Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 517.9

О C^*–АЛГЕБРЕ, ПОРОЖДЕННОЙ ОПЕРАТОРАМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СВЕРТКИ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О. Г. Авсянкин

Аннотация. Рассматривается C^*-алгебра, порожденная операторами мультипликативной дискретной свертки и операторами умножения на осциллирующие коэффициенты. Для этой алгебры построено операторное символическое исчисление, в терминах которого получены необходимые и достаточные условия нётеровости операторов.

Ключевые слова: мультипликативная дискретная свертка, C^*-алгебра, изоморфизм, группа, символ, нётеровость, обратимость.

Введение. В настоящее время имеется достаточно полная теория интегральных операторов с однородными ядрами (см., например, [1–5] и цитированные в них источники). Дискретные операторы с однородными ядрами (их называют *операторами мультипликативной дискретной свертки*) исследованы значительно меньше. В отличие от одномерного континуального случая такие операторы не сводятся к операторам свертки и для их исследования требуются совершенно иные подходы. Впервые эти операторы введены и изучены в [6, 7]. В [8] построена и исследована банахова алгебра, порожденная операторами мультипликативной дискретной свертки. Для этой алгебры построено символическое исчисление, в терминах которого были получены критерий нётеровости операторов и формула для вычисления их индекса.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [8]. Она посвящена изучению C^*-алгебры $\mathfrak{B}$, порожденной операторами мультипликативной дискретной свертки и операторами умножения на осциллирующие коэффициенты вида $n^{i\alpha}(= e^{i\alpha \ln n})$. Подчеркнем, что коэффициенты $n^{i\alpha}$ играют в теории мультипликативных дискретных сверток ту же роль, что и коэффициенты вида $e^{i\alpha n}$ в теории обычных дискретных сверток. Упомянутая алгебра $\mathfrak{B}$ существенно некоммутативна, а потому не имеет скалярного символа. Для исследования этой алгебры используется подход А. Б. Антоневича, основанный на теории C^*-алгебр, порожденных динамическими системами [9, гл. II]. Этот подход позволяет построить для C^*-алгебры $\mathfrak{B}$ операторное символическое исчисление, в терминах которого получен критерий нётеровости[1)] операторов из этой алгебры. В заключительной части работы выделен класс операторов из алгебры $\mathfrak{B}$, для которых указаны эффективное скалярное условие нётеровости и формула для вычисления их индекса.

[1)] Линейный ограниченный оператор A называется *нётеровым*, если его образ замкнут, а ядро оператора A и ядро сопряженного оператора A^* конечномерны.

Ниже использованы следующие обозначения: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, вещественных и комплексных чисел соответственно; $\dot{\mathbb{R}}$ — компактификация $\mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой; $\mathscr{L}(X)$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X; $n^{i\alpha} = e^{i\alpha \ln n}$; $\ell_2 = \ell_2(\mathbb{N})$ — банахово пространство комплексных последовательностей $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2 < \infty$.

1. Предварительные сведения. Приведенные ниже факты подробно изложены в [9, § 6–8; 10].

Определение 1. Пусть $\mathfrak{B}$ — C^*-алгебра, $\mathfrak{A}$ — C^*-подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, T — унитарное представление группы G в $\mathfrak{B}$, и пусть выполнены следующие аксиомы:

1) $T(g)aT^{-1}(g) \in \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{A}$, $g \in G$;

2) множество $\mathfrak{B}^0$ конечных сумм вида $\sum\limits_i a_i T(g_i)$, где $a_i \in \mathfrak{A}$, $g_i \in G$, плотно по норме в алгебре $\mathfrak{B}$.

Тогда говорят, что C^*-алгебра $\mathfrak{B}$ *порождена C^*-алгеброй* $\mathfrak{A}$ *и представлением* T группы G, и пишут $\mathfrak{B} = C^*(\mathfrak{A}, G, T)$.

Напомним, что представление T группы G в $\mathfrak{B}$ называется *унитарным*, если для любого $g \in G$ элемент $T(g) \in \mathfrak{B}$ унитарный.

Условие 1 означает, что каждый элемент $T(g)$ порождает отображение

$$\widehat{T}_g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}, \quad a \to T(g)aT^{-1}(g),$$

являющееся автоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$.

