Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 512.643

ДОЛЯ МАТРИЦ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ СПЕКТРОМ В АЛГЕБРЕ ЛИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

А. С. Кривоногов, В. А. Чуркин

Аннотация. Долей матриц с вещественным спектром в заданной матричной алгебре Ли называется отношение объема множества матриц с вещественным спектром в шаре с центром в нуле алгебры к объему всего шара. В статье вычислена доля матриц с вещественным спектром в алгебре Ли вещественной симплектической группы.

Ключевые слова: вещественная симплектическая алгебра Ли, случайные матрицы с вещественным спектром.

Введение

Случайные матрицы — область исследования на стыке линейной алгебры, теории вероятностей и теории динамических систем. Если траектория динамической системы содержится в группе Ли, то ее поведение часто определяется начальным положением и законом изменения во времени вектора скорости, который принадлежит касательному пространству к группе Ли, т. е. сдвигу ее алгебры Ли. Отсюда видно, что важную роль в поведении системы играют собственные числа матрицы из алгебры Ли, а задачи отыскания спектра конкретной матрицы и распределения спектра в среднем для данного семейства матриц весьма актуальны (см., например, монографии [1, 2], обзоры [3, 4]). В работе [5], в частности, найдена доля матриц с вещественным спектром в алгебре всех вещественных матриц порядка n.

Симплектическая вещественная группа Ли и ее алгебра Ли естественно возникают при описании поведения гамильтоновых динамических систем. Цель данной работы — найти в вещественной симплектической алгебре Ли долю матриц с вещественным спектром.

Теперь уточним определения. Пусть $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ — вещественная алгебра Ли.

Рассмотрим шар радиуса r с центром в нуле в алгебре $\mathfrak{g}$ в стандартной евклидовой 2-норме
$$\mathrm{B}(\mathfrak{g}, r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{X \in \mathfrak{g} \mid \|X\|_2 < r\}.$$
Обозначим через
$$\mathrm{R}(\mathfrak{g}, r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{X \in \mathrm{B}(\mathfrak{g}, r) \mid \mathrm{Spec}\, X \subset \mathbb{R}\}$$
множество матриц из $\mathrm{B}(\mathfrak{g}, r)$ с вещественным спектром.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект РНФ 14–21–00065).

Определение. Число

$$\mathrm{P}(\mathfrak{g}) = \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{vol} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)}{\operatorname{vol} \mathrm{B}(\mathfrak{g}, r)}$$

называется *долей матриц* с вещественным спектром в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Замечание. Так как множество матриц с вещественным спектром является конусом (замкнуто относительно умножения на вещественный скаляр), отношение под знаком предела не зависит от r.

Доля матриц с вещественным спектром в алгебре всех вещественных матриц $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{4}}$, что можно вывести из [5].

В настоящей работе вычислена доля матриц с вещественным спектром в алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ симплектических матриц.

Пусть на $\mathbb{R}^{2n}$ задана билинейная кососимметрическая невырожденная форма $(u, v)_J \overset{\mathrm{df}}{=} u^\top J v$ с матрицей $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, где I_n — единичная матрица порядка n.

Определение. Группа Ли преобразований, сохраняющих эту форму, называется *симплектической группой* и обозначается через

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \overset{\mathrm{df}}{=} \{S \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid S^\top J S = J\}.$$

Ее алгебра Ли состоит из преобразований, косых относительно этой формы, называется *симплектической алгеброй* и обозначается через

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \overset{\mathrm{df}}{=} \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\top J + JX = 0\}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема, отвечающая на поставленный вопрос.

Теорема 1. *Доля матриц с вещественным спектром в симплектической алгебре $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}}$.*

Идея доказательства теоремы 1 кратко изложена в [6].

§ 1. Параметризация множества матриц с вещественным спектром

Пусть $\mathfrak{g} \le \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ — вещественная алгебра Ли с группой Ли $G \le \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$.

Компактная подгруппа $G \cap \mathrm{O}_m$ группы Ли G действует сопряжениями на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с сохранением евклидовой нормы матриц и их спектра, а значит, оставляет на месте $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$ и множество матриц с простым (т. е. без кратных собственных значений) спектром в $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$.

Определение. Пусть группа H действует на множестве X. *Фундаментальной областью* Ω относительно действия группы H называем подмножество множества X со свойствами

(i) для любого элемента $x \in X$ существует такой $h \in H$, что $h(x) \in \Omega$;

(ii) если $x \in \Omega$ и $h \in H$ такие, что $h(x) \in \Omega$, то $h(x) = x$.

Теорема 2 (о параметризации). *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ есть сумма векторных пространств:*

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m) \oplus \mathfrak{t},$$

где $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли такая, что $\operatorname{Spec} T \subset \mathbb{R}$ для всех $T \in \mathfrak{t}$, а группа Ли $G \cap \mathrm{O}_m$ алгебры $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m$ не дискретна. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит матрицы с простым спектром и для некоторого открытого многогранника $\hat{\mathfrak{t}}$ в $\mathfrak{t}$ множество $\hat{\mathfrak{t}}(r) = \hat{\mathfrak{t}} \cap \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$ содержится и всюду плотно в некоторой фундаментальной области Ω относительно действия группы $G \cap \mathrm{O}_m$ на множестве матриц с простым спектром в $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$.

Предположим также, что для любого элемента $T \in \hat{\mathfrak{t}}(r)$ его стабилизатор относительно $G \cap \mathrm{O}_m$ равен $\{\pm I_m\}$, где I_m — единичная матрица порядка m.

Тогда верны следующие утверждения.

(1) *Существует область $\mathrm{F} \subseteq G \cap \mathrm{O}_m$, содержащая единицу, для которой $\operatorname{vol} \mathrm{F} = \frac{1}{2} \operatorname{vol}(G \cap \mathrm{O}_m)$ и отображение*

$$\Phi : \mathrm{F} \times \hat{\mathfrak{t}}(r) \to \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r), \quad (Q, T) \mapsto QTQ^\top$$

является однозначной параметризацией такого множества $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$, что $\operatorname{vol} \mathrm{R} = \operatorname{vol} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$.

