Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 517.54

О ПРИВЕДЕННОМ МОДУЛЕ КОМПЛЕКСНОЙ СФЕРЫ

В. Н. Дубинин

Аннотация. Понятие приведенного модуля сферы Римана относительно совокупности конечных точек распространяется на случай, когда пластины обобщенного конденсатора представляют собой произвольные континуумы, стягивающиеся к указанным точкам. Показывается, что приведенный модуль не зависит от формы вырождающихся пластин. Ранее приведенный модуль рассматривался в случае, когда пластины конденсатора являлись элементами семейств почти кругов с фиксированными центрами.

Ключевые слова: приведенный модуль, конденсатор, емкость конденсатора, логарифмическая емкость.

Юрию Григорьевичу Решетняку к 85-летию

§ 1. Введение и формулировка основного результата

Приведенный модуль области на сфере Римана относительно одной точки этой области рассматривался впервые в классических работах Гретша и Тейхмюллера начала 20-го века. Большое влияние на применение этого понятия в геометрической теории функций комплексного переменного оказали исследования Альфорса и Бёрлинга [1], Хеймана [2] и Дженкинса [3]. Впоследствии появились многочисленные разновидности приведенных модулей, изучение которых диктовалось прежде всего широтой приложений (см., например, [4–15]). Из современных исследований свойств приведенных модулей отметим работы [16–22]. Приведенный модуль области относительно совокупности из $n \geq 3$ точек этой области введен впервые в [23, 24]. Предельный случай этого модуля, когда граница области стягивается в точку (т. е. приведенный модуль сферы), рассмотрен в [25, 26]. Имеются приложения приведенного модуля комплексной сферы к решению ряда задач об экстремальном разбиении [20, 21, 25, 27, 28], к доказательству теорем искажения [21, 26, 28, 29] и к неравенствам для полиномов [30, 31]. В данной статье понятие приведенного модуля комплексной сферы распространено на случай, когда стягивающиеся в точки пластины обобщенного конденсатора представляют собой произвольные континуумы с заданным изменением логарифмической емкости. Полученная при этом формула для приведенного модуля охватывает все случаи применения формулы [25, 26] и предоставляет, таким образом, больше возможностей для решения сложных задач геометрической теории функций.

Перейдем к точным формулировкам. *Обобщенный конденсатор* (далее *конденсатор*) на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ — тройка $C = (\overline{\mathbb{C}}, \mathscr{E}, \Delta)$, где $\mathscr{E} = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ —

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 14–11–00022).

совокупность замкнутых непустых попарно не пересекающихся множеств E_k, $k=1,\dots,n$, а $\Delta=\{\delta_k\}_{k=1}^n$ — совокупность вещественных чисел δ_k, $k=1,\dots,n$, $n\geq 2$. Множества E_k, $k=1,\dots,n$, называются *пластинами конденсатора* C. *Емкость* $\operatorname{cap} C$ *конденсатора* C определяется как точная нижняя граница интегралов Дирихле

$$I(v,\mathbb{C}):=\iint\limits_{\mathbb{C}}|\nabla v|^2\,dxdy$$

по всем вещественнозначным функциям v, непрерывным в $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющим условию Липшица внутри $\mathbb{C}$ и равным δ_k на E_k, $k=1,\dots,n$. Модуль конденсатора есть величина, обратная его емкости:

$$|C|=\frac{1}{\operatorname{cap} C}$$

($1/0=\infty$). Пусть $Z=\{z_k\}_{k=1}^n$ — совокупность различных конечных точек $\overline{\mathbb{C}}$; $\Delta=\{\delta_k\}_{k=1}^n$ — совокупность вещественных чисел, по крайнем мере два из которых различны; и пусть $\Psi=\{\psi_k(r)\}_{k=1}^n$, где $\psi_k(r)=\mu_k r^{\nu_k}$, $\mu_k,\nu_k,k=1,\dots,n$, — положительные числа. Пусть $\{E_k(r)\}_{r>0}$ — семейство континуумов, удовлетворяющих условиям: логарифмическая емкость[1)] $\operatorname{cap} E_k(r)$ представима в виде $\psi_k(r)(1+o(1))$ при $r\to 0$ и $\operatorname{dist}(z_k,E_k(r))\to 0$, $r\to 0$, $k=1,\dots,n$. Заметим, что в этих условиях континуумы $E_k(r)$ стягиваются соответственно к точкам z_k, $k=1,\dots,n$. Введем обозначения:

$$\nu=\left(\sum_{k=1}^n\frac{(\delta_k-\delta)^2}{\nu_k}\right)^{-1},\quad \delta=\left(\sum_{k=1}^n\frac{\delta_k}{\nu_k}\right)\Big/\sum_{k=1}^n\frac{1}{\nu_k}.$$

Приведенным модулем комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ относительно совокупностей Z, Δ и Ψ назовем предел

$$M(Z,\Delta,\Psi)=\lim_{r\to 0}\left\{\left|(\overline{\mathbb{C}},\{E_k(r)\}_{k=1}^n,\Delta)\right|+\frac{\nu}{2\pi}\log r\right\},\tag{1}$$

если он существует и конечен. Ранее приведенный модуль сферы рассматривался в случае, когда совокупности $\{E_k(r)\}_{r>0}$ представляли собой семейства «почти кругов» радиусов $\psi_k(r)$ с центрами в точках $z_k,k=1,\dots,n$ (см. подробнее [21]). Оказывается, что приведенный модуль (1) не зависит от выбора совокупностей $\{E_k(r)\}_{r>0}$, $k=1,\dots,n$. Более того, справедлива следующая

Теорема 1. *В принятых выше обозначениях приведенный модуль комплексной сферы существует и справедлива формула*

$$M(Z,\Delta,\Psi)=-\frac{\nu^2}{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^n\frac{(\delta_k-\delta)^2}{\nu_k^2}\log\mu_k+\sum_{k=1}^n\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^n\frac{(\delta_k-\delta)(\delta_l-\delta)}{\nu_k\nu_l}\log|z_k-z_l|\right\}.\tag{2}$$

Аналогичный результат имеет место для приведенных модулей областей, отличных от комплексной сферы [33]. Однако основной результат нашей статьи (теорема 1) и результаты в [33] не сводятся друг к другу. Доказательство теоремы 1 приводится в § 3 данной статьи. Перед этим нам необходимо установить несколько вспомогательных утверждений, касающихся в том числе сведе́ния ситуации к конденсаторам, вырождающиеся пластины которых являются «почти кругами».