В [9, 10] предполагалось, что C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ $*$-изоморфна алгебре $\mathrm{END}(\mathscr{E})$ эндоморфизмов N-мерного комплексного векторного расслоения $\mathscr{E}$ над компактным топологическим пространством $\mathscr{X}$. При этом считалось, что на расслоении $\mathscr{E}$ зафиксирована эрмитова метрика, т. е. в каждом слое $\mathscr{E}_x$, где $x \in \mathscr{X}$, задано скалярное произведение, непрерывно зависящее от x. Если C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна (соответствует случаю $N = 1$), то она $*$-изоморфна алгебре $C(\mathscr{X})$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — C^*-алгебра вышеуказанного типа. Каждый автоморфизм $\widehat{T}_g$ алгебры $\mathfrak{A}$ порождает гомеоморфизм $\pi_g : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. Гомеоморфизмы π_g задают действие группы G на пространстве $\mathscr{X}$.

Определение 2. Действие группы G на алгебре $\mathfrak{A}$ автоморфизмами называется *топологически свободным*, если для любого конечного набора F элементов группы G и любого открытого множества $\mathscr{W} \subset \mathscr{X}$ существует точка $x_0 \in \mathscr{W}$ такая, что все точки $\pi_g(x_0)$, $g \in F$, попарно различны.

Это определение эквивалентно тому, что для каждого отображения π_g при $g \neq e$ у множества неподвижных точек внутренность пуста.

Предложение 1 (теорема об изоморфизме [9, § 7]). *Пусть заданы C^*-алгебры $\mathfrak{B} = C^*(\mathfrak{A}, G, T)$ и $\mathfrak{B}_1 = C^*(\mathfrak{A}_1, G, T_1)$ с одной и той же группой G, и пусть существует $*$-изоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1$ такой, что*

$$\varphi(T(g)aT^{-1}(g)) = T_1(g)\varphi(a)T_1^{-1}(g).$$

Если C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\mathrm{END}(\mathscr{E})$ эндоморфизмов N-мерного комплексного векторного расслоения $\mathscr{E}$, а группа G допустима и действует на $\mathfrak{A}$

автоморфизмами топологически свободно, то соответствие

$$\Phi : \sum_i a_i T(g_i) \to \sum_i \varphi(a_i) T_1(g_i)$$

продолжается с множества $\mathfrak{B}^0$ конечных сумм до $*$-изоморфизма C^*-алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$.

Определение допустимой группы можно найти, например, в [9, § 7]. Отметим только, что всякая абелева группа допустима.

2. C^*-алгебра $\mathfrak{B}$ и ее структура. В пространстве ℓ_2 определим оператор H формулой

$$(H\varphi)_m = \sum_{n=1}^{\infty} k(m,n)\varphi_n, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, а функция $k(x,y)$ определена на $(0,\infty)\times(0,\infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

1°) однородность степени (-1), т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-1} k(x,y), \quad \alpha > 0;$$

2°) суммируемость, т. е.

$$\kappa = \int_0^{\infty} |k(1,y)| y^{-1/2}\, dy < \infty;$$

3°) функция $|k(1,y)|y^{1/2}$ имеет на $(0,\infty)$ ограниченное изменение, т. е.

$$v = \bigvee_0^{\infty} [|k(1,y)|y^{1/2}] < \infty,$$

где $\bigvee_0^{\infty}[|k(1,y)|y^{1/2}]$ — полное изменение данной функции.

Оператор H называется *оператором мультипликативной дискретной свертки.* Известно (см. [6]), что он ограничен в пространстве ℓ_2, причем $\|H\| \leqslant \kappa + v$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую C^*-подалгебру C^*-алгебры $\mathscr{L}(\ell_2)$, содержащую все операторы вида $\lambda I + H + K$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а K — компактный в ℓ_2 оператор. В [8] для алгебры $\mathfrak{A}$ построено символическое исчисление, т. е. каждому оператору $A \in \mathfrak{A}$ поставлена в соответствие некоторая функция $\sigma_A(\xi) \in C(\dot{\mathbb{R}})$, называемая *символом оператора* A. Символ оператора $\lambda I + H$ определяется следующим образом:

$$\sigma_{\lambda I + H}(\xi) = \lambda + \int_0^{\infty} k(1,y) y^{-1/2+i\xi}\, dy, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и $\sigma_{\lambda I+H}(\infty) = \lambda$. Далее, множество $\mathscr{K} = \mathscr{K}(\ell_2)$ всех компактных операторов, действующих в пространстве ℓ_2, является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\mathscr{K}$. Определим символ $\sigma_{[A]}(\xi)$ фактор-класса $A + \mathscr{K}$ равенством $\sigma_{[A]}(\xi) = \sigma_A(\xi)$ (это корректно, поскольку все операторы из множества $A + \mathscr{K}$ имеют одинаковый символ, см. [8]). В [8] показано, что C^*-алгебра $\mathfrak{A}/\mathscr{K}$ коммутативна, а ее пространство максимальных идеалов, снабженное топологией Гельфанда, гомеоморфно компакту $\dot{\mathbb{R}}$. Из вышесказанного с учетом теоремы Гельфанда — Наймарка (см., например, [11, разд. 2.1]) вытекает

Лемма 1. *Отображение*

$$s : \mathfrak{A}/\mathscr{K} \to C(\dot{\mathbb{R}}), \quad A + \mathscr{K} \to \sigma_{[A]}(\xi), \tag{3}$$

является $*$-изоморфизмом.

Определим в пространстве ℓ_2 оператор M_α, где $\alpha \in \mathbb{R}$, равенством

$$(M_\alpha \varphi)_n = n^{i\alpha} \varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ оператор $A_\alpha = M_\alpha A M_\alpha^{-1}$ принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $A = H$, где H — оператор вида (1). Нетрудно видеть, что оператор $H_\alpha = M_\alpha H M_\alpha^{-1}$ задается формулой

$$(H_\alpha \varphi)_m = \sum_{n=1}^{\infty} k_\alpha(m, n) \varphi_n, \quad m \in \mathbb{N},$$

где

$$k_\alpha(x, y) = k(x, y)(x/y)^{i\alpha}. \tag{5}$$

Так как функция $k_\alpha(x, y)$ удовлетворяет условиям 1°–3°, то $H_\alpha \in \mathfrak{A}$.

Рассмотрим оператор

$$A = \sum_i \prod_j (\lambda_{ij} I + H_{ij} + K_{ij}), \tag{6}$$

где H_{ij} — операторы вида (1), $K_{ij} \in \mathscr{K}$, а сумма и произведение конечны. Тогда

$$A_\alpha = \sum_i \prod_j M_\alpha(\lambda_{ij} I + H_{ij} + K_{ij}) M_\alpha^{-1} = \sum_i \prod_j (\lambda_{ij} I + (H_{ij})_\alpha + (K_{ij})_\alpha),$$

откуда вытекает, что $A_\alpha \in \mathfrak{A}$.

Пусть A — произвольный оператор из $\mathfrak{A}$. Так как множество $\mathfrak{A}_0$, состоящее из всех операторов вида (6), всюду плотно в алгебре $\mathfrak{A}$, найдется такая последовательность $\{A_s\} \subset \mathfrak{A}_0$, что $\|A - A_s\| \to 0$ при $s \to \infty$. Тогда $\|A_\alpha - (A_s)_\alpha\| \to 0$. Поскольку $(A_s)_\alpha \in \mathfrak{A}$, то $A_\alpha \in \mathfrak{A}$. $\square$

Обозначим через $\mathfrak{B}$ C^*-алгебру, порожденную всеми операторами A из алгебры $\mathfrak{A}$ и всеми операторами M_α. Очевидно, что множество $\mathscr{K}$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{B}$. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathfrak{B}/\mathscr{K}$, которая является C^*-подалгеброй C^*-алгебры $\mathscr{L}(\ell_2)/\mathscr{K}$. Она представляет собой замыкание по норме алгебры $\mathscr{L}(\ell_2)/\mathscr{K}$ множества

$$(\mathfrak{B}/\mathscr{K})_0 = \Big\{ \sum_i \prod_j A_{ij} M_{\alpha_{ij}} + \mathscr{K} \Big\},$$

где суммы и произведения конечны.