(2) *Касательное пространство к $\mathrm{F} \times \hat{\mathfrak{t}}(r)$ в точке (Q, T) совпадает с множеством пар (Y, Z) таких, что*

$$Q^\top Y \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m, \quad Z \in \mathfrak{t}.$$

(3) *Дифференциал отображения Φ в точке (Q, T) имеет вид*

$$\mathscr{D}_{Q,T}(Y, Z) = YTQ^\top + QTY^\top + QZQ^\top.$$

(4) *Якобиан отображения Φ не зависит от выбора $Q \in G \cap \mathrm{O}_m$:*

$$|\det \mathscr{D}_{Q,T}| = |\det \mathscr{D}_{I_m,T}|.$$

(5) *Якобиан отображения Φ в точке (I_m, T) равен*

$$\det \mathscr{D}_{I_m,T} = \det \operatorname{ad} T,$$

где $\operatorname{ad} T : \mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m \to \mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m$, $W \mapsto [W, T] \mod \mathfrak{t}$.

(6) *Объем множества $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$ матриц с вещественным спектром равен*

$$\operatorname{vol} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r) = \frac{1}{2} \operatorname{vol}(G \cap \mathrm{O}_m) \int\limits_{\hat{\mathfrak{t}}(r)} |\det \mathscr{D}_{I_m,T}| \, dT.$$

Доказательство. (1) В качестве множества R возьмем множество

$$\mathrm{R} = \{QTQ^\top \mid Q \in G \cap \mathrm{O}_m, \ T \in \hat{\mathfrak{t}}(r)\}.$$

Поскольку $\mathfrak{g}$ содержит матрицы с простым спектром, матрицы с кратными собственными числами образуют множество меры нуль в алгебре $\mathfrak{g}$, как множество матриц, для которых дискриминант характеристического многочлена равен 0. Значит, множество $\mathrm{RS}(\mathfrak{g}, r)$ матриц с простым вещественным спектром в алгебре $\mathfrak{g}$ всюду плотно в $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$.

Из п. (i) определения фундаментальной области следует, что для любого элемента $X \in \mathrm{RS}(\mathfrak{g}, r)$ существуют $Q \in G \cap \mathrm{O}_m$ и $T \in \Omega$ такие, что $X = QTQ^\top$, иными словами,

$$\mathrm{RS}(\mathfrak{g}, r) = \{QTQ^\top \mid Q \in G \cap \mathrm{O}_m, \ T \in \Omega\}.$$

Поскольку $\hat{\mathfrak{t}}(r)$ всюду плотно в фундаментальной области Ω, множество R всюду плотно в $\mathrm{RS}(\mathfrak{g}, r)$, значит,

$$\operatorname{vol} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r) = \operatorname{vol} \mathrm{RS}(\mathfrak{g}, r) = \operatorname{vol} \mathrm{R}.$$

В качестве области F возьмем множество $\{Q \in G \cap \mathrm{O}_m \mid Q_{11} > 0\}$, содержащее единичную матрицу I_m

Так как по условию теоремы $G \cap \mathrm{O}_m$ содержит матрицу $-I_m$, область F изометрична области $\{Q \in G \cap \mathrm{O}_m \mid Q_{11} < 0\}$ с помощью отображения $Q \mapsto -Q$. Кроме того, группа Ли $G \cap \mathrm{O}_m$ не дискретна, стало быть, множество матриц Q таких, что $Q_{11} = 0$, имеет меру нуль как подмногообразие коразмерности 1. В итоге

$$\operatorname{vol}(G \cap \mathrm{O}_m) = 2 \operatorname{vol}(\mathrm{F}).$$

Из выбора R следует, что для любого $X \in \mathrm{R}$ существуют $Q \in G \cap \mathrm{O}_m$ и $T \in \hat{\mathfrak{t}}(r)$ такие, что $X = QTQ^\top = (-Q)T(-Q)^\top$. При этом либо Q, либо $-Q$ лежит в F. Таким образом, у любого $X \in \mathrm{R}$ есть прообраз в $\mathrm{F} \times \hat{\mathfrak{t}}(r)$.

Предположим, что прообраз X содержит более одного элемента, т. е.

$$X = QTQ^\top = Q_1 T_1 Q_1^\top$$

для некоторых $Q, Q_1 \in \mathrm{F}$ и $T, T_1 \in \hat{\mathfrak{t}}(r)$. Тогда

$$Q_1^{-1} Q T \big(Q_1^{-1} Q\big)^{-1} = T_1 \in \hat{\mathfrak{t}}(r) \subset \Omega$$

и из п. (ii) определения фундаментальной области получаем, что $T_1 = T$. Значит, $Q_1^{-1} Q$ лежит в стабилизаторе T, и по условию теоремы $Q_1^{-1} Q = \pm I_m$. Если $Q_1^{-1} Q = -I_m$, то $Q_1 = -Q$, что противоречит принадлежности Q и Q_1 области F. Значит, $Q_1 = Q$, и данная параметризация множества R однозначна.

(2) Множество $\mathrm{F} \times \hat{\mathfrak{t}}(r)$ — прямое произведение, поэтому касательное пространство также будет прямым произведением соответствующих множителей. Касательное пространство к открытому множеству $\hat{\mathfrak{t}}(r)$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{t}$.

Пусть $S(\tau) \in G \cap \mathrm{O}_m$ — гладкая кривая, $S(0) = Q$ и $\dot{S}(0) = Y$ — касательный вектор к $G \cap \mathrm{O}_m$ в точке Q. Тогда $Q^\top S(\tau) \in G \cap \mathrm{O}_m$, $Q^\top S(0) = Q^\top Q = I_m$, так как $Q \in \mathrm{O}_m$, а $Q^\top \dot{S}(0) = Q^\top Y$ — касательный вектор в единице группы Ли $G \cap \mathrm{O}_m$. Но касательное пространство в единице группы Ли $G \cap \mathrm{O}_m$ — это алгебра Ли $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m$.

Доказываемое утверждение следует из того, что F — открытое множество в $G \cap \mathrm{O}_m$, значит, касательное к нему пространство в точке Q совпадает с касательным пространством к $G \cap \mathrm{O}_m$ в точке Q.

