного порядка типа распределений Гельфанда и Шилова занимался В. В. Городецкий [9].

1. Постановка задачи

Вначале приведем краткие сведения из [4] о пространствах S_α, S^β Гельфанда и Шилова.

Пространства S_α, $\alpha\ge 0$, и S^β, $\beta\ge 0$, состоят из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих соответственно неравенствам

$$|x^k\varphi^q(x)|\le C_q A^{|k|_*}k_1^{k_1\alpha}\dots k_n^{k_n\alpha},\quad \{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,$$

$$|x^k\varphi^q(x)|\le C_k B^{|q|_*}q_1^{q_1\beta}\dots q_n^{q_n\beta},\quad \{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,$$

с зависящими от функции φ постоянными A, B, C_q и C_k.

Эти пространства тесно связаны между собой преобразованием Фурье F:

$$F[S_\alpha]=S^\alpha;\quad F[S^\beta]=S_\beta,$$

где

$$F[X] := \left\{ \psi \mid \psi(\cdot) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i(x,\cdot)}\,dx,\ \varphi \in X \right\},$$

а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. При этом оператор F переводит X в соответствующее пространство $F[X]$ взаимно однозначно и непрерывно.

В дальнейшем будем рассматривать систему (1) на множестве $\Pi_\infty := (0;\infty) \times \mathbb{R}^n$ в предположении выполнения условия (B) при $t \geq 0$.

Если для системы (1) задать начальное условие

$$u(t;x)|_{t=0} = f, \quad f \in \mathbb{S}'_\beta, \tag{3}$$

то под решением задачи Коши (1), (3) в полупространстве $t > 0$ будем понимать вектор-функцию $u(t;x), (t;x) \in \Pi_\infty$, дифференцируемую по t, p раз дифференцируемую по x, удовлетворяющую системе (1) в обычном понимании, а начальному условию (3) — в смысле сходимости в пространстве S'_β, т. е.

$$\langle u(t;x), \varphi(x)E\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \langle f, \varphi(x)E\rangle \quad \forall \varphi \in S_\beta$$

(здесь скобками $\langle , \rangle$ обозначено действие обобщенной функции на основную, а E — единичная матрица порядка m).

Непосредственно из результатов, полученных в [3], приходим к такому утверждению о корректной разрешимости задачи Коши (1), (3).

Теорема 1. *Пусть начальная вектор-функция f принадлежит $\mathbb{S}'_{1-\alpha_*}$. Тогда соответствующая задача Коши* (1), (3) *на множестве Π_∞ однозначно разрешима. Ее решение $u(t;x)$ непрерывно зависит от начальных данных и определяется формулой*

$$u(t;x) = \langle f, Z(t,x;0,\xi)\rangle, \quad (t;x) \in \Pi_\infty,$$

при этом является обычной вектор-функцией, дифференцируемой по t и бесконечно дифференцируемой по переменной x.

Задание состоит в исследовании условий, при которых решение задачи Коши (1), (3) стабилизируется к нулю при $t \to +\infty$.

2. Теоремы о стабилизации

Будем говорить, следуя [8], что система (1) *удовлетворяет условию* Λ^+_ψ, если существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $t > 0$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ и $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}^n_+$ выполняется оценка

$$\left|\partial^k_x \partial^q_\xi Z(t,x;0,\xi)\right| \leq c a(t)^{-\chi(|k+q|_*)} \psi(\|x-\xi\|/a(t)) \tag{4}$$

с некоторой непрерывной монотонно возрастающей неограниченной функцией $a(t)$, обращающейся в нуль при $t = 0$, а также положительными функциями $\psi(\cdot)$ и $\chi(\cdot)$, первая из которых ограничена, а вторая монотонно возрастает на множестве $[0;+\infty)$.

Примеры простейших систем (1), удовлетворяющих условию Λ^+_ψ с соответствующей функцией $\psi(\cdot)$, приведены в [7, 8].

Следующие утверждения характеризуют равномерную стабилизацию гладких решений системы (1).