Рассмотрим совокупность всех элементов вида $M_\alpha + \mathscr{K}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, принадлежащих C^*-алгебре $\mathscr{L}(\ell_2)/\mathscr{K}$. Нетрудно видеть, что элемент $M_\alpha + \mathscr{K}$ унитарный, причем $(M_\alpha + \mathscr{K})(M_\beta + \mathscr{K}) = M_{\alpha+\beta} + \mathscr{K}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Следовательно, гомоморфизм

$$T_M : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\ell_2)/\mathscr{K}, \quad \alpha \to M_\alpha + \mathscr{K},$$

является унитарным представлением группы $\mathbb{R}$.

Лемма 3. *C^*-алгебра $\mathfrak{B}/\mathscr{K}$ порождена C^*-алгеброй $\mathfrak{A}/\mathscr{K}$ и унитарным представлением T_M группы $\mathbb{R}$, т. е. $\mathfrak{B}/\mathscr{K} = C^*(\mathfrak{A}/\mathscr{K}, \mathbb{R}, T_M)$.*

Доказательство. Воспользуемся определением 1. Из леммы 2 следует, что для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ элемент $(M_\alpha + \mathscr{K})(A + \mathscr{K})\bigl(M_\alpha^{-1} + \mathscr{K}\bigr)$ принадлежит алгебре $\mathfrak{A}/\mathscr{K}$, т. е. аксиома 1 выполнена.

Проверим аксиому 2, т. е. докажем, что множество

$$(\mathfrak{B}/\mathscr{K})^0 = \Bigl\{\sum_i A_i M_{\alpha_i} + \mathscr{K}\Bigr\},$$

где суммы конечны, всюду плотно в алгебре $\mathfrak{B}/\mathscr{K}$. Для этого покажем, что $(\mathfrak{B}/\mathscr{K})^0 = (\mathfrak{B}/\mathscr{K})_0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить равенство

$$A_1 M_{\alpha_1} A_2 M_{\alpha_2} = A_3 M_{\alpha_1+\alpha_2} + K, \tag{7}$$

где $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A}$ и $K \in \mathscr{K}$. В самом деле, $A_1 M_{\alpha_1} A_2 M_{\alpha_2} = A_1 (A_2)_{\alpha_1} M_{\alpha_1+\alpha_2}$, причем по лемме 2 оператор $(A_2)_{\alpha_1} = M_{\alpha_1} A_2 M_{\alpha_1}^{-1}$ принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$. Учитывая, что $A_1(A_2)_{\alpha_1} = A_3 + K$, где $A_3 \in \mathfrak{A}$, $K \in \mathscr{K}$ (см. [8]), получаем равенство (7). $\square$

Всякий оператор M_α вида (4) порождает отображение

$$\widehat{M}_\alpha : \mathfrak{A}/\mathscr{K} \to \mathfrak{A}/\mathscr{K}, \quad A + \mathscr{K} \to M_\alpha A M_\alpha^{-1} + \mathscr{K},$$

которое является автоморфизмом C^*-алгебры $\mathfrak{A}/\mathscr{K}$.

Лемма 4. *Действие группы $\mathbb{R}$ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}/\mathscr{K}$ автоморфизмами $\widehat{M}_\alpha$ топологически свободное.*

Доказательство. В силу леммы 1 каждый автоморфизм $\widehat{M}_\alpha$ порождает автоморфизм $\widehat{F}_\alpha = s \circ \widehat{M}_\alpha \circ s^{-1}$ алгебры $C(\dot{\mathbb{R}})$. Найдем формулу для $\widehat{F}_\alpha$. Пусть $\sigma(\xi)$ — произвольная функция из $C(\dot{\mathbb{R}})$ и $s^{-1}(\sigma) = A + \mathscr{K}$, так что $\sigma(\xi) = \sigma_{[A]}(\xi)$. Так как $\widehat{M}_\alpha(A + \mathscr{K}) = A_\alpha + \mathscr{K}$, где $A_\alpha = M_\alpha A M_\alpha^{-1}$, остается найти $s(A_\alpha + \mathscr{K})$, т. е. вычислить символ $\sigma_{[A_\alpha]}(\xi)$ элемента $A_\alpha + \mathscr{K}$.