[1)] С определением и свойствами логарифмической емкости компакта (емкости, трансфинитного диаметра) можно ознакомиться в монографии [32].

§ 2. Вспомогательные утверждения

Пусть z_k, $k = 1, \dots, n$, — фиксированные различные точки плоскости $\mathbb{C}$, $z_n = 0$, и пусть $z_k(r)$, $k = 1, \dots, n-1$, — произвольные функции, заданные на некотором интервале $(0, r_0)$ и удовлетворящие условиям: $z_k(r) \to z_k$ при $r \to 0$, $k = 1, \dots, n-1$. Пусть δ_k, $k = 1, \dots, n$, — вещественные числа, отличные от нуля, и пусть $\psi_k(\rho) = \mu_k \rho^{\nu_k}$, $\rho > 0$, μ_k, ν_k, $k = 1, \dots, n$, — положительные числа. При фиксированных достаточно малых $r > 0$ и ρ, $0 < \rho < 1$, рассмотрим функцию

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \sum_{l=1}^{n-1} \beta_{lk}(\rho, r) \log \left| \frac{z z_l(r)}{z - z_l(r)} \right|, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \left[\{0\} \cup \bigcup_{l=1}^{n-1} \{z_l(r)\} \right], \tag{3}$$

доопределенную в бесконечно удаленной точке по непрерывности. Здесь

$$\beta_{lk}(\rho, r) = \begin{cases} -(\log \psi_k(\rho))^{-1} (\log \psi_l(\rho))^{-1} \log |z_l(r) z_k(r)/(z_l(r) - z_k(r))|, & l \neq k, \\ -(\log \psi_k(\rho))^{-1} [1 + 2(\log \psi_k(\rho))^{-1} \log |z_k(r)|], & l = k, \end{cases}$$

$k, l = 1, \dots, n-1$. Положим

$$E_k^*(\rho, r) = \{z : |z - z_k(r)| < \psi_k(2\rho),\ g(z)/\delta_k \geq 1\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Лемма 1. *В принятых выше обозначениях справедливы асимптотические равенства*

$$|z - z_k(r)| \sim \psi_k(\rho) \quad \text{при } \rho \to 0,\ r \to 0 \text{ равномерно по всем } z \in \partial E_k^*(\rho, r),$$

$k = 1, \dots, n-1$. *Если дополнительно выполняются равенства*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{\nu_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta_k}{\nu_k^2} \log \frac{\mu_n^{\nu_k/\nu_n} |z_k|^2}{\mu_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1,\\ l \neq k}}^{n-1} \frac{\delta_k}{\nu_k \nu_l} \log \left| \frac{z_k z_l}{z_k - z_l} \right| = 0, \tag{4}$$

то выполняется также соотношение

$$|z| \sim \psi_n(\rho), \quad \rho \to 0,\ r \to 0 \text{ равномерно по всем } z \in \partial E_n^*(\rho, r).$$

Доказательство. При фиксированном значении k, $1 \leq k \leq n-1$, и при достаточно малых ρ и r для всех точек $z \in \partial E_k^*(\rho, r)$ выполняется

$$\delta_k = \delta_k \sum_{l=1}^{n-1} \beta_{lk}(\rho, r) \log \left| \frac{z z_l(r)}{z - z_l(r)} \right| + \sum_{\substack{j=1,\\ j \neq k}}^{n-1} \delta_j \sum_{l=1}^{n-1} \beta_{lj}(\rho, r) \log \left| \frac{z z_l(r)}{z - z_l(r)} \right|$$

$$= \delta_k \Bigg\{ -(\log \psi_k(\rho))^{-1} [1 + 2(\log \psi_k(\rho))^{-1} \log |z_k(r)|]$$

$$\times [-\log |z - z_k(r)| + 2 \log |z_k(r)| + o(1)] - \sum_{\substack{l=1,\\ l \neq k}}^{n-1} (\log \psi_k(\rho))^{-1} (\log \psi_l(\rho))^{-1}$$

$$\times \log \left| \frac{z_l(r) z_k(r)}{z_l(r) - z_k(r)} \right| \left[\log \left| \frac{z_l(r) z_k(r)}{z_l(r) - z_k(r)} \right| + o(1) \right] \Bigg\}$$

$$+ \sum_{\substack{j=1,\\ j \neq k}}^{n-1} \delta_j \Bigg\{ -(\log \psi_j(\rho))^{-1} (\log \psi_k(\rho))^{-1} \log \left| \frac{z_k(r) z_j(r)}{z_k(r) - z_j(r)} \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\times[-\log|z-z_k(r)|+2\log|z_k(r)|+o(1)]\\
&-(\log\psi_j(\rho))^{-1}[1+2(\log\psi_j(\rho))^{-1}\log|z_j(r)|]\left[\log\left|\frac{z_k(r)z_j(r)}{z_k(r)-z_j(r)}\right|+o(1)\right]\\
&-\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k,\, l\neq j}}^{n-1}(\log\psi_j(\rho))^{-1}(\log\psi_l(\rho))^{-1}\log\left|\frac{z_l(r)z_j(r)}{z_l(r)-z_j(r)}\right|\left[\log\left|\frac{z_k(r)z_l(r)}{z_k(r)-z_l(r)}\right|+o(1)\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Здесь $o(1)$ означает бесконечно малую при $\rho\to 0$, $r\to 0$ равномерно по z. Поэтому