Теорема 2. *Если начальная вектор-функция f из пространства $\mathbb{S}'_{1-\alpha_*}$ имеет компактный носитель, то соответствующее решение задачи Коши для системы* (1), *удовлетворяющей условию Λ^+_ψ, стабилизируется к нулю равномерно на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K} \supset \mathbb{K}_1 \supset \operatorname{supp} f$, где $\mathbb{K}$ и $\mathbb{K}_1$ — некоторые компактные множества из $\mathbb{R}^n$. Построим функцию $\eta(\cdot)$ из $S_{1-\alpha_*}$ с носителем в $\mathbb{K}$ такую, что $\eta(x) = 1$ для $x \in \mathbb{K}_1$ [4]. Поскольку согласно оценке (2) при фиксированном $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ каждый элемент матричных функций $\eta(\cdot)Z(t, x; 0, \cdot)$, $(1 - \eta(\cdot))Z(t, x; 0, \cdot)$ принадлежит пространству $S_{1-\alpha_*}$, то

$$u(t; x) = \langle f, \eta(\cdot)Z(t, x; 0, \cdot)\rangle + \langle f, (1 - \eta(\cdot))Z(t, x; 0, \cdot)\rangle.$$

Отсюда, учитывая определение носителя обобщенной функции и равенство $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\{(1 - \eta(\cdot))Z(t, x; 0, \cdot)\} = \varnothing$, получаем следующее изображение решения u:

$$u(t; x) = \langle f, \eta(\cdot)Z(t, x; 0, \cdot)\rangle, \quad (t; x) \in \Pi_\infty.$$

Воспользовавшись линейностью функционала f, имеем

$$u(t; x) = a^{-\beta}(t)\langle f, a^\beta(t)\eta(\cdot)Z(t, x; 0, \cdot)\rangle, \quad \beta > 0,\ (t; x) \in \Pi_\infty.$$

Из последнего равенства следует, что для доказательства исходной теоремы достаточно указать существование такого $\beta > 0$, при котором матричная функция $Y(t, x, \cdot) := a^\beta(t)\eta(\cdot)Z(t, x; 0, \cdot)$ ограничена в пространстве $\mathbb{S}_{1-\alpha_*}$ равномерно относительно переменных $t \gg 1$ и $x \in \mathbb{R}^n$, т. е. установить оценку

$$\left|\partial^k_\xi Y(t, x, \xi)\right| \le c_k e^{-\delta\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}, \quad k \in \mathbb{Z}^n_+,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ t \gg 1,$$

с не зависящими от t, x и ξ постоянными c_k и δ.

Поскольку $\eta(\cdot) \in S_{1-\alpha_*}$, имеет место неравенство

$$\left|\partial^k_\xi \eta(\xi)\right| \le c_0 e^{-\delta_0\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}, \quad k \in \mathbb{Z}^n_+,\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

с некоторыми положительными постоянными c_0 и δ_0, причем δ_0 не зависит от k. Учитывая неравенство (4) и ограниченность функции $\psi(\cdot)$, находим

$$\begin{aligned}\left|\partial^k_\xi Y(t, x, \xi)\right| &\le c a^\beta(t) \sum_{q=0}^{k} \left|\partial^q_\xi \eta(\xi)\right| \left|\partial^{k-q}_\xi Z(t, x; 0, \xi)\right| \le c_1 a(t)^{-(\chi(0)-\beta)} e^{-\delta_0\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} \\ &\le \hat{c} e^{-\delta_0\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}, \quad 0 < \beta < \chi(0),\ k \in \mathbb{Z}^n_+,\ t \gg 1,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

(здесь постоянная $\hat{c} > 0$ не зависит от t, x и ξ). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $f(\cdot) = \operatorname{col}(f_1(\cdot), \dots, f_m(\cdot))$ — непрерывная вектор-функция такая, что*

$$|f(x)| \le c(1 + \|x\|)^\beta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