Рассмотрим два случая.

1. Если $A = H$, где H — оператор вида (1), то, учитывая формулы (2) и (5), получим

$$\sigma_{[H_\alpha]}(\xi) = \int_0^\infty k_\alpha(1, y) y^{-1/2+i\xi}\, dy = \int_0^\infty k(1, y) y^{-1/2+i(\xi-\alpha)}\, dy = \sigma_{[H]}(\xi - \alpha).$$

2. Пусть A — произвольный оператор из алгебры $\mathfrak{A}$. Поскольку множество $(\mathfrak{A}/\mathscr{K})_0$, состоящее из всех элементов вида $\lambda I + H + \mathscr{K}$, всюду плотно в алгебре $\mathfrak{A}/\mathscr{K}$, найдется такая последовательность $\{\lambda_j I + H_j + \mathscr{K}\}$, что

$$\|A - (\lambda_j I + H_j) + \mathscr{K}\|_{\mathfrak{A}/\mathscr{K}} \to 0.$$

Тогда $\|A_\alpha - (\lambda_j I + H_j)_\alpha + \mathscr{K}\|_{\mathfrak{A}/\mathscr{K}} \to 0$. По доказанному выше

$$\sigma_{[\lambda_j I + (H_j)_\alpha]}(\xi) = \sigma_{[\lambda_j I + H_j]}(\xi - \alpha), \quad \xi \in \dot{\mathbb{R}}. \tag{8}$$

Так как $*$-изоморфизм является изометрией [11, разд. 3.1], из леммы 1 следует, что для любого оператора $A \in \mathfrak{A}$ имеет место равенство

$$\sup_{\xi \in \dot{\mathbb{R}}} |\sigma_{[A]}(\xi)| = \|A + \mathscr{K}\|_{\mathfrak{A}/\mathscr{K}}.$$

Учитывая это и переходя в (8) к пределу при $j \to \infty$, получаем равенство

$$\sigma_{[A_\alpha]}(\xi) = \sigma_{[A]}(\xi - \alpha), \quad \xi \in \dot{\mathbb{R}}, \tag{9}$$

из которого, в частности, вытекает, что $\sigma_{[A_\alpha]}(\infty) = \sigma_{[A]}(\infty)$.

Из (9) следует, что автоморфизм $\widehat{F}_\alpha$ задается формулой

$$(\widehat{F}_\alpha\sigma)(\xi) = \begin{cases} \sigma(\xi - \alpha), & \xi \in \mathbb{R}, \\ \sigma(\infty), & \xi = \infty, \end{cases}$$

где $\sigma(\xi)$ — произвольная функция из $C(\dot{\mathbb{R}})$. В свою очередь, автоморфизм $\widehat{F}_\alpha$ порождает гомеоморфизм π_α компактного топологического пространства $\dot{\mathbb{R}}$, который определяется следующим образом:

$$\pi_\alpha(\xi) = \begin{cases} \xi + \alpha, & \xi \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \xi = \infty. \end{cases}$$

Таким образом, если $\alpha \neq 0$, то единственной неподвижной точкой гомеоморфизма π_α является бесконечно удаленная точка. Но это означает, что группа $\mathbb{R}$ действует на C^*-алгебре $\mathfrak{A}/\mathscr{K}$ автоморфизмами топологически свободно (см. п. 1). $\square$

3. Критерий нётеровости в C^*-алгебре $\mathfrak{B}$. Пусть $\sigma(\xi) \in C(\dot{\mathbb{R}})$. Определим в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ оператор $\mathbb{M}_\sigma$ равенством

$$(\mathbb{M}_\sigma f)(\xi) = \sigma(\xi) f(\xi). \tag{10}$$

Обозначим через $\mathfrak{D}$ C^*-алгебру, порожденную всеми операторами умножения $\mathbb{M}_\sigma$ на функции из $C(\dot{\mathbb{R}})$. Используя свойства оператора умножения, легко проверить, что отображение

$$\mu : C(\dot{\mathbb{R}}) \to \mathfrak{D}, \quad \sigma(\xi) \to \mathbb{M}_\sigma \tag{11}$$

является $*$-изоморфизмом.

