Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 512.545

ДВА ВОПРОСА ТЕОРИИ m–ГРУПП

А. В. Зенков, О. В. Исаева

Аннотация. Исследовано строение примитивных m-групп многообразия нормальнозначных m-групп. Доказано, что для произвольных многообразий m-групп $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ имеет место $\mathscr{U}(\mathscr{V}_1 \vee \mathscr{V}_2) = \mathscr{U}\mathscr{V}_1 \vee \mathscr{U}\mathscr{V}_2$.

Ключевые слова: m-транзитивное представление, примитивное представление, нормальнозначная m-группа, подпрямо неразложимая m-группа, многообразие m-групп.

1. Введение

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, _* \rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция $_*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т. е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$(xy)_* = x_* y_*, \ (x_*)_* = x, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом $_*$ записываем *как пару* $(G, \ _*)$. Будем говорить [1], что m-группа $(G, \ _*)$ *допускает* (*точное*) *представление* порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω, если $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ и $(g)_* = aga$ для любого $g \in G$, где a — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω. Этот факт записываем в виде (G, Ω, a). В работе все представления предполагаются *m-транзитивными*, т. е. для всех $w, w' \in \Omega$, быть может, за исключением точки o, существует такой $x \in G_* = \mathrm{gr}\,.(G, a)$, что $(w)x = w'$ (здесь o — точка Ω, неподвижная относительно действия a).

Пусть дано (G, Ω, a). Несложно заметить, что множество Ω представимо в виде $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\cup} R$, где $\varepsilon = 1$, если точка o существует, и $\varepsilon = 0$ в противном случае, и $L = \{w \in \Omega \mid (w)a > w\}$, $R = \{(\ell)a \mid \ell \in L\}$. Стандартно отношение эквивалентности Θ, определенное на Ω, будем называть *отношением m-эквивалентности*, если оно выпукло и $w \Theta w' \Leftrightarrow (w)x \Theta (w')x$ для любого $x \in G_*$. Следующие m-эквивалентности назовем *тривиальными*:

(A) эквивалентность, когда все классы эквивалентности одноэлементны;

(B) эквивалентность, когда все классы эквивалентности двухэлементны;

(C) эквивалентность, имеющая три (либо два) класса эквивалентности L, $\{o\}$, R: (L, R);

(D) эквивалентность, имеющая единственный класс эквивалентности Ω.

Представление (G, Ω, a) *m-примитивно*, если оно не допускает нетривиальной m-эквивалентности.

Основным результатом п. 2 (теорема 2.1) является описание строения m-примитивных групп многообразия всех нормальнозначных m-групп $\mathscr{N}$, которое задается тождеством

$$|x||y| \wedge |y|^2|x|^2 = |x||y|. \qquad (*)$$

В п. 3 доказано (теорема 3.1), что для произвольных многообразий m-групп $\mathscr{U}, \mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$

$$\mathscr{U}(\mathscr{V}_1 \vee \mathscr{V}_2) = \mathscr{U}\mathscr{V}_1 \vee \mathscr{U}\mathscr{V}_2,$$

что дает положительный ответ на вопрос Жираде и Рахунека из [1]. Отметим, что аналогичное равенство не имеет места для бесконечного множества индексов [2].

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в [3, 4] соответственно.

2. Примитивные представления нормальнозначных m-групп

Рассмотрим m-примитивное представление (G, Ω, a). Через $\mathrm{St}_G(\omega)$ обозначим стабилизатор точки $\omega \in \Omega$ в группе G. Если $\mathrm{St}_G(\omega) = e$, то G архимедова в силу предложения 2.8 из [5] и, следовательно, изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел в естественном порядке. Отождествим G с этой подгруппой и далее используем аддитивную запись. Из теоремы 2.2 в [6] следует, что группа G действует на себе как на линейно упорядоченном множестве правым умножением, т. е. можно перейти к представлению (G, G, a), где $(x)g = x + r_g$ для подходящего числа $r_g \in G$. Предположим, что представление допускает эквивалентность $\mathbf{B}$. Возможны два случая:

1) G содержит наименьший строго положительный элемент,

2) G не содержит наименьшего строго положительного элемента.

В случае 1 группа G, очевидно, циклическая. Рассмотрим случай 2. Обозначим через p инфимум (в $\mathbb{R}$) множества всех строго положительных элементов G. Ясно, что $p \geq 0$ и можно построить монотонно убывающую последовательность $\{r_n\}$ строго положительных элементов группы, сходящуюся к p. Следовательно, $r_m - r_n$ сколь угодно мала при подходящих $n > m$, поэтому $p = 0$. Стало быть, $\{r_n\} \to 0$. Так как представление допускает эквивалентность $\mathbf{B}$, существует класс эквивалентности $\Delta = \{r, r'\}$ и $r < r'$. Но тогда $\{r + r_n\} \to r$, что ведет к противоречию. Таким образом, случай 2 невозможен, и при сделанных предположениях группа циклическая.

Пусть m-группа $(G, {}_*)$ принадлежит $\mathscr{N}$ и ее представление (G, Ω, a) m-примитивно. Будем считать, что $\mathrm{St}_G(\omega) \neq e$. Тогда существуют такие $s \neq e \in \mathrm{St}_G(\omega)$ и $\omega' \in \Omega$, что $(\omega')s \neq \omega'$. Не ограничивая общности, предполагаем $\omega < \omega'$. Известно [4], что в нормальнозначной ℓ-группе произведение AB выпуклых ℓ-подгрупп A и B есть выпуклая ℓ-подгруппа и, более того, $AB = BA$. В теореме 2.4 из [5] доказано, что стабилизатор произвольной точки m-примитивного представления — максимальная выпуклая ℓ-подгруппа. Следовательно, $G = \mathrm{St}_G(\omega)\,\mathrm{St}_G(\omega') = \mathrm{St}_G(\omega')\,\mathrm{St}_G(\omega)$.