при некотором $\beta \ge 0$, а обобщенная начальная вектор-функция f из $\mathbb{S}'_{1-\alpha_*}$ является функционалом типа производной порядка r от $f(\cdot)$, т. е. таким функционалом, действие каждой компоненты f_j которого на элементах $\varphi \in S_{1-\alpha_*}$ определяется равенством

$$\langle f_j, \varphi\rangle = c_j \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\partial^r_x \varphi(x)\, dx, \quad j \in \mathbb{N}_m,$$

с некоторыми постоянными c_j. *Тогда если система* (1) *удовлетворяет условию* Λ_ψ^+ *при* $\chi(|r|_*) > n + \beta$ *с интегрируемой функцией* $\psi(\cdot)$ *такой, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\|x\|)(1 + \|x\|)^\beta \, dx < +\infty, \tag{7}$$

то решение соответствующей задачи Коши (1), (3) *стабилизируется к нулю равномерно на каждом компакте* $\mathbb{K}$ *из* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Согласно утверждению теоремы 1 и условиям на начальную вектор-функцию f получаем изображение решения задачи Коши (1), (3) в виде

$$u(t;x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^r Z(t,x;0,\xi) f(\xi) \, d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_\infty,$$

из которого, учитывая оценки (4) и (6), находим, что

$$|u(t;x)| \le c_1 a(t)^{-\chi(|r|_*)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\|x - \xi\|/a(t))(1 + \|\xi\|)^\beta \, d\xi, \quad (t;x) \in \Pi_\infty.$$

Поскольку

$$\sup_{x \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n} (1 + \|x\| + a(t)\|\zeta\|)^\beta \le c a(t)^\beta (1 + \|\zeta\|)^\beta, \quad t \gg 1, \ \zeta \in \mathbb{R}^n,$$

то, производя в последнем интеграле замену переменных интегрирования согласно правилу

$$\xi_j = x_j - \zeta_j a(t), \quad j \in \mathbb{N}_m,$$

и учитывая свойства функции $\psi(\cdot)$, получим оценку

$$\begin{aligned} |u(t;x)| &\le c_1 a(t)^{-\chi(|r|_*)+n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\|\zeta\|)(1 + \|x - \zeta a(t)\|)^\beta \, d\zeta \\ &\le c_2 a(t)^{-\chi(|r|_*)+n+\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\|\zeta\|)(1 + \|\zeta\|)^\beta \, d\zeta \\ &= c_3 a(t)^{-(\chi(|r|_*)-n-\beta)}, \quad t \gg 1, \ x \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

(здесь положительная постоянная c_3 не зависит от t и x), из которой утверждение исходной теоремы становится очевидным. Теорема доказана.

Замечание. Непосредственно из доказательства теоремы 3 убеждаемся, что при $\beta = 0$ ее утверждение усиливается, а именно при приведенных в теореме 3 условиях решение соответствующей задачи Коши (1), (3) стабилизируется к нулю равномерно на $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим ситуацию, когда коэффициенты системы (1) не зависят от пространственной переменной x. Тогда ФМРЗК

$$Z(t,x;0,\xi) \equiv G(t;x - \xi), \quad t > 0, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

где $G(t;\cdot) = F^{-1}[\Theta_t(\zeta)](t;\cdot)$, $t > 0$, а $\Theta_t(\cdot)$ — матрицант соответствующей двойственной по Фурье системы к (1). В этом случае имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть система (1) с не зависящими от x коэффициентами удовлетворяет условию Λ_ψ^+ и для каждой компоненты f_j обобщенной начальной вектор-функции $f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha_*}$ свертка $(f_j * \varphi)(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_m$, с произвольным элементом $\varphi \in S_{1-\alpha_*}$ является обычной функцией такой, что*

$$|(f_j * \varphi)(x)| \le c_\varphi (1 + \|x\|)^{-\beta_j}, \quad \beta_j > n,\ j \in \mathbb{N}_m,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Тогда соответствующее решение $u(t;x)$ задачи Коши (1), (3) слабо стабилизируется к нулю в пространстве $S'_{1-\alpha_*}$, т. е.