(3) Пусть $(Q + \tau Y + o(\tau), T + \tau Z + o(\tau))$ — гладкая кривая в $\mathrm{F} \times \hat{\mathfrak{t}}(r)$, проходящая через точку (Q, T). Тогда

$$\Phi((Q + \tau Y + o(\tau), T + \tau Z + o(\tau))) = QTQ^\top + \tau(YTQ^\top + QTY^\top + QZQ^\top) + o(\tau).$$

(4) Верны равенства

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{Q,T}(Y, Z) = YTQ^\top + QTY^\top + QZQ^\top &= Q(Q^\top Y T + T(Q^\top Y)^\top + Z)Q^\top \\ &= Q(WT - TW + Z)Q^\top = Q \mathscr{D}_{I_m,T}(W, Z) Q^\top, \end{aligned}$$

где $W = Q^\top Y \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m$.

(5) Из п. (3) получим

$$\mathscr{D}_{I_m,T} : (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m) \times \mathfrak{t} \to \mathfrak{g}, \quad (W, Z) \mapsto Z + [W, T],$$

при этом матрица $\mathscr{D}_{I_m,T}$ квадратная порядка $\dim\mathfrak{g}$, $\mathscr{D}_{I_m,T} = \mathrm{id}$ на $\{0\}\times\mathfrak{t}$, значит, она полураспавшаяся, $\det\mathscr{D}_{I_m,T} = \det\operatorname{ad}T$.

(6) Из уже доказанного имеем

$$\operatorname{vol}\mathrm{R}(\mathfrak{g},r) = \operatorname{vol}\mathrm{R} = \int\limits_{\mathrm{R}} dX = \int\limits_{\mathrm{F}\times\hat{\mathfrak{t}}(r)} |\det\mathscr{D}_{Q,T}|\; dQdT$$
$$= \int\limits_{\mathrm{F}\times\hat{\mathfrak{t}}(r)} |\det\mathscr{D}_{I_m,T}|\; dQdT = \frac{1}{2}\operatorname{vol}(G\cap\mathrm{O}_m)\int\limits_{\hat{\mathfrak{t}}(r)} |\det\mathscr{D}_{I_m,T}|\; dT.$$

Таким образом, для вычисления $\mathrm{P}(\mathfrak{g})$ надо

1) найти факторизацию $X = QTQ^\top$ матриц с простым вещественным спектром из $\mathfrak{g}$;

2) найти фундаментальную относительно действия $G\cap\mathrm{O}_m$ область и многогранник, всюду плотный в ней, используя полученную факторизацию;

3) вычислить якобиан $|\det\mathscr{D}_{I_m,T}|$;

4) найти объем компактной группы $G\cap\mathrm{O}_m$;

5) вычислить конечный интеграл.

Замечание. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ искомая факторизация будет разложением Шура, где Q — ортогональная матрица, а T — верхнетреугольная матрица со строго убывающей диагональю.

§ 2. Аналог разложения Шура

Лемма 1 (о матричном описании). *Имеют место равенства*

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^\top \end{pmatrix} \mid B^\top = B,\ C^\top = C\right\},$$

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A^\top C = C^\top A,\ B^\top D = D^\top B,\ A^\top D - C^\top B = I_n\right\},$$

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})\cap\mathfrak{so}_{2n} = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \mid A\in\mathfrak{so}_n,\ B^\top = B\right\},$$

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})\cap\mathrm{SO}_{2n} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})\cap\mathrm{O}_{2n}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \mid A^\top B = B^\top A,\ A^\top A + B^\top B = I_n\right\}.$$

Доказательство. Для доказательства равенства

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})\cap\mathrm{O}_{2n} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})\cap\mathrm{SO}_{2n}$$

достаточно показать, что для любой матрицы $S\in\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ выполнено $\det S = 1$. Действительно, в силу свойств пфаффиана кососимметрической матрицы и определения симплектической группы

$$\operatorname{Pf}J = \operatorname{Pf}(S^\top JS) = \det S\operatorname{Pf}J,$$

значит, $\det S = 1$, так как $\operatorname{Pf}J = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \neq 0$.

Остальные равенства легко показать, положив $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ и выписав условия принадлежности X соответствующим алгебрам и группам.

Лемма 2 (аналог разложения Шура). *Для любой матрицы $X \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ с простым вещественным спектром существует такая матрица $Q \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}$, что $X = QTQ^\top$, где $T = \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix}$, U — верхнетреугольная матрица с собственными числами $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ матрицы X на главной диагонали, а $Z^\top = Z$.*

Доказательство. Преобразуем характеристический многочлен матрицы X:

$$\det(X - \lambda I_{2n}) = \det(JX^\top J + \lambda J^2) = \det(J(X^\top + \lambda I_{2n})J) \\ = \det(X^\top + \lambda I_{2n}) = \det(X + \lambda I_{2n}).$$

Значит, если $\lambda \in \operatorname{Spec} X$, то $-\lambda \in \operatorname{Spec} X$. Можно считать, что

$$\operatorname{Spec} X = \{\lambda_1, -\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_n\}, \quad \text{где } \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$$

и

$$\forall i\, \exists v_i \neq 0 : Xv_i = \lambda_i v_i.$$

Далее при $i \neq j$

$$(Xv_i, v_j)_J = -(v_i, Xv_j)_J, \quad (\lambda_i v_i, v_j)_J = -(v_i, \lambda_j v_j)_J,$$
$$(\lambda_i + \lambda_j)(v_i, v_j)_J = 0, \quad (v_i, v_j)_J = 0.$$

Следовательно, подпространство $L = \langle v_1, v_2, \dots, v_n\rangle$ будет лагранжевой плоскостью в смысле определения из [7, гл. 4, § 2] — максимальным изотропным подпространством в $\mathbb{R}^{2n}$.

Если $e_1, \dots, e_n$ — первые n векторов стандартного базиса в $\mathbb{R}^{2n}$, то подпространство $\widetilde{L} = \langle e_1, \dots, e_n\rangle$ также является лагранжевой плоскостью.

Группа $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}$ действует транзитивно на множестве лагранжевых плоскостей (см., например, [7, гл. 4, § 2]), более того,

$$\exists S \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n} : Se_i = f_i,$$

где $f_1, f_2, \dots, f_n$ — ортонормированный в евклидовом смысле базис в L. Тогда

$$S^{-1}XS = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ 0 & \widetilde{D} \end{pmatrix},$$

но так как группа Ли $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ действует сопряжениями на своей алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$, то $S^{-1}XS = \begin{pmatrix} Y & W \\ 0 & -Y^\top \end{pmatrix}$, причем $\operatorname{Spec} Y = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, а W — симметрическая матрица.