$$
\delta_k=(\delta_k+o(1))(\log\psi_k(\rho))^{-1}\log|z-z_k(r)|,\quad \rho\to 0,\ r\to 0,
$$

$$
\log|z-z_k(r)|\sim\log\psi_k(\rho),\quad \rho\to 0,\ r\to 0.
$$

Учитывая последнее соотношение в предыдущих вычислениях, заключаем

$$
\begin{aligned}
\delta_k={}&\delta_k\{(\log\psi_k(\rho))^{-1}\log|z-z_k(r)|+[2(\log\psi_k(\rho))^{-1}\log|z_k(r)|](1+o(1))\\
&-2(\log\psi_k(\rho))^{-1}\log|z_k(r)|+o((\log\rho)^{-1})\}\\
&+\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n-1}\delta_j\left\{\left[(\log\psi_j(\rho))^{-1}\log\left|\frac{z_k(r)z_j(r)}{z_k(r)-z_j(r)}\right|\right]\right.\\
&\left.\times(1+o(1))-(\log\psi_j(\rho))^{-1}\log\left|\frac{z_k(r)z_j(r)}{z_k(r)-z_j(r)}\right|+o((\log\rho)^{-1})\right\}\\
&=\delta_k\{(\log\psi_k(\rho))^{-1}\log|z-z_k(r)|+o((\log\rho)^{-1})\}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
|z-z_k(r)|\sim\psi_k(\rho)\quad\text{при } \rho\to 0,\ r\to 0 \text{ равномерно по } z.
$$

При достаточно малом r для точек $z\in\partial E_n^*(\rho,r)$ имеем

$$
\begin{aligned}
\delta_n&=\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k\sum_{l=1}^{n-1}\beta_{lk}(\rho,r)(\log|z|+o(1))\\
&=\left\{-\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k(\log\psi_k(\rho))^{-1}[1+2(\log\psi_k(\rho))^{-1}\log|z_k(r)|]\right.\\
&\left.-\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1}(\log\psi_k(\rho))^{-1}(\log\psi_l(\rho))^{-1}\log\left|\frac{z_l(r)z_k(r)}{z_l(r)-z_k(r)}\right|\right\}(\log|z|+o(1))\\
&=-(\log\psi_n(\rho))^{-1}(\log|z|)\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k\frac{(\log\psi_k(\rho))^{-1}}{(\log\psi_n(\rho))^{-1}}\left[1+2\frac{\log|z_k(r)|}{\nu_k\log\rho}\right]+o\left(\frac{1}{\log\rho}\right)\right.\\
&\left.+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1}\delta_k\frac{(\log\psi_k(\rho))^{-1}}{(\log\psi_n(\rho))^{-1}}(\log\psi_l(\rho))^{-1}\log\left|\frac{z_l(r)z_k(r)}{z_l(r)-z_k(r)}\right|\right\}\\
&=(\log\psi_n(\rho))^{-1}(\log|z|)\left\{\delta_n-\frac{\nu_n}{\log\rho}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\delta_k}{\nu_k^2}\log\frac{\mu^{\nu_k/\nu_n}|z_k(r)|^2}{\mu_k}\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1}\frac{\delta_k}{\nu_k\nu_l}\log\left|\frac{z_l(r)z_k(r)}{z_l(r)-z_k(r)}\right|\Bigg]+o\left(\frac{1}{\log\rho}\right)\Bigg\}$$

$$=(\log\psi_n(\rho))^{-1}(\log|z|)\left\{\delta_n+o\left(\frac{1}{\log\rho}\right)\right\}.$$

В последних равенствах воспользовались соотношением (4). Итоговое равенство дает

$$|z|\sim\psi_n(\rho),\quad \rho\to 0,\ r\to 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если вещественнозначные функции $\varphi_1(\rho,r)$ и $\varphi_2(r)$ удовлетворяют соотношениям $\varphi_1(\rho,r)\sim\rho$, $\rho\to 0$, $r\to 0$, и $\varphi_2(r)\sim r$ при $r\to 0$, то функции*

$$\rho'(r)=\inf\{\rho:\varphi_1(\rho,r)\geq\varphi_2(r)\},\quad \rho''(r)=\sup\{\rho:\varphi_1(\rho,r)\leq\varphi_2(r)\}$$

эквивалентны r при $r\to 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала функцию $\rho''(r)$. По условию леммы справедливы представления

$$\varphi_1(\rho)=\rho(1+\alpha_1(\rho,r)),\quad \varphi_2(r)=r(1+\alpha_2(r)),\tag{5}$$

где $\alpha_1(\rho,r)$ и $\alpha_2(r)$ бесконечно малые при $\rho\to 0$, $r\to 0$. Отсюда

$$r(1+\alpha_2(r))\geq\rho''(r)(1+\inf_{u\leq 2r}\alpha_1(u,r))=\rho''(r)(1+o(1))\geq 0,\quad r\to 0.$$