$$\langle u(t;x), \varphi(x)E\rangle \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall \varphi \in S_{1-\alpha_*}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные матричные функции

$$\Psi(t;\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) G(t; x-\xi)\, dx \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+\xi) G(t;x)\, dx = (\varphi * G)(t;\xi),$$

$$\Psi_r(t;\xi) := \int\limits_{\|x\|\le r} \varphi(x+\xi) G(t;x)\, dx, \quad (t;\xi) \in \Pi_\infty,\ \varphi \in S_{1-\alpha_*}.$$

Отметим, что элементы матрицы $\Psi(t;\cdot)$ при каждом $t > 0$ принадлежат пространству $S_{1-\alpha_*}$, поскольку таковым свойством обладают элементы матрицы $G(t;\cdot)$, а функция $\varphi(\cdot)$ как элемент пространства $S_{1-\alpha_*}$ является свертывателем в этом пространстве [4].

Используя оценку (2) ФМРЗК G, а также равномерную ограниченность обычной операции сдвига в пространствах типа S [4], устанавливаем, что при любых $t > 0$ и $r > 0$ все элементы матрицы $\Psi_r(t;\cdot)$ принадлежат пространству $S_{1-\alpha_*}$ и при этом выполняется предельное соотношение $\Psi_r(t;\cdot) \overset{S_{1-\alpha_*}}{\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}} \Psi(t;\cdot)$, $t > 0$. Тогда для каждой обобщенной вектор-функции $f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha_*}$ справедливо равенство

$$\langle f, \Psi(t;\xi)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle f, \varphi(x) G(t;x-\xi)\rangle\, dx, \quad t > 0,$$

характеризующее интегрируемость в пространстве $S_{1-\alpha_*}$ каждого элемента матричной функции $\varphi(x)G(t;x-\cdot)$ по параметру x как абстрактной функции переменной x в этом пространстве.

Учитывая последнее равенство и утверждение теоремы 1, находим, что

$$\langle u(t;x), \varphi(x)E\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle f, G(t;x-\xi)\rangle \varphi(x) E\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle f, \varphi(x) G(t;x-\xi)\rangle\, dx$$

$$= \Big\langle f, \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+\xi) G(t;x)\, dx \Big\rangle = (-1)^n \Big\langle f, \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(-(y-\xi)) G(t;-y)\, dy \Big\rangle$$

$$= (-1)^n \Big\langle f, \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(y-\xi) G(t;-y)\, dy \Big\rangle, \quad t > 0,\ \varphi \in S_{1-\alpha_*}$$

(здесь $\eta(\cdot) := \varphi(-\cdot) \in S_{1-\alpha_*}$). Воспользовавшись еще раз интегрируемостью каждого элемента абстрактной матричной функции $\eta(y-\cdot)G(t;-y)$ по параметру y в пространстве $S_{1-\alpha_*}$, а также формулой свертки [4]

$$(g * \varphi)(\cdot) = \langle g, \varphi(\cdot - \xi)\rangle, \quad \varphi \in S_{1-\alpha_*},\ g \in S'_{1-\alpha_*},$$

получаем равенство

$$\langle u(t;x), \varphi(x)E\rangle = (-1)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f*(\eta E))(y)G(t;-y)\,dy, \tag{9}$$

из которого в силу неравенств (2) и (8) приходим к оценке

$$|\langle u(t;x), \varphi(x)E\rangle| \le ca(t)^{-\chi(0)}, \quad t>0,\ \varphi\in S_{1-\alpha_*},$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от переменной t. Теорема доказана.

Примером обобщенной функции f из $S'_{1-\alpha_*}$, для свертки которой с каждой функцией $\varphi\in S_{1-\alpha_*}$ выполняется условие (8), может быть свертыватель в пространстве $S_{1-\alpha_*}$.

Более общие условия на начальную вектор-функцию $f\in\mathbb{S}'_{1-\alpha_*}$, при которых имеет место слабая стабилизация к нулю соответствующего решения задачи Коши (1), (3), можно сформулировать в терминах обобщенного предельного среднего по пространственным телам [10, 11].