По теореме Шура вещественная матрица Y с простым вещественным спектром представима в виде $Y = HUH^{-1}$, где U — верхнетреугольная матрица с числами $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ на главной диагонали, а $H \in \mathrm{SO}_n$.

Возьмем матрицу $D = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}$. Тогда $Q = SD$ будет искомой матрицей:

$$D^{-1}S^{-1}XSD = \begin{pmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & W \\ 0 & -Y^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} H^{-1}YH & H^{-1}WH \\ 0 & -H^{-1}Y^\top H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix},$$

где $Z = H^\top WH$ — симметрическая матрица.

§ 3. Фундаментальная область

Покажем, что для алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ выполнены условия теоремы 2.

Лемма 3. *В алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ верны следующие утверждения.*

(1) *Группа $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}$ действует сопряжениями на множестве матриц с простым спектром в $\mathrm{R}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}), r)$, и относительно данного действия можно выбрать фундаментальную область Ω так, что она содержится в множестве*

$$\Omega' = \left\{ \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0, \\ U_{12} \geq 0, \dots, U_{1n} \geq 0 \end{matrix} \right\} \cap \mathrm{R}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}), r),$$

лежащем в алгебре

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix} \mid U \text{ верхнетреугольная, } Z^\top = Z \right\}.$$

(2) *Алгебра Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ есть сумма векторных пространств*

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) = (\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}) \oplus \mathfrak{t},$$

и для любой матрицы $T \in \mathfrak{t}$ ее спектр вещественен.

(3) *Пусть в $\mathfrak{t}$ задан открытый многогранник*

$$\hat{\mathfrak{t}} = \left\{ \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{t} \mid \begin{matrix} U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0, \\ U_{12} > 0, \dots, U_{1n} > 0 \end{matrix} \right\}.$$

Тогда множество $\hat{\mathfrak{t}}(r) = \hat{\mathfrak{t}} \cap \mathrm{R}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}), r)$ содержится и всюду плотно в фундаментальной области Ω и для любого элемента $T \in \hat{\mathfrak{t}}(r)$ его стабилизатор равен $\{\pm I_{2n}\}$.

Доказательство. (1) Возьмем $X \in \mathrm{R}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}), r)$ с простым спектром и рассмотрим его орбиту относительно действия группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}$. Согласно лемме 2 в данной орбите содержится матрица T из множества

$$\left\{ \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{t} \mid U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0 \right\}.$$

Сопрягая T, если необходимо, матрицами вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, где A диагональная с ± 1 на диагонали, можно считать, что T лежит в множестве Ω'. Значит, для множества Ω' выполнен п. (i) определения фундаментальной области и можно выбрать фундаментальную область Ω, содержащуюся в множестве Ω'. Включение $\Omega' \subset \mathfrak{t}$ следует из матричного описания элементов данных множеств.

(2) Возьмем $T \in \mathfrak{t}$. По определению алгебры $\mathfrak{t}$ матрица T будет клеточно-треугольной и ее спектр $\operatorname{Spec} T = \operatorname{Spec} U \cup \operatorname{Spec}(-U^\top)$ лежит в $\mathbb{R}$, поскольку матрица U верхнетреугольная.

Так как в алгебре $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}$ содержатся лишь матрицы с чисто мнимым спектром, то $(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}) \cap \mathfrak{t} = \{0\}$ и сумма $(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}) \oplus \mathfrak{t}$ будет прямой. Равенство $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) = (\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}) \oplus \mathfrak{t}$ следует из равенства размерностей (все размерности можно найти из матричного описания данных алгебр)

$$\dim \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) = 2n^2 + n = n^2 + (n^2 + n) = \dim(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}) + \dim \mathfrak{t}.$$

(3) Возьмем $T \in \hat{\mathfrak{t}}(r) \subset \mathrm{R}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}), r)$. Тогда по определению фундаментальной области существуют такие матрицы $Q \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}$ и $T' \in \Omega \subset \Omega'$, что

$$QTQ^\top = T', \quad QT = T'Q.$$

Так как $Q \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}$, то Q имеет вид $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, где $AA^\top + BB^\top = I_n$ и $AB^\top = BA^\top$.

Значит,

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U' & Z' \\ 0 & -U'^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \tag{1}$$

в частности, $BU = -U'^\top B$ — матричное уравнение Сильвестра для неизвестной матрицы B.

Заметим, что спектры матриц U и U' совпадают, ибо матрицы T и T' сопряжены. Будем полагать, что $\operatorname{Spec} U = \operatorname{Spec} U' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, где $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$. Тогда $\operatorname{Spec} U \cap \operatorname{Spec}(-U'^\top) = \varnothing$ и согласно [1, § 4.3] $B = 0$ — единственное решение этого уравнения.

Тогда из (1) с учетом того, что $B = 0$, получаем

$$AU = U'A. \tag{2}$$

Пусть $Uf_j = \lambda_j f_j$ для $j = 1, \dots, n$ и $V_k = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$. Кроме того, так как U верхнетреугольная, спектр сужения U на $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ равен $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ и $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = V_k$. Аналогично спектр сужения U' на V_k равен $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

Из равенства (2) имеем

$$U'Af_j = AUf_j = \lambda_j Af_j.$$

Поэтому $Af_j \in V_k$ при $j \le k$, $A(V_k) \subseteq V_k$ при всех k и матрица A верхнетреугольная. Но, с другой стороны, A ортогональна, значит, она диагональная с ± 1 на диагонали.

Предположим, что $T \ne T'$. Тогда $A \ne \pm I_n$, следовательно, существуют i и j такие, что $A_{ii} = -A_{jj} = 1$. Если $A_{11} = 1$, то $U'_{1j} = -U_{1j} < 0$, если $A_{11} = -1$, то $U'_{1i} = -U_{1i} < 0$. Получаем противоречие с тем, что T' лежит в Ω'. Значит, $T = T' \in \Omega$ и $\hat{\mathfrak{t}}(r) \subset \Omega$. Кроме того, отсюда следует, что $A = \pm I_n$, стало быть, стабилизатор элемента $T \in \hat{\mathfrak{t}}(r)$ равен $\{\pm I_{2n}\}$.