Далее, в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор сдвига

$$(U_\alpha f)(\xi) = f(\xi - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что гомоморфизм

$$T_U : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(L_2(\mathbb{R})), \quad \alpha \to U_\alpha,$$

является унитарным представлением группы $\mathbb{R}$.

C^*-алгебру, порожденную всеми операторами $\mathbb{M}_\sigma$ вида (10) и всеми операторами U_α вида (12), обозначим через $\mathfrak{B}_1$. Она представляет собой замыкание в равномерной операторной топологии множества

$$(\mathfrak{B}_1)_0 = \Big\{ \sum_i \prod_j \mathbb{M}_{\sigma_{ij}} U_{\alpha_{ij}} \Big\},$$

где суммы и произведения конечны.

Лемма 5. *C^*-алгебра $\mathfrak{B}_1$ порождена C^*-алгеброй $\mathfrak{D}$ и унитарным представлением T_U группы $\mathbb{R}$, т. е. $\mathfrak{B}_1 = C^*(\mathfrak{D}, \mathbb{R}, T_U)$.*

Доказательство. Для любой функции $\sigma(\xi) \in C(\dot{\mathbb{R}})$ и для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $U_\alpha \mathbb{M}_\sigma U_\alpha^{-1} = \mathbb{M}_{\sigma_\alpha}$, где $\sigma_\alpha(\xi) = \sigma(\xi - \alpha)$. Следовательно, $U_\alpha \mathbb{M}_\sigma U_\alpha^{-1} \in \mathfrak{D}$, т. е. аксиома 1 из определения 1 выполнена.

Проверим аксиому 2, т. е. докажем, что множество

$$\mathfrak{B}_1^0 = \Big\{ \sum_i \mathbb{M}_{\sigma_i} U_{\alpha_i} \Big\},$$

где суммы конечны, всюду плотно в алгебре $\mathfrak{B}_1$. Для этого покажем, что $\mathfrak{B}_1^0 = (\mathfrak{B}_1)_0$. Последнее вытекает из легко проверяемого равенства

$$\mathbb{M}_{\sigma_1} U_{\alpha_1} \mathbb{M}_{\sigma_2} U_{\alpha_2} = \mathbb{M}_\sigma U_{\alpha_1 + \alpha_2},$$

где $\sigma(\xi) = \sigma_1(\xi)\sigma_2(\xi - \alpha_1)$. Таким образом, $\mathfrak{B}_1 = C^*(\mathfrak{D}, \mathbb{R}, T_U)$. $\square$

Рассмотрим отображение

$$s_1 : \mathfrak{A}/\mathscr{K} \to \mathfrak{D}, \quad A + \mathscr{K} \to \mathbb{M}_{\sigma_{[A]}},$$

где $\sigma_{[A]}(\xi)$ — символ фактор-класса $A + \mathscr{K}$. Так как $s_1 = \mu \circ s$, где s и μ определяются из (3) и (11) соответственно, отображение s_1 является $*$-изоморфизмом.

Теорема 1. *Соответствие*

$$\gamma_0 : (\mathfrak{B}/\mathscr{K})^0 \to \mathfrak{B}_1^0, \quad \sum_i A_i M_{\alpha_i} + \mathscr{K} \to \sum_i s_1(A_i + \mathscr{K}) U_{\alpha_i},$$

определенное на множестве конечных сумм $(\mathfrak{B}/\mathscr{K})^0$, продолжается до $*$-изоморфизма $\gamma : \mathfrak{B}/\mathscr{K} \to \mathfrak{B}_1$.