Следовательно, $\rho''(r)$ бесконечно малая при $r\to 0$ и

$$\rho''(r)\leq r(1+o(1))\quad \text{при } r\to 0.\tag{6}$$

Положим $\alpha(\rho,r):=\sup\limits_{u\leq\rho}\max(|\alpha_1(u,r)|,|\alpha_2(u)|)$. Из условия $\rho(1+\alpha(\rho,r))\leq r(1-\alpha(r,r))$ следует $\rho(1+\alpha_1(\rho,r))\leq r(1+\alpha_2(r))$. Поэтому

$$\rho''(r)\geq\sup\{\rho:\rho(1+\alpha(\rho,r))\leq r(1-\alpha(r,r))\}\geq r(1-2\alpha(r,r)).\tag{7}$$

Последнее неравенство выполняется ввиду

$$r(1-2\alpha(r,r))[1+\alpha(r(1-2\alpha(r,r)),r)]=r+r\alpha(r(1-2\alpha(r,r)),r)-2r\alpha(r,r)$$
$$-2r\alpha(r,r)\alpha(r(1-2\alpha(r,r)),r)\leq r(1-\alpha(r,r))$$

(воспользовались тем, что функция $\alpha(\rho,r)>0$ неубывающая по ρ). Из неравенств (6) и (7) вытекает, что $\rho''(r)\sim r$ при $r\to 0$. Функция $\rho'(r)$ рассматривается аналогично. Из представлений (5) имеем

$$r(1+\alpha_2(r))\leq\rho'(r)(1+\sup_{u\leq 2r}\alpha_1(u,r))=\rho'(r)(1+o(1)),\quad r\to 0.$$

Отсюда

$$\rho'(r)\geq r(1+o(1))\quad \text{при } r\to 0.\tag{8}$$

Из условия $\rho(1-\alpha(\rho,r))\geq r(1+\alpha(r,r))$ следует $\rho(1+\alpha_1(\rho,r))\geq r(1+\alpha_2(r))$. Поэтому

$$\rho'(r)\leq\inf\{\rho:\rho(1-\alpha(\rho,r))\geq r(1+\alpha(r,r))\}\leq r(1+3\alpha(2r,r)),\tag{9}$$

так как

$$r(1+3\alpha(2r,r))[1-\alpha(r(1+3\alpha(2r,r)),r)]$$
$$= r+3r\alpha(2r,r)-r\alpha(r(1+3\alpha(2r,r)),r)[1+3\alpha(2r,r)] \geq r(1+\alpha(r,r)).$$

Неравенства (8) и (9) дают $\rho'(r) \sim r$ при $r \to 0$. Лемма доказана.

Введем обозначения: $U(z_0,R)=\{z:|z-z_0|<R\}$, $V(z_0,R)=\{z:|z-z_0|>R\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $R>0$. Следующее вспомогательное утверждение взято из [33]. Для полноты изложения приведем здесь его доказательство.

Лемма 3. *Предположим, что для некоторой точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и семейства континуумов $\{E(r)\}_{r>0}$ выполняются условия* $\operatorname{cap} E(r) \to 0$ *и* $\operatorname{dist}(z_0, E(r)) \to 0$ *при $r \to 0$, и пусть функция f_r конформно и однолистно отображает внешнюю компоненту*[2] *дополнения континуума $E(r)$ на область $V(z_0, c(r))$ так, что $f_r(\infty)=\infty$, $f_r'(\infty)=1$. Тогда для любого числа $R>0$ при достаточно малом $r>0$ функция f_r представима в виде*

$$f_r(z)=z+\alpha_0(r)+c(r)\tau(z;r), \quad z\in V(z_0,R), \tag{10}$$

где $\alpha_0(r)\to 0$ при $r\to 0$, $\tau(z;r)=O(1)$ при $r\to 0$ равномерно по $z\in V(z_0,R)$ и

$$\tau(z';r)-\tau(z'';r)=O((z'-z'')) \quad \text{при } r\to 0 \tag{11}$$

равномерно по z', z'' в любом круге $U\subset V(z_0,R)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что величина $c(r)$ равна логарифмической емкости континуума $E(r)$ и, следовательно, $c(r)\to 0$ при $r\to 0$. Каждому числу $r>0$ сопоставим некоторую точку $z(r)$ континуума $E(r)$ такую, что $|z_0-z(r)|=\operatorname{dist}(z_0,E(r))$. Обозначим через

$$g_r(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r)\zeta^{-n}$$

функцию, которая конформно и однолистно отображает внешнюю компоненту дополнения континуума

$$\{\zeta:\zeta=(z-z(r))/c(r), z\in E(r)\}$$

на область $|w|>1$. Функция, обратная $g_r(\zeta)$, принадлежит известному классу Σ и не обращается в нуль при $|w|>1$. По теореме 6.11 из [3]

$$|a_0(r)|\leq 2 \quad \text{для любых } r>0.$$

Кроме того, из результата Нетаньяху [34] следует, что для любых $r>0$ и $n=1,2,\dots$ выполняются неравенства

$$|a_n(r)|\leq|b_n|. \tag{12}$$

Здесь функция

$$w=g(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^{-n}$$

[2]Внешней является связная компонента, содержащая бесконечно удаленную точку.