Далее, так как множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{t} \;\middle|\; \begin{matrix} U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0, \\ U_{12} > 0, \dots, U_{1n} > 0 \end{matrix} \right\}$$

всюду плотно в множестве

$$\left\{ \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{t} \;\middle|\; \begin{matrix} U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0, \\ U_{12} \ge 0, \dots, U_{1n} \ge 0 \end{matrix} \right\},$$

$\hat{\mathfrak{t}}(r)$ всюду плотно в Ω' и, следовательно, всюду плотно в Ω ввиду того, что $\hat{\mathfrak{t}}(r) \subset \Omega \subset \Omega'$.

§ 4. Вычисление якобиана

Выберем в алгебре $\mathfrak{k}$ ортонормированный базис:

$$\left[\begin{aligned} &u_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{pmatrix}, \quad 1 \le i \le j \le n, \\ &v_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & e_{ij}+e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \le i < j \le n, \\ &w_i = \begin{pmatrix} 0 & e_{ii} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \le i \le n, \end{aligned}\right.$$

где e_{ij} — матричные единицы порядка n. Пусть

$$T = \sum_{i \le j} \alpha_{ij} u_{ij} + \sum_{i<j} \beta_{ij} v_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i w_i \in \hat{\mathfrak{t}}(r).$$

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$|\det \mathscr{D}_{I,T}| = \frac{1}{2^{n^2-n}} \prod_{1 \le k < m \le n} (\alpha_{kk}^2 - \alpha_{mm}^2) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{ii}.$$

Доказательство. Выберем в $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}$ ортонормированный базис:

$$\left[\begin{aligned} &x_{km} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_{km}-e_{mk} & 0 \\ 0 & e_{km}-e_{mk} \end{pmatrix}, \quad 1 \le k < m \le n, \\ &y_{km} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e_{km}+e_{mk} \\ -e_{km}-e_{mk} & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \le k < m \le n, \\ &z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & e_{kk} \\ -e_{kk} & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \le k \le n. \end{aligned}\right.$$

Найдем образы базисных элементов при отображении $W \mapsto [W,T]$ по модулю пространства $\mathfrak{t}$. Вначале заметим, что

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & XZ-ZX \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}$$

при Z симметрической, а X кососимметрической. Значит, $[x_{km}, v_{ij}]$, $[x_{km}, w_i] \in \mathfrak{t}$.

С использованием формулы $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ (см., например, [8, гл. 1, § 1]) легко получаем

$$[x_{km}, u_{ij}] = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\delta_{mi}\varepsilon_{kj} + \delta_{mj}\varepsilon_{ik} - \delta_{ki}\varepsilon_{mj} - \delta_{kj}\varepsilon_{im}),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{pmatrix}$ и $\varepsilon_{ij} = \sqrt{2}u_{ij} \in \mathfrak{t}$ при $i \le j$.

Далее, при симметрических X и Z коммутатор

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XZ & 0 \\ 0 & -ZX \end{pmatrix}$$

— линейные комбинации ε_{ij}. Поэтому $[y_{km}, v_{ij}]$, $[y_{km}, w_i]$, $[z_k, v_{ij}]$, $[z_k, w_i]$ являются линейными комбинациями элементов ε_{ij}.

Кроме того,

$$[y_{km}, u_{ij}] = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(v_1 + \delta_{mi}\xi_{kj} + \delta_{ki}\xi_{mj}), \quad [z_k, u_{ij}] = -\frac{1}{2}(v_2 + \delta_{ki}\xi_{kj}),$$

где $v_1, v_2 \in \mathfrak{t}$, $\xi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} + e_{ji} & 0 \end{pmatrix}$.

По модулю пространства $\mathfrak{t}$ получим

$$[x_{km}, T] \equiv \sum_{i\le j} \frac{\alpha_{ij}}{2\sqrt{2}}(\delta_{mi}\varepsilon_{kj} + \delta_{mj}\varepsilon_{ik} - \delta_{ki}\varepsilon_{mj} - \delta_{kj}\varepsilon_{im})$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_{im}}{2\sqrt{2}}(\delta_{mi}\varepsilon_{km} + \varepsilon_{ik} - \delta_{ki}\varepsilon_{mm}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_{ik}}{2\sqrt{2}}(\delta_{mi}\varepsilon_{kk} - \delta_{ki}\varepsilon_{mk} - \varepsilon_{im})$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\alpha_{mj}}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{kj} - \sum_{\substack{j=k+1,\\ j\ne m}}^{n} \frac{\alpha_{kj}}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{mj} \equiv \sum_{i=k+1}^{m} \frac{\alpha_{im}}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{ik} - \sum_{i=k}^{m-1} \frac{\alpha_{ki}}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{mi},$$

$$[y_{km}, T] \equiv \varepsilon - \sum_{i\le j} \frac{\alpha_{ij}}{2\sqrt{2}}(\delta_{mi}\xi_{kj} + \delta_{ki}\xi_{mj}) \equiv \varepsilon - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{\alpha_{ij}}{2\sqrt{2}}(\delta_{mi}\xi_{kj} + \delta_{ki}\xi_{mj})$$

$$\equiv \varepsilon - \sum_{i=1}^{n}\delta_{mi}\sum_{j=i}^{n} \frac{\alpha_{ij}}{2\sqrt{2}}\xi_{kj} - \sum_{i=1}^{n}\delta_{ki}\sum_{j=i}^{n} \frac{\alpha_{ij}}{2\sqrt{2}}\xi_{mj} \equiv \varepsilon - \sum_{j=m}^{n} \frac{\alpha_{mj}}{2\sqrt{2}}\xi_{kj} - \sum_{j=k}^{n} \frac{\alpha_{kj}}{2\sqrt{2}}\xi_{mj},$$

$$[z_k, T] \equiv \varepsilon_1 - \sum_{i\le j} \frac{\alpha_{ij}}{2}\delta_{ki}\xi_{kj} \equiv \varepsilon_1 - \sum_{j=k}^{n} \frac{\alpha_{kj}}{2}\xi_{kj},$$

где ε, ε_1 — некоторые линейные комбинации элементов ε_{ij}.