Доказательство. Покажем, что выполнены все условия теоремы об изоморфизме (предложение 1). В силу (9) имеем

$$s_1\big((M_\alpha + \mathscr{K})(A + \mathscr{K})\big(M_\alpha^{-1} + \mathscr{K}\big)\big) = s_1(A_\alpha + \mathscr{K}) = \mathbb{M}_{\sigma_{[A]}(\xi - \alpha)}.$$

Учитывая, что $\mathbb{M}_{\sigma_{[A]}(\xi-\alpha)} = U_\alpha \mathbb{M}_{\sigma_{[A]}(\xi)} U_\alpha^{-1}$, получаем равенство

$$s_1\big((M_\alpha + \mathscr{K})(A + \mathscr{K})\big(M_\alpha^{-1} + \mathscr{K}\big)\big) = U_\alpha s_1(A + \mathscr{K}) U_\alpha^{-1}.$$

Далее, C^*-алгебра $\mathfrak{A}/\mathscr{K}$ $*$-изоморфна C^*-алгебре $C(\dot{\mathbb{R}})$ (лемма 1), а группа $\mathbb{R}$ допустима и действует на алгебре $\mathfrak{A}/\mathscr{K}$ автоморфизмами топологически свободно (лемма 4). Применяя предложение 1, получаем, что γ_0 продолжается до $*$-изоморфизма $\gamma : \mathfrak{B}/\mathscr{K} \to \mathfrak{B}_1$. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, в теореме 1 определен $*$-изоморфизм $\gamma : \mathfrak{B}/\mathscr{K} \to \mathfrak{B}_1$. Рассмотрим $*$-гомоморфизм

$$p : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}/\mathscr{K}, \quad B \to B + \mathscr{K}.$$

Тогда отображение $S = \gamma \circ p : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_1$ также является $*$-гомоморфизмом. Назовем *символом* оператора $B \in \mathfrak{B}$ его образ $S(B) \in \mathfrak{B}_1$. В частности, если $B = \sum_{i=1}^r A_i M_{\alpha_i}$, где $A_i \in \mathfrak{A}$, то его символом является оператор

$$S(B) = \gamma(B + \mathscr{K}) = \sum_{i=1}^r s_1(A_i + \mathscr{K}) U_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^r \mathbb{M}_{\sigma_{A_i}} U_{\alpha_i}. \tag{13}$$

(Напомним, что $\sigma_{A_i}(\xi) = \sigma_{[A_i]}(\xi)$.)

Теорема 2. *Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Оператор B нётеров тогда и только тогда, когда его символ $S(B)$ обратим в $\mathscr{L}(L_2(\mathbb{R}))$.*

Доказательство. Оператор $B \in \mathfrak{B}$ нётеров тогда и только тогда, когда фактор-класс $B+\mathscr{K}$ обратим в алгебре $\mathscr{L}(\ell_2)/\mathscr{K}$. Поскольку C^*-алгебра $\mathfrak{B}/\mathscr{K}$ является C^*-подалгеброй C^*-алгебры $\mathscr{L}(\ell_2)/\mathscr{K}$, нётеровость оператора B равносильна обратимости элемента $B+\mathscr{K}$ в C^*-алгебре $\mathfrak{B}/\mathscr{K}$. Так как отображение $\gamma : \mathfrak{B}/\mathscr{K} \to \mathfrak{B}_1$ является $*$-изоморфизмом, элемент $B+\mathscr{K}$ обратим в $\mathfrak{B}/\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда оператор $\gamma(B+\mathscr{K}) = S(B)$ обратим в C^*-алгебре $\mathfrak{B}_1$. Последнее равносильно обратимости оператора $S(B)$ в $\mathscr{L}(L_2(\mathbb{R}))$. $\square$

4. Частные случаи. Выделим классы операторов, для которых можно получить условия нётеровости не в операторной, а в скалярной форме. В пространстве ℓ_2 рассмотрим оператор

$$B = I + A_1 + A_2 M_\alpha, \tag{14}$$

где M_α — оператор вида (4), A_1, A_2 — операторы из алгебры $\mathfrak{A}$, символы которых удовлетворяют условию

$$\sigma_{A_1}(\infty) = \sigma_{A_2}(\infty) = 0. \tag{15}$$

В частности, в качестве операторов A_j, $j = 1, 2$, можно взять канонические операторы мультипликативной дискретной свертки, т. е. считать $A_j = H_j$, где H_j — оператор вида (1).