является обратной к функции $\zeta = w + 2 + 1/w$, которая отображает область $|w| > 1$ на внешность отрезка $[0, 4]$. В силу теоремы единственности функция f_r представима в виде

$$f_r(z) = z_0 + c(r)g_r((z - z(r))/c(r)).$$

Отсюда выполняется (10), где $\alpha_0(r) = z_0 - z(r) + c(r)a_0(r) \to 0$ при $r \to 0$ и

$$\tau(z; r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(r)c^n(r)}{(z - z(r))^n}.$$

Покажем равномерную ограниченность $\tau(z; r)$. По заданному $R > 0$ возьмем $r > 0$ такое, что $|z(r) - z_0| < R/2$ и $c(r) < R/10$. Тогда для любых $z \in V(z_0, R)$ с учетом (12) имеем

$$|\tau(z; r)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{|(z - z(r))/c(r)|^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{5^n} = O(1), \quad r \to 0.$$

Для доказательства (11) заметим, что при любых конечных ζ_1 и ζ_2, удовлетворяющих условию $\operatorname{dist}(0, [\zeta_1, \zeta_2]) > 0$, выполняется оценка

$$\left|\zeta_1^{-n} - \zeta_2^{-n}\right| \le n \int\limits_{[\zeta_1, \zeta_2]} |\zeta^{-n-1}||d\zeta| \le n[\operatorname{dist}(0, [\zeta_1, \zeta_2])]^{-n-1}|\zeta_1 - \zeta_2|. \tag{13}$$

По заданному $R > 0$ фиксируем круг $U \subset V(z_0, R)$ и возьмем $r > 0$ такое, что $|z(r) - z_0| < R/2$ и $c(r) < R/(10e)$. Тогда для любых $z', z'' \in U$ с учетом (12) и (13) имеем

$$|\tau(z'; r) - \tau(z'', r)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(r)| n \left(\frac{2c(r)}{R}\right)^{n+1} \left|\frac{z' - z(r)}{c(r)} - \frac{z'' - z(r)}{c(r)}\right|$$

$$\le \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} \frac{|b_n|}{[R/(2ec(r))]^n} |z' - z''| \le \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{5^n} |z' - z''| = O((z' - z'')), \quad r \to 0.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Так как совокупность Δ содержит по крайней мере два различных числа, модуль конденсатора в (1) отличен от бесконечности. Легко убедиться, что в этом случае формула (2) вытекает из следующей асимптотической формулы для емкости конденсатора:

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{C}}, \{E_k(r)\}_{k=1}^n, \Delta\right) = -2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\nu_k \log r} + R\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0, \tag{14}$$

где

$$R = 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\nu_k^2} \log \mu_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1, \\ l \ne k}}^{n} \frac{(\delta_k - \delta)(\delta_l - \delta)}{\nu_k \nu_l} \log |z_k - z_l| \right\}.$$

Поскольку при замене постоянных δ_k на $\delta_k-\delta$, $k=1,\dots,n$, а также при сдвиге всех пластин на одно и то же число емкость конденсатора не изменится, можно считать, что

$$\delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k}{\nu_k}=0,\quad \delta_n\neq 0,\ z_n=0.$$

При отображении $z\mapsto az$, $a>0$, емкость конденсатора в (14) вновь не меняется, в то время как следующие величины преобразуются по правилу: $|z_k|\mapsto a|z_k|$, $\delta_k\mapsto\delta_k$, $\mu_k\mapsto a\mu_k$, $\nu_k\mapsto\nu_k$, $k=1,\dots,n$. Учитывая, что $\delta_n\neq 0$, можно подобрать число a таким образом, чтобы выполнялось второе равенство в (4). Всюду далее считаем, что справедливы оба равенства в (4).

При достаточно малом $r>0$ рассмотрим совокупность функций f_{kr}, $k=1,\dots,n$. Здесь функция f_{1r} отображает внешнюю компоненту дополнения континуума $E_1(r)$ на область $V(z_1,\operatorname{cap}E_1(r))$ так, что $f_{1r}(\infty)=\infty$ и $f'_{1r}(\infty)=1$; f_{2r} отображает внешнюю компоненту дополнения континуума $f_{1r}(E_2(r))$ на область $V(z_2,\operatorname{cap}f_{1r}(E_2(r)))$ так, что $f_{2r}(\infty)=\infty$ и $f'_{2r}(\infty)=1$, и т. д. Функция f_{nr} отображает внешнюю компоненту дополнения континуума $f_{n-1r}(\dots f_{1r}(E_n(r))\dots)$ на область $V(z_n,\operatorname{cap}f_{n-1r}\,(\dots f_{1r}(E_n(r))\dots)$ так, что $f_{nr}(\infty)=\infty$ и $f'_{nr}(\infty)=1$. Функции f_{kr} обладают следующими свойствами. Если некоторое семейство континуумов $\{E(r)\}_{r>0}$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{cap}E(r)\sim\psi_l(r),\ r>0,\ r\to 0,\quad \operatorname{dist}(z_l,E(r))\to 0 \text{ при } r\to 0,$$

$1\le l\le n$, то для любого $k\neq l$, $1\le k\le n$, имеем

(a) $\operatorname{dist}(z_l,f_{kr}(E(r)))\to 0$ при $r\to 0$;

(b) $\operatorname{cap}f_{kr}(E(r))\sim\psi_l(r)$ при $r\to 0$;

(c) если дополнительно

$$\overline{U(z(r),s(r))}\subset E(r)\subset\overline{U(z(r),t(r))},\quad r\to 0,$$

при некоторых $s(r)\sim t(r)\sim\psi_l(r)$, $z(r)\to z_l$, $r\to 0$, то существуют функции $s'(r)\sim t'(r)\sim\psi_l(r)$, $r\to 0$, при которых

$$\overline{U(f_{kr}(z(r)),s'(r))}\subset f_{kr}(E(r))\subset\overline{U(f_{kr}(z(r)),t'(r))},$$