Обозначим через Δ выпуклое замыкание (в Ω) орбиты $(\omega)G$, которое будет m-блоком (классом эквивалентности), т. е. $(\Delta)x \cap \Delta = \varnothing$ либо $(\Delta)x = \Delta$ для любого $x \in G_*$. Более того, $\Delta = L$ либо $\Delta = \Omega$ [5]. Последний случай невозможен, так как $\Delta \leq \omega'$. Но если $\Delta = L$, то рассматриваемое представление собственное, т. е. $Lg = L$ для любого $g \in G$. Тогда m-группа $(G, {}_*)$ m-изоморфна $(G_L \times G_L^*, \mathrm{Exch})$ для подходящей транзитивной ℓ-группы G_L линейно упорядоченного множества L и G_L^* получена из G_L обращением порядка, $(x, y)\,\mathrm{Exch} = (y, x)$ для всякого $(x, y) \in G_L \times G_L^*$. Более того, представление (G_L, L) примитивно [5]. Ясно, что ℓ-группа G_L нормальнозначна и потому архимедова. Таким образом, имеет место

Теорема 2.1. *Пусть (G, Ω, a) — m-примитивное представление нормальнозначной m-группы $(G, {}_*)$. Тогда*

1) (G, Ω, a) — правое регулярное представление подгруппы аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел, более того, если это представление допускает эквивалентность $\mathbf{B}$, то эта подгруппа циклическая

либо

2) представление является собственным и $G \cong G_L \times G_L^*$ для подходящей подгруппы G_L аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел.

3. Дистрибутивность в решетке многообразий m-групп

Как обычно, неединичная m-группа $(G, {}_*)$ называется *подпрямо m-неразложимой*, если пересечение всех ее неединичных m-идеалов отлично от единицы. Из общей теории алгебраических систем известно, что всякая алгебраическая система является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебраических систем. Поэтому всякое многообразие m-групп, отличное от единичного, определяется своими подпрямо m-неразложимыми группами. Пусть $\mathscr{U}, \mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$ — произвольные многообразия m-групп. Покажем, что имеет место

$$\mathscr{U}(\mathscr{V}_1 \vee \mathscr{V}_2) = \mathscr{U}\mathscr{V}_1 \vee \mathscr{U}\mathscr{V}_2. \qquad (**)$$

Очевидно, правая часть (**) содержится в левой. Докажем обратное включение. Пусть $(G, {}_*) \in \mathscr{U}(\mathscr{V}_1 \vee \mathscr{V}_2)$ подпрямо m-неразложима. Тогда она допускает точное m-транзитивное представление (G, Ω, a) [6]. Через $\mathscr{U}(G)$ обозначим $\mathscr{U}$-радикал G, т. е. наибольший m-идеал G, содержащийся в $\mathscr{U}$. В [7] показано, что $\mathscr{U}(G)$ определяет на Ω эквивалентность Θ:

1) $\mathscr{U}(G) = L_\Theta = \{g \in G \| \, (\Delta)g = \Delta$ для любого класса эквивалентности $\Delta\}$,

2) m-группа $\overline{G} = G/\mathscr{U}(G)$ действует точно и m-транзитивно на Ω/Θ.

Стало быть, пересечение любых двух неединичных m-идеалов $\overline{G}$ неединично. Так как $\overline{G} \in \mathscr{V}_1 \vee \mathscr{V}_2$, то в $\overline{G}$ найдутся такие m-идеалы A, B, что $\overline{G}/A \in \mathscr{V}_1$, $\overline{G}/B \in \mathscr{V}_2$ и $A \cap B = \{e\}$. В силу сказанного выше это означает, что $G \in \mathscr{U}\mathscr{V}_1$ либо $G \in \mathscr{U}\mathscr{V}_2$. Требуемое включение установлено. Итак, доказана

Теорема 3.1. *Для произвольных многообразий m-групп $\mathscr{U}, \mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$ имеет место*

$$\mathscr{U}(\mathscr{V}_1 \vee \mathscr{V}_2) = \mathscr{U}\mathscr{V}_1 \vee \mathscr{U}\mathscr{V}_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. 1999. V. 49, N 4. P. 743–766.
2. *Баянова Н. В., Зенков А. В.* О бесконечной дистрибутивности в решетке многообразий m-групп // Алгебра и логика (в печати).
3. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
4. *Kopytov V. M., Medvedev N. Ya.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994.
5. *Зенков А. В.* О конгруэнциях m-групп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1280–1286.
6. *Вараксин А. В., Зенков А. В.* О представлениях m-групп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 298–302.

7. *Зенков А. В.* Сплетения групп монотонных подстановок // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 6. С. 1264–1270.

Статья поступила 10 марта 2014 г.

Зенков Алексей Владимирович
Алтайский гос. аграрный университет, кафедра математики,
пр. Красноармейский, 98, Барнаул 656049
alexey_zenkov@yahoo.com

Исаева Ольга Владимировна
Алтайский гос. университет, кафедра МЭММБИ,
пр. Социалистический, 68, Барнаул 656000