В итоге по модулю пространства $\mathfrak{t}$ имеем

$$[x_{km}, T] \equiv \sum_{i=k+1}^{m} \frac{\alpha_{im}}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{ik} - \sum_{i=k}^{m-1} \frac{\alpha_{ki}}{2\sqrt{2}}\varepsilon_{mi},$$

$$[y_{km}, T] \equiv \varepsilon - \sum_{j=m}^{n} \frac{\alpha_{mj}}{2\sqrt{2}}\xi_{kj} - \sum_{j=k}^{n} \frac{\alpha_{kj}}{2\sqrt{2}}\xi_{mj},$$

$$[z_k, T] \equiv \varepsilon_1 - \sum_{j=k}^{n} \frac{\alpha_{kj}}{2}\xi_{kj}.$$

Заметим, что $\|\varepsilon_{ij}\|_2 = \sqrt{2}$ при $i < j$, $\|\xi_{ij}\|_2 = \sqrt{2}$ при $i < j$ и $\|\xi_{ii}\|_2 = 2$.

Обозначим через

$$\left[\begin{array}{ll} g_{ij} = \dfrac{\xi_{ij}}{\sqrt{2}}, & i < j, \\ g_{ii} = \dfrac{\xi_{ii}}{2}, & \\ f_{ij} = \dfrac{\varepsilon_{ji}}{\sqrt{2}}, & i < j, \end{array}\right.$$

ортонормированный базис в $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}$ по модулю $\mathfrak{t}$, а z_k — через y_{kk}. Получим

$$[x_{km}, T] \equiv \frac{\alpha_{mm} - \alpha_{kk}}{2} f_{km} + \sum_{i=k+1}^{m-1} \left(\frac{\alpha_{im}}{2} f_{ki} - \frac{\alpha_{ki}}{2} f_{im}\right),$$

$$[y_{km},T] \equiv -\frac{\alpha_{mm}+\alpha_{kk}}{2}g_{km}+\varepsilon-\frac{\alpha_{km}}{\sqrt{2}}g_{mm} \\ -\sum_{i=m+1}^{n}\left(\frac{\alpha_{mi}}{2}g_{ki}+\frac{\alpha_{ki}}{2}g_{mi}\right)-\sum_{i=k+1}^{m-1}\frac{\alpha_{ki}}{2}g_{im},$$

$$[y_{kk},T] \equiv -\alpha_{kk}g_{kk}+\varepsilon_1-\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\alpha_{ki}}{\sqrt{2}}g_{ki}.$$

Упорядочим базисные элементы $\{x_{km}\}_{k<m}$ по возрастанию разности $m-k$ (при равенстве этих разностей упорядочим элементы произвольным образом). Базисные элементы $\{f_{km}\}_{k<m}$ упорядочим точно так же. Затем упорядочим базисные элементы $\{y_{km}\}_{k\le m}$ по убыванию суммы $m+k$ (при равенстве этих сумм упорядочим элементы произвольным образом). Базисные элементы $\{g_{km}\}_{k\le m}$ упорядочим точно таким же образом.

Нетрудно видеть, что матрица отображения $W \mapsto [W,T] \mod \mathfrak{t}$ в указанной паре упорядоченных базисов будет верхнетреугольной и, значит,

$$|\det \mathscr{D}_{I,T}| = \prod_{1\le k<m\le n}\frac{|\alpha_{kk}^2-\alpha_{mm}^2|}{4}\prod_{i=1}^{n}|\alpha_{ii}|,$$

а так как $T \in \hat{\mathfrak{t}}(r)$, то $\alpha_{kk} > \alpha_{mm}$ при $k<m$ и $\alpha_{ii}>0$ для всех i. Следовательно,

$$|\det \mathscr{D}_{I,T}| = \frac{1}{2^{n(n-1)}}\prod_{1\le k<m\le n}(\alpha_{kk}^2-\alpha_{mm}^2)\prod_{i=1}^{n}\alpha_{ii}.$$

§ 5. Объем компактной симплектической группы

Согласно [7, гл. 4, § 2] существует диффеоморфизм овеществления:

$$\psi : U_n \to \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n} \quad \psi : Z \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} Z & -\operatorname{Im} Z \\ \operatorname{Im} Z & \operatorname{Re} Z \end{pmatrix}.$$

Кроме того, это отображение является изоморфизмом групп $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}$ и U_n:

$$\psi((A+iB)(C+iD)) = \psi(AC-BD+i(BC+AD)) \\ = \begin{pmatrix} AC-BD & -BC-AD \\ BC+AD & AC-BD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix} = \psi(A+iB)\psi(C+iD).$$

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{vol}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}) = \operatorname{vol}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}) = \frac{\pi^{\frac{n^2+n}{2}}2^{n^2+\frac{n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!}.$$

Доказательство. Обозначим группу $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}$ через G_{2n}, а ее алгебру Ли — через $\mathfrak{g}_{2n}$.

Унитарная группа U_n действует на множестве прямых в пространстве $\mathbb{C}^n$, т. е. на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{n-1}$, и стабилизатор прямой

$\mathbb{C}e_1$, где e_1 — первый вектор стандартного базиса в $\mathbb{C}^n$, является множеством матриц вида

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in U_{n-1}.$$

Обозначая естественным образом этот стабилизатор через $U_1 \times U_{n-1}$, согласно [9, гл. XI, § 10] получаем изометричный диффеоморфизм из $U_n/(U_1 \times U_{n-1})$ на $\mathbb{C}P^{n-1}$, а следовательно, существует диффеоморфизм подобия с некоторым постоянным множителем из $G_{2n}/(G_2 \times G_{2n-2})$ на $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Известно, что (см., например, [9, гл. IX, § 2]) единичная сфера S^{2n-1} в $\mathbb{C}^n$ — главное расслоение над $\mathbb{C}P^{n-1}$ с группой S^1.