$f_{kr}(z(r))\to z_l$, $r\to 0$. Действительно, ввиду (10) для любой точки $\tilde z(r)$ множества $E(r)$ выполняется

$$|z_l-f_{kr}(\tilde z(r))|=|z_l-\tilde z(r)+o(1)|,\quad r\to 0.$$

Отсюда имеет место (a) и, более того, континуум $f_{kr}(E(r))$ стягивается в точку z_l при $r\to 0$. Учитывая (10) и (11) в некоторой окрестности $U(z_l,R')(f_r=f_{kr})$, получаем

$$|f_{kr}(z')-f_{kr}(z'')|=|z'-z''|(1+o(1)),\quad r\to 0, \tag{15}$$

равномерно по всем $z',z''\in U(z_l,R')$. Отсюда представление логарифмической емкости через трансфинитный диаметр дает свойство (b):

$$\operatorname{cap}f_{kr}(E(r))=\lim_{j\to\infty}\max_{\zeta_l,\zeta_m\in E(r)}\Big\{\prod_{1\le l<m\le j}|f_{kr}(\zeta_l)-f_{kr}(\zeta_m)|\Big\}^{2/[j(j-1)]}$$
$$=(1+o(1))\lim_{j\to\infty}\max_{\zeta_l,\zeta_m\in E(r)}\Big\{\prod_{1\le l<m\le j}|\zeta_l-\zeta_m|\Big\}^{2/[j(j-1)]}$$
$$=(1+o(1))\operatorname{cap}E(r)=\psi_l(r)(1+o(1)),\quad r\to 0.$$

Полагая в соотношении (15) $z' = z(r)$ и $z'' \in \overline{U(z(r),t(r))} \backslash U(z(r),s(r))$, $z'' \in E(r)$, приходим к свойству (c). Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{E}_1(r) = f_{nr}(\dots f_{2r}(\overline{U(z_1, \operatorname{cap} E_1(r))})\dots),$$
$$\widetilde{E}_2(r) = f_{nr}(\dots f_{3r}(\overline{U(z_2, \operatorname{cap} f_{1r}(E_2(r)))})\dots),$$
$$\dots$$
$$\widetilde{E}_n(r) = \overline{U(z_n, \operatorname{cap} f_{n-1r}(\dots f_{1r}(E_n(r))\dots))}.$$

Из свойств (a)–(c) следует, что при любом $k, 1 \le k \le n$, семейство континуумов $\{\widetilde{E}_k(r)\}_{r>0}$ асимптотически круговое, точнее, выполняются включения

$$\overline{U(z_k(r), s_k(r))} \subset \widetilde{E}_k(r) \subset \overline{U(z_k(r), t_k(r))} \tag{16}$$

при некоторых $z_k(r) \to z_k$ и $s_k(r) \sim t_k(r) \sim \psi_k(r)$, $r > 0$, $r \to 0$, $\psi_k(r) = \mu_k r^{\nu_k}$, $k = 1, \dots, n$ $(z_n(r) \equiv z_n = 0)$. Кроме того, конформная инвариантность емкости конденсатора дает

$$\operatorname{cap}\big(\overline{\mathbb{C}}, \{E_k(r)\}_{k=1}^n, \Delta\big) = \operatorname{cap}\big(\overline{\mathbb{C}}, \{\widetilde{E}_k(r)\}_{k=1}^n, \Delta\big). \tag{17}$$

Положим

$$\underline{r}(r) = \min_{1\le k\le n} \psi_k^{-1}(s_k(r)), \quad \overline{r}(r) = \max \psi_k^{-1}(t_k(r)).$$

В условиях леммы 1 положим также

$$r_*(\rho, r) = \min_{1\le k\le n} \psi_k^{-1}(s_k^*(\rho, r)), \quad r^*(\rho, r) = \max_{1\le k\le n} \psi_k^{-1}(t_k^*(\rho, r)),$$

где

$$s_k^*(\rho, r) = \inf\{|z - z_k(r)| : z \in \partial E_k^*(\rho, r)\},$$
$$t_k^*(\rho, r) = \sup\{|z - z_k(r)| : z \in \partial E_k^*(\rho, r)\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Наконец, введем функции

$$\rho'(r) = \inf\{\rho : r_*(\rho, r) \ge \overline{r}(r)\}, \quad \rho''(r) = \sup\{\rho : r^*(\rho, r) \le \underline{r}(r)\}.$$

Предположим, что $\delta_k \ne 0$, $k = 1, \dots, n$. Из лемм 1 и 2 легко заключаем, что $\rho'(r) \sim \rho''(r) \sim r$ при $r \to 0$. Для каждого k, $1 \le k \le n$, справедливы неравенства

$$t_k(r) \le \psi_k(\overline{r}(r)) \le \psi_k(r_*(\tilde\rho'(r), r)) \le s_k^*(\tilde\rho'(r), r),$$
$$s_k(r) \le \psi_k(\underline{r}(r)) \ge \psi_k(r^*(\tilde\rho''(r), r)) \ge t_k^*(\tilde\rho''(r), r),$$

где $\tilde\rho'(r)$ и $\tilde\rho''(r)$ — некоторые функции, удовлетворяющие условиям $\tilde\rho'(r) \sim \rho'(r)$, $\tilde\rho''(r) \sim \rho''(r)$ при $r \to 0$. Отсюда

$$E_k^*(\tilde\rho''(r), r) \subset \widetilde{E}_k(r) \subset E_k^*(\tilde\rho'(r), r), \quad k = 1, \dots, n.$$

Из монотонности емкости получаем

$$\operatorname{cap}\big(\overline{\mathbb{C}}, \{E_k^*(\tilde\rho''(r), r)\}_{k=1}^n, \Delta\big) \le \operatorname{cap}\big(\overline{\mathbb{C}}, \{\widetilde{E}_k(r)\}_{k=1}^n, \Delta\big)$$
$$\le \operatorname{cap}\big(\overline{\mathbb{C}}, \{E_k^*(\tilde\rho'(r), r)\}_{k=1}^n, \Delta\big).$$