Для этого рассмотрим однопараметрическое семейство гиперповерхностей $\Phi_t(x)=r$, $r\ge 0$, обладающее при каждом фиксированном $t\gg 1$ следующими свойствами:

1) оно состоит из замкнутых односвязных гиперповерхностей;

2) тела $V^r_{\Phi_t}$, ограниченные гиперповерхностями $\Phi_t(x)=r$, содержат начало координат;

3) если $\rho(r,\alpha,t)$ — длина вектора, соединяющего начало координат O с точкой гиперповерхности $\Phi_t(x)=r$ и образующего углы $\pi/2-\alpha_j$ с осями Ox_{j+1}, $j\in\mathbb{N}_{n-1}$, декартовой системы координат, то $\rho(r,\alpha,t)$ имеет непрерывную положительную производную по переменной r.

Предполагается также, что при $t\to+\infty$ семейства $\Phi_t(x)=r$ гиперповерхностей стремятся к семейству замкнутых гиперповерхностей $F(x)=r$, т. е. для каждого положительного ε существует $t_0>0$ такое, что для всех $t>t_0$ и $r\ge 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\bigl(V^r_F\cup V^r_{\Phi_t}\bigr)/\operatorname{mes}\bigl(V^r_F\cap V^r_{\Phi_t}\bigr) < 1+\varepsilon. \tag{10}$$

При этом указанное семейство $F(x)=r$ обладает свойствами 1–3 и к тому же существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что для произвольных $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ и r выполняются неравенства

$$c_1\rho(r,\alpha^{(1)},t)\le\rho(r,\alpha^{(2)},t)\le c_2\rho(r,\alpha^{(1)},t). \tag{11}$$

Как отмечено в [10], условия (10), (11) обеспечивают выполнение оценки

$$c_5\rho^n(r,\alpha,t)\le\operatorname{mes}V^r_{\Phi_t}\le c_4\rho^n(r,\alpha,t) \tag{12}$$

при некоторых положительных постоянных c_4, c_5 для произвольных r, α и t.

Будем говорить, что обобщенная вектор-функция $f\in\mathbb{S}'_{1-\alpha_*}$ *имеет обобщенное нулевое предельное среднее по телам* V^r_F, и при этом писать $M^\infty_F(f)=0$, если

$$\lim_{r\to\infty}\Biggl(\int\limits_{V^r_F}(f*(\varphi E))(x)\,dx/\operatorname{mes}V^r_F\Biggr)=0 \quad \forall\varphi\in S_{1-\alpha_*}.$$

Теорема 5. *Рассмотрим систему* (1) *с не зависящими от x коэффициентами, удовлетворяющую условию Λ_ψ^+ при $\chi(1) \geq n+1$ с функцией $\psi(\cdot)$, для которой выполняется условие* (7) *с $\beta = n$. Пусть* ФМРЗК $G(t;x)$ *этой системы постоянна относительно переменной x на обладающих свойствами* 1–3 *семействах гиперповерхностей $\Phi_t(x) = r$, которые стремятся при $t \to +\infty$ к семейству $F(x) = r$. Тогда если начальная обобщенная вектор-функция $f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha_*}$ такая, что $M_F^\infty(f) = 0$, то соответствующее решение задачи Коши* (1), (3) *слабо стабилизируется к нулю в пространстве $S'_{1-\alpha_*}$.*

Доказательство. Воспользуемся равенством (9), рассматривая интеграл из его правой части как предел интегралов по телам $V_{\Phi_t}^r$ при $r \to +\infty$. Переходя к новым переменным интегрирования $r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ согласно правилу

$$x_1 = \rho(r,\alpha,t)\cos\alpha_1 \dots \cos\alpha_{n-1},\ x_j = \rho(r,\alpha,t)\cos\alpha_1 \dots \cos\alpha_{n-j}\sin\alpha_{n-j+1},$$
$$j \in \{2,3,\dots,n-1\}, \quad x_n = \rho(r,\alpha,t)\sin\alpha_1$$