В силу (13) символом оператора B является действующий в $L_2(\mathbb{R})$ оператор

$$S(B) = I + \mathbb{M}_{\sigma_{A_1}} + \mathbb{M}_{\sigma_{A_2}} U_\alpha,$$

где U_α определяется формулой (12). Если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то

$$(S(B)f)(\xi) = (1 + \sigma_{A_1}(\xi)) f(\xi) + \sigma_{A_2}(\xi) f(\xi - \alpha).$$

Условия обратимости оператора $S(B)$ хорошо известны (см., например, теорему $4'$ из гл. 2, § 1 в [12]). Опираясь на них, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть B — оператор вида* (14), *причем выполнено условие* (15). *Оператор B нётеров тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$1 + \sigma_{A_1}(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Если условие (16) *выполнено, то*

$$\operatorname{ind}(B) = -\operatorname{ind}(1 + \sigma_{A_1}(\xi)) := -\frac{1}{2\pi} \Delta[\arg(1 + \sigma_{A_1}(\xi))]|_{-\infty}^{\infty}. \tag{17}$$

Доказательство. По теореме 2 оператор B нётеров тогда и только тогда, когда его символ $S(B)$ обратим в $\mathscr{L}(L_2(\mathbb{R}))$. Так как выполняется неравенство $|1 + \sigma_{A_1}(\infty)| > |\sigma_{A_2}(\infty)|$, необходимым и достаточным условием обратимости оператора $S(B)$ является условие (16) (см. [12, с. 54]).

Найдем индекс оператора B. Соединим операторы B и $I + A_1$ семейством $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ операторов вида

$$B_t = I + A_1 + (1-t) A_2 M_\alpha.$$

Для каждого $t \in [0,1]$ оператор B_t есть оператор вида (14). Поэтому условие (16) обеспечивает нётеровость каждого оператора B_t. Нетрудно видеть, что семейство $\{B_t\}$ непрерывно по t в равномерной операторной топологии. Тогда в силу гомотопической устойчивости индекса $\operatorname{ind} B = \operatorname{ind}(I + A_1)$. Как известно (см. [8]), $\operatorname{ind}(I + A_1) = -\operatorname{ind}(1 + \sigma_{A_1}(\xi))$. Отсюда следует формула (17). $\square$

Следствие 1. *Оператор $B_1 = I + A_1 + M_\alpha A_2$ нётеров тогда и только тогда, когда выполнено условие* (16). *В этом случае его индекс вычисляется по формуле* (17).

Доказательство. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать оператор B_1 в виде $B_1 = I + A_1 + (A_2)_\alpha M_\alpha$, где $(A_2)_\alpha = M_\alpha A_2 M_\alpha^{-1}$, и воспользоваться теоремой 3. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with involutive operators. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2001.
2. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* О псевдоспектрах многомерных интегральных операторов с однородными степени $-n$ ядрами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1199–1216.
3. *Авсянкин О. Г.* О C^*-алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига // Докл. АН. 2008. Т. 419, № 6. С. 727–728.
4. *Авсянкин О. Г.* О спектрах и сингулярных значениях многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 490–496.
5. *Авсянкин О. Г., Перетятькин Ф. Г.* Об ограниченности и компактности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 64–68.
6. *Ерусалимский Я. М.* Необходимые и достаточные условия нётеровости операторов мультипликативной дискретной свертки // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высшей школы. Естеств. науки. 1973. № 4. С. 105–107.
7. *Ерусалимский Я. М.* Операторы мультипликативной дискретной свертки: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону: Рост. гос. ун-т, 1976.
8. *Авсянкин О. Г.* Об алгебре, порожденной операторами мультипликативной дискретной свертки // Изв. вузов. Математика. 2011. № 1. С. 3–10.
9. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. Минск: Изд-во «Университетское», 1988.
10. *Антоневич А. Б.* О двух методах исследования обратимости операторов из C^*-алгебр, порожденных динамическими системами // Мат. сб. 1984. Т. 124, № 1. С. 3–23.
11. *Мёрфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
12. *Kravchenko V. G., Litvinchuk G. S.* Introduction to the theory of singular integral operators with shift. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994.

Статья поступила 24 января 2014 г.

Авсянкин Олег Геннадиевич
Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090
avsyanki@math.rsu.ru