Ввиду (17) осталось показать, что асимптотики емкостей конденсаторов в левой и правой частях последнего неравенства совпадают с правой частью (14), где $\delta = 0$. Достаточно рассмотреть один из этих случаев. Функция $g(z)$ (см. (3), где $\rho = \tilde{\rho}'(r))$ гармоническая в $\overline{\mathbb{C}}\setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n}\{z_k(r)\}$ и равна δ_k на границе множества $E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)$, $k = 1, \dots, n$. По принципу Дирихле

$$\operatorname{cap}\big(\overline{\mathbb{C}}, \{E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)\}_{k=1}^n, \Delta\big) = I\left(g, \mathbb{C}\setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)\right).$$

Возьмем число $t > 0$ настолько малым, чтобы множества $\overline{U}(z_k(r), 2t)$ принадлежали пластинам $E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)$, $k = 1, \dots, n$. Применяя формулу Грина и теорему Гаусса, имеем последовательно

$$\begin{aligned}
I\left(g, \mathbb{C}\setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)\right) &= -\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\partial E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)} \delta_k \frac{\partial g}{\partial n}\, ds = -\sum_{k=1}^{n} \delta_k \int\limits_{\partial U(z_k(r), t)} \frac{\partial g}{\partial n}\, ds \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \delta_k \sum_{l=1}^{n-1} \delta_j \sum_{l=1}^{n-1} \beta_{lj}(\tilde{\rho}'(r), r) \int\limits_{\partial U(z_k(r), t)} \frac{\partial}{\partial n} \log\left|\frac{z z_l(r)}{z - z_l(r)}\right| ds \\
&= 2\pi \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} \delta_k(\delta_l - \delta_n)\beta_{kl}(\tilde{\rho}', r) = -2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k(\delta_k - \delta_n)(\log \psi_k(\tilde{\rho}'(r)))^{-1} \\
&\times [1 + 2(\log \psi_k(\tilde{\rho}'(r)))^{-1} \log |z_k(r)|] - 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1} \delta_k(\delta_l - \delta_n)(\log \psi_k(\tilde{\rho}'(r)))^{-1} \\
&\times (\log \psi_l(\tilde{\rho}'(r)))^{-1} \log\left|\frac{z_k(r) z_l(r)}{z_k(r) - z_l(r)}\right| = -2\pi \Bigg\{ \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k(\delta_k - \delta_n)\Bigg[\frac{1}{\nu_k \log r} \\
&+ \frac{1}{\nu_k^2}\left(\log \frac{|z_k|^2}{\mu_k}\right)\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\Bigg] + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1} \Bigg[\delta_k(\delta_l - \delta_n) \\
&\times \frac{1}{\nu_k \nu_l} \log\left|\frac{z_k z_l}{z_k - z_l}\right|\Bigg]\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\Bigg\} + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right) \\
&- 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} + 2\pi \Bigg\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \mu_k + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1} \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} \log |z_k - z_l| \\
&- \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} \frac{\delta_k\delta_l}{\nu_k \nu_l} \log|z_k z_l| + \delta_n \Bigg[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta_k}{\nu_k^2} \log \frac{\mu_n^{\nu_k/\nu_n} |z_k|^2}{\mu_k} \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1} \frac{\delta_k}{\nu_k \nu_l} \log\left|\frac{z_k z_l}{z_k - z_l}\right|\Bigg]\Bigg\}\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right) \\
&- 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} + 2\pi \Bigg\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \mu_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n} \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} \log |z_k - z_l| \Bigg\}\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 \\
&+ o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0.
\end{aligned}$$

Здесь $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внешней нормали. Мы воспользовались леммой 2 и равенствами (4). Итак, асимптотическая формула (14) доказана в случае, когда все δ_k, $k = 1, \dots, n$, отличны от нуля.

Пусть $\delta_k = 0$ при $k = 1, \dots, m$ и $\delta_k \neq 0$ в случае $k = m+1, \dots, n$ при некотором m, $1 \leq m \leq n-2$. Пусть $g(z)$ — функция, построенная выше (см. (3), где $\rho = \tilde{\rho}'(r)$), но с суммированием от $m+1$ до $n-1$, и пусть $E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)$ — соответствующие множества, порожденные этой функцией, $k = m+1, \dots, n$. При достаточно малых значениях r и R, $t_k(r) < R$, $k = 1, \dots, m$, рассмотрим вспомогательные функции

$$h_k(z) = M_k(r)\left(\log\left|\frac{z - z_k(r)}{t_k(r)}\right|\right)/\log\frac{R}{t_k(r)}, \quad z \in \overline{U(z_k(r), R)} \backslash U(z_k(r), t_k(r)),$$

где $M_k(r) = \max\{|g(z)| : z \in \overline{U(z_k(r), R)}\} = O((\log r)^{-1})$, $r \to 0$, $k = 1, \dots, m$. С учетом (16) получаем, что функция

$$h(z) = \begin{cases} g(z), & z \notin \bigcup\limits_{k=1}^{m} \overline{U(z_k(r), R)}, \\ \max\{\min[g(z), h_k(z)], -h_k(z)\}, & z \in \overline{U(z_k(r), R)} \backslash U(z_k(r), t_k(r)), \\ 0, & z \in U(z_k(r), t_k(r)),\ 1 \leq k \leq m, \end{cases}$$