и используя постоянство G относительно пространственной переменной на $\Phi_t(x) = r$, получим, что

$$\langle u(t;x), \varphi E\rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_t^r} (f*(\eta E))(r,\alpha,t) G(t; -x(r,\alpha,t))\, d\Omega dr$$
$$= (-1)^n \int_0^{+\infty} \left(\partial_r \int_0^r \int_{\Omega_t^\xi} (f*(\eta E))(\xi,\alpha,t)\, d\xi d\Omega \right) G_0(t;-r)\, dr,$$

где $G_0(t;r) := G(t; x(r,0,t))$, Ω_t^r — поверхность $\Phi_t(x) = r$, $d\Omega$ — элемент площади поверхности Ω_t^r. Интегрируя по частям внешний интеграл и учитывая условие $M_F^\infty(f) = 0$, приходим к равенству

$$\langle u(t;x), \varphi E\rangle = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^r \int_{\Omega_t^\xi} (f*(\eta E))(\xi,\alpha,t)\, d\xi d\Omega \right) \partial_r G_0(t;-r)\, dr.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенствами (4), (12), имеем

$$|\langle u(t;x), \varphi E\rangle| \leq c a(t)^{-\chi(1)} \int_0^{+\infty} \rho'_r(r,0,t)\psi(\rho(r,0,t)/a(t))$$
$$\times \left| \int_0^r \int_{\Omega_t^\xi} (f*(\eta E))(\xi,\alpha,t)\, d\xi d\Omega \right| dr \leq c_1 a(t)^{-n-1} \int_0^{+\infty} \psi(\rho(r,0,t)/a(t))\rho^n(r,0,t)$$
$$\times \left| \frac{1}{\operatorname{mes} V_{\Omega_t}^\rho} \int_{V_{\Omega_t}^\rho} (f*(\eta E))(\sigma)\, d\sigma \right| d\rho, \quad t \gg 1$$

(здесь $V_{\Omega_t}^\rho$ — тело, ограниченное поверхностью Ω_t^ρ). Производя подстановку $\rho = a(t)\rho_1$, получим оценку

$$|\langle u(t;x), \varphi E\rangle| \leq c_1 \int_0^{+\infty} \rho_1^n \psi(\rho_1) \left| \frac{1}{\operatorname{mes} V_{\Omega_t}^{a(t)\rho_1}} \int_{V_{\Omega_t}^{a(t)\rho_1}} (f*(\eta E))(\sigma)\, d\sigma \right| d\rho_1, \quad t \gg 1,$$

из которой, устремляя t к $+\infty$, приходим к утверждению исходной теоремы. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Літовченко В. А., Довжицька І. М.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами // Укр. мат. вісник. 2010. Т. 7, № 4. С. 516–552.

2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

3. *Litovchenko V. A., Dovzhytska I. M.* Cauchy problem for a class of parabolic systems of Shilov type with variable coefficients // Cent. Eur. J. Math. 2012. V. 10, N 3. P. 1084–1102.

4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.

5. *Денисов В. Н., Репников В. Д.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 1. С. 20–41.

6. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 4. С. 145–212.

7. *Эйдельман С. Д., Порпер Ф. О.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических систем // Изв. вузов. Математика. 1960. № 4. С. 210–217.

8. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д., Порпер Ф. О.* Теоремы Лиувилля для параболических в смысле Г. Е. Шилова систем // Изв. вузов. Математика. 1961. № 6. С. 169–179.

9. *Городецкий В. В.* Некоторые теоремы о стабилизации решений задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций // Укр. мат. журн. 1988. Т. 40, № 1. С. 43–48.

10. *Репников В. Д.* Некоторые теоремы о стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 3. С. 527–530.

11. *Дрожжинов Ю. Н.* Стабилизация решений обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 2. С. 368–379.

Статья поступила 28 февраля 2013 г.

Литовченко Владислав Антонович,   Довжицкая Ирина Михайловна
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича,
ул. Коцюбинского, 2, Черновцы 58012, Украина
`vladlit4@mail.ru`