Отсюда

$$\operatorname{vol} G_{2n} = \operatorname{vol} G_2 \cdot \operatorname{vol} G_{2n-2} \cdot \frac{\operatorname{vol} S^{2n-1}(R)}{\operatorname{vol} S^1(R)},$$

где радиус R появляется из-за того, что диффеоморфизм из $G_{2n}/(G_2 \times G_{2n-2})$ на $\mathbb{C}P^{n-1}$ является подобием с некоторым постоянным множителем. Чтобы найти этот радиус, необходимо определить геодезическую $\gamma(\varphi)$ в $G_{2n}/(G_2 \times G_{2n-2})$ и ее кривизну $\varkappa$. Учитывая, что эта геодезическая с необходимостью должна быть дугой большой окружности на $S^{2n-1}(R)$, получим

$$R = \frac{1}{\varkappa}.$$

Геодезические в $G_{2n}/(G_2 \times G_{2n-2})$ будем искать с помощью теоремы 3.19 из [7, гл. 3, § 7]. Очевидно, $G_2 \times G_{2n-2} = \psi(U_1 \times U_{n-1})$ — замкнутая подгруппа в группе Ли G_{2n}. Введем инволютивный автоморфизм σ по правилу (как в [9, гл. XI, § 10])

$$\sigma(A) = SAS, \quad \text{где } S = \psi\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}\right).$$

Группа всех неподвижных точек этого автоморфизма равна в точности $G_2 \times G_{2n-2}$. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_{2n-2}$ состоит из матриц $\psi\left(\begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}\right)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $X \in \mathfrak{su}_{n-1}$ — косоэрмитова матрица ($\overline{X}^\top = -X$).

Нетрудно видеть, что дифференциал s автоморфизма σ задается на $\mathfrak{g}_{2n}$ так же, как и σ на G_{2n}. При этом собственному значению 1 автоморфизма s соответствует собственное подпространство $\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_{2n-2}$, а собственному значению -1 — собственное подпространство $\mathfrak{P}$, состоящее из матриц вида $\psi\left(\begin{pmatrix} 0 & -\bar{\xi}^\top \\ \xi & 0 \end{pmatrix}\right)$, где $\xi \in \mathbb{C}^{n-1}$. Кроме того, $\mathfrak{g}_{2n} = (\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_{2n-2}) \oplus \mathfrak{P}$.

Согласно теореме 3.19 из [7, гл. 3, § 7] геодезическая в $G_{2n}/(G_2 \times G_{2n-2})$, проходящая через смежный класс, содержащий единицу, в направлении вектора $\psi\left(\begin{pmatrix} 0 & -\bar{\xi}^\top \\ \xi & 0 \end{pmatrix}\right)$, где $\xi = (1, 0, \dots, 0)^\top$, задается формулой

$$\gamma(\varphi) = \psi\left(\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}\right), \quad \varphi \geq 0.$$

Длина дуги геодезической γ равна

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi \|\gamma'(z)\|_2 \, dz = 2 \int_0^\varphi dz = 2\varphi, \quad \varphi(s) = \frac{s}{2}.$$

Тогда $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s)) = \gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ — натуральная параметризация этой кривой, ее кривизна равна
$$\varkappa = \|\ddot{\tilde{\gamma}}(s)\|_2 = \frac{1}{4}\|\gamma''(\varphi)\|_2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $R = 2$ и
$$\operatorname{vol} G_{2n} = \operatorname{vol} G_2 \cdot \operatorname{vol} G_{2n-2} \cdot \frac{\operatorname{vol} S^{2n-1}(2)}{\operatorname{vol} S^1(2)} = \frac{(\operatorname{vol} G_2)^n}{(\operatorname{vol} S^1(2))^{n-1}} \cdot \prod_{k=2}^{n} \operatorname{vol} S^{2k-1}(2).$$

Так как G_2 состоит в точности из матриц вида $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, где $\theta \in [0, 2\pi)$, то
$$\operatorname{vol} G_2 = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \right\|_2 d\theta = 2\pi\sqrt{2}.$$

В итоге, подставляя $\operatorname{vol} G_2$ в предыдущую формулу и используя формулу суммы арифметической прогрессии, найдем
$$\operatorname{vol} G_{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cdot 2\pi\sqrt{2} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{2^{2k}\pi^k}{\Gamma(k)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cdot 2\pi\sqrt{2} \cdot \frac{2^{n^2+n-2}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{\pi \prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)!}$$
$$= \frac{2^{n^2+n-1}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)!} = \frac{\pi^{\frac{n^2+n}{2}} 2^{n^2+\frac{n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!}.$$

§ 6. Вычисление интеграла

Лемма 6. *Имеет место равенство*
$$\mathrm{P}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})) = \frac{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot \mathfrak{I}_n,$$
где
$$\mathfrak{I}_n = \int\limits_{\substack{x_1+\dots+x_n<1,\\ 0<x_1<\dots<x_n}} \cdots \int \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Доказательство. По теореме 2 и леммам 3–5 имеем
$$\operatorname{vol} \mathrm{R}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}), r) = \frac{1}{2} \frac{\pi^{\frac{n^2+n}{2}} 2^{n^2+\frac{n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!} \frac{1}{2^{n^2-n}} \int\limits_{\mathfrak{t}(r)} \prod_{1\le k<m\le n} \left(\alpha_{kk}^2 - \alpha_{mm}^2\right) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\, dT$$
$$= \frac{\pi^{\frac{n^2+n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!} J_n(r),$$
где $J_n(r) = 2^{n-1} \int\limits_{\mathfrak{t}(r)} \prod\limits_{1\le k<m\le n} \left(\alpha_{kk}^2 - \alpha_{mm}^2\right) \prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\, dT$.

Переобозначим α_{ii} через x_{n-i+1}, $i=1,\dots,n$; $\alpha_{12},\dots,\alpha_{1n}$ через $y_1,\dots,y_{n-1}$, а остальные α_{ij} и β_{ij} при $i<j$ и γ_i в некотором произвольном порядке через y_i, $i=n,\dots,n^2$. Будем также обозначать $\|x\|^2=x_1^2+\dots+x_n^2$, $\|y\|^2=y_1^2+\dots+y_{n^2}^2$, $dx=dx_1\dots dx_n$, $dy=dy_1\dots dy_{n^2}$. Получим

$$J_n(r)=2^{n-1}\underset{\substack{\|x\|^2+\|y\|^2<r^2,\\ 0<x_1<\dots<x_n,\\ y_1>0,\dots,y_{n-1}>0}}{\int\cdots\int}\prod_{1\le i<j\le n}\bigl(x_j^2-x_i^2\bigr)\prod_{i=1}^n x_i\,dxdy$$

$$=\underset{\substack{\|x\|^2+\|y\|^2<r^2,\\ 0<x_1<\dots<x_n}}{\int\cdots\int}\prod_{1\le i<j\le n}\bigl(x_j^2-x_i^2\bigr)\prod_{i=1}^n x_i\,dxdy,$$

так как подынтегральная функция четна относительно $y_1,\dots,y_{n-1}$.