локально липшицева в $\mathbb{C} \backslash \bigcup\limits_{k=m+1}^{n} \{z_k(r)\}$, равна нулю на $\widetilde{E}_k(r)$, $k = 1, \dots, m$, и равна δ_k на $\partial E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)$, $k = m+1, \dots, n$. Из монотонности емкости и принципа Дирихле имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}\bigl(\overline{\mathbb{C}}, \{\widetilde{E}_k(r)\}_{k=m+1}^{n}\{\delta_k\}_{k=m+1}^{n}\bigr) &\leq \operatorname{cap}\bigl(\overline{\mathbb{C}}, \{\widetilde{E}_k(r)\}_{k=1}^{n}, \Delta\bigr) \\ &\leq \operatorname{cap}(\overline{\mathbb{C}}, \{\widetilde{E}_1(r), \dots, \widetilde{E}_m(r), E_{m+1}^*(\tilde{\rho}'(r), r), \dots, E_n^*(\tilde{\rho}'(r), r)\}, \Delta) \\ &\leq I\left(h, \mathbb{C} \backslash \bigcup_{k=m+1}^{n} E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, простые вычисления дают

$$\begin{aligned} I\left(h, \mathbb{C} \backslash \bigcup_{k=m+1}^{n} E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)\right) &\leq I\left(g, \mathbb{C} \backslash \bigcup_{k=m+1}^{n} E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m} I(h_k, U(z_k(r), R) \backslash U(z_k(r), t_k(r))) \\ &= \operatorname{cap}\bigl(\overline{\mathbb{C}}, \{E_k^*(\tilde{\rho}'(r), r)\}_{k=m+1}^{n}, \{\delta_k\}_{k=m+1}^{n}\bigr) + o((\log r)^{-2}), \quad r \to 0 \end{aligned}$$

(R фиксировано, $\tilde{\rho}'(r) \sim r$ при $r \to 0$). Применяя формулу (14) для первой и последней емкостей в выписанных соотношениях, заключаем, что эта формула имеет место также для емкости $\operatorname{cap}\bigl(\overline{\mathbb{C}}, \{\widetilde{E}_k(r)\}_{k=1}^{n}, \Delta\bigr)$ ($\delta = 0$). Отсюда следует равенство (2). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlfors L. V., Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math. 1950. V. 83, N 1/2. P. 101–129.
2. *Хейман В. К.* Многолистные функции. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
3. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

4. *Pfluger A.* Extremallängen und Kapazität // Comment. Math. Helv. 1955. Bd 29. S. 120–131.

5. *Wittich H.* Zur Konformen Abbildung schlichter Gebiete // Math. Nachr. 1958. Bd 16. S. 226–234.

6. *Митюк И. П.* Обобщенный приведенный модуль и некоторые его применения // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 110–119.

7. *Миклюков В. М.* О некоторых граничных задачах теории конформных отображений // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 5. С. 1111–1124.

8. *Кузьмина Г. В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. Ленигр. отд-ние. 1980. Т. 139. С. 5–241.

9. *Кузьмина Г. В.* Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с полосообразными областями в структуре траекторий // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 154. С. 110–129.

10. *Емельянов Е. Г.* К задачам об экстремальном разбиении // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 154. С. 76-89.

11. *Солынин А. Ю.* Модули и экстремально-метрические проблемы // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 1. С. 3–86.

12. *Gaier D., Hayman W.* On the computation of modules of long quadrilaterals // Constr. Approx. 1991. V. 7. P. 453–467.

13. *Дубинин В. Н., Эйрих Н. В.* Обобщенный приведенный модуль // Дальневост. мат. журн. 2002. Т. 3, № 2. С. 148–162.

14. *Дубинин В. Н.* Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2003. Т. 302. С. 38–51.

15. *Дубинин В. Н., Прилепкина Е. Г.* О сохранении обобщенного приведенного модуля при геометрических преобразованиях плоских областей // Дальневост. мат. журн. 2005. Т. 6, № 1–2. С. 39–56.

16. *Асеев В. В., Лазарева О. А.* О непрерывности приведенного модуля и трансфинитного диаметра // Изв. вузов. Математика. 2006. № 10. С. 10–18.

17. *Асеев В. В.* Обобщенный приведенный модуль в пространственных задачах емкостной томографии // Дальневост. мат. журн. 2007. Т. 7, № 1–2. С. 17–29.

18. *Насыров С. Р.* Вариации емкостей Робена и их приложения // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1128–1146.

19. *Асеев В. В.* NED-множества, лежащие в гиперплоскости // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 967–986.

20. *Дубинин В. Н.* О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 10. С. 25–38.

21. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функции комплексного переменного. Владивосток: Дальнаука, 2009.

22. *Лазарева О. А.* Емкостные свойства равномерно совершенных множеств и конденсаторов. Lambert Acad. Publ. GmbH & Co. KG., 2012.

23. *Дубинин В. Н.* Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 774–792.

24. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 237. С. 56–73.

25. *Дубинин В. Н.* Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций // Докл. АН. 1998. Т. 363, № 6. С. 731–734.

26. *Дубинин В. Н., Ковалев Л. В.* Приведенный модуль комплексной сферы // Зап. науч. семин. ПОМИ. 1998. Т. 254. С. 76–94.

27. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008.

28. *Дубинин В. Н., Эйрих Н. В.* Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 51–74.

29. *Дубинин В. Н., Ким В. Ю.* Обобщенные конденсаторы и теоремы о граничном искажении при конформном отображении // Дальневост. мат. журн. 2013. Т. 13, № 2. С. 196–208.

30. *Дубинин В. Н., Ким В. Ю.* Приведенные модули и неравенства для полиномов // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2000. Т. 263. С. 70–83.

31. *Дубинин В. Н.* Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, № 4. С. 3–88.

32. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

33. *Дубинин В. Н.* Асимптотическое поведение емкости конденсатора при стягивании некоторых его пластин в точки // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 194–206.

34. *Netanyahu E.* Extremal problems for schlicht functions in the exterior of the unit circle // Canad. J. Math. 1965. V. 17. P. 335–341.

Статья поступила 1 апреля 2014 г.

Дубинин Владимир Николаевич
Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8, Владивосток 690000;
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
dubinin@iam.dvo.ru