Рассмотрим интеграл

$$\mathfrak{I}_n(R)=\underset{\substack{\|x\|^2<R^2,\\ 0<x_1<\dots<x_n}}{\int\cdots\int}\prod_{1\le i<j\le n}\bigl(x_j^2-x_i^2\bigr)\prod_{i=1}^n x_i\,dx.$$

Сделаем замену $x_i=R\sqrt{t_i}$. Якобиан этой замены равен

$$\prod_{i=1}^n\frac{R}{2\sqrt{t_i}}=\frac{R^n}{2^n}\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{t_i}}.$$

Тогда

$$\mathfrak{I}_n(R)=\frac{R^n}{2^n}R^{2\cdot\frac{n(n-1)}{2}}R^n\underset{\substack{t_1+\dots+t_n<1,\\ 0<t_1<\dots<t_n}}{\int\cdots\int}\prod_{1\le i<j\le n}(t_j-t_i)\,dt_1\dots dt_n=\frac{R^{n^2+n}}{2^n}\mathfrak{I}_n,$$

где $\mathfrak{I}_n$ — интеграл из формулировки теоремы.

Используя полученное для $\mathfrak{I}_n(R)$ равенство и теорему Фубини, получим

$$J_n(r)=\underset{\|y\|^2<r^2}{\int\cdots\int}dy\underset{\substack{\|x\|^2<r^2-\|y\|^2,\\ 0<x_1<\dots<x_n}}{\int\cdots\int}\prod_{1\le i<j\le n}\bigl(x_j^2-x_i^2\bigr)\prod_{i=1}^n x_i\,dx$$

$$=\underset{\|y\|^2<r^2}{\int\cdots\int}\mathfrak{I}_n\bigl(\sqrt{r^2-\|y\|^2}\bigr)\,dy=\frac{\mathfrak{I}_n}{2^n}\underset{\|y\|^2<r^2}{\int\cdots\int}\bigl(r^2-\|y\|^2\bigr)^{\frac{n^2+n}{2}}\,dy.$$

Сделаем замену $y_i=rz_i$ с якобианом r^{n^2}. Тогда

$$J_n(r)=\frac{\mathfrak{I}_n}{2^n}r^{2n^2+n}\underset{\|z\|^2<1}{\int\cdots\int}\bigl(1-\|z\|^2\bigr)^{\frac{n^2+n}{2}}\,dz$$

$$=\frac{\mathfrak{I}_n}{2^n}r^{2n^2+n}\int_0^1\bigl(1-\rho^2\bigr)^{\frac{n^2+n}{2}}\Biggl(\underset{\|z\|=\rho}{\int\cdots\int}dz\Biggr)d\rho$$

$$=\frac{\mathfrak{I}_n}{2^n}r^{2n^2+n}\int_0^1\bigl(1-\rho^2\bigr)^{\frac{n^2+n}{2}}\operatorname{vol}S^{n^2-1}(\rho)\,d\rho.$$

Используя известную формулу объема n-мерной сферы

$$\operatorname{vol} S^n(r) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} r^n,$$

получим

$$J_n(r) = \frac{\mathfrak{I}_n}{2^n} r^{2n^2+n} \frac{2\pi^{\frac{n^2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n^2}{2}\right)} \int\limits_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{n^2+n}{2}} \rho^{n^2-1}\, d\rho.$$

Сделаем замену $t = \rho^2$, $dt = 2\rho d\rho$. Тогда

$$\begin{aligned} J_n(r) &= \frac{\mathfrak{I}_n}{2^n} r^{2n^2+n} \frac{\pi^{\frac{n^2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n^2}{2}\right)} \int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{n^2+n}{2}} t^{\frac{n^2-2}{2}}\, dt \\ &= \frac{\mathfrak{I}_n r^{2n^2+n} \pi^{\frac{n^2}{2}}}{2^n \Gamma\left(\frac{n^2}{2}\right)} B\left(\frac{n^2}{2}, \frac{n^2+n}{2}+1\right) = \frac{\mathfrak{I}_n r^{2n^2+n} \pi^{\frac{n^2}{2}}}{2^n \Gamma\left(\frac{n^2}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n^2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n^2+n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2n^2+n}{2}+1\right)} \\ &= \frac{\mathfrak{I}_n r^{2n^2+n} \pi^{\frac{n^2}{2}}}{2^n} \frac{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{2n^2+n}{2}+1\right)}. \end{aligned}$$

Согласно [8, гл. 1, § 1] размерность алгебры $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ как вещественного конечномерного векторного пространства равна $2n^2+n$, и тогда объем шара радиуса r в этом пространстве равен

$$\operatorname{vol} \mathrm{B}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}), r) = \frac{\pi^{\frac{2n^2+n}{2}} r^{2n^2+n}}{\Gamma\left(\frac{2n^2+n}{2}+1\right)}.$$

В итоге получаем

$$\mathrm{P}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})) = \frac{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^n} \cdot \mathfrak{I}_n.$$

Вычислим далее интеграл $\mathfrak{I}_n$.

Лемма 7. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{I}_n = \frac{1}{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)!} \frac{1}{2^{\frac{n^2-n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} (k-1)!.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\Delta_n(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Тогда интеграл $\mathfrak{I}_n$ примет вид

$$\mathfrak{I}_n = \underset{\substack{x_1+\dots+x_n<1,\\ 0<x_1<\dots<x_n}}{\int\cdots\int} \Delta_n(x)\, dx_1 \dots dx_n = \underset{\substack{x_1+\dots+x_n<1,\\ 0<x_1<\dots<x_n}}{\int\cdots\int} |\Delta_n(x)|\, dx_1 \dots dx_n,$$

поскольку в заданной области $\Delta_n(x) > 0$. Заметим, что если поменять порядок переменных $x_1, \dots, x_n$, то последний интеграл не изменится. Суммируя по всем возможным упорядочениям, приходим к равенству

$$n!\mathfrak{I}_n = \int\limits_{\substack{x_1+\dots+x_n<1,\\ x_i>0}} \cdots \int |\Delta_n(x)|\, dx_1 \dots dx_n.$$

Полученный интеграл является частным случаем одного из обобщений β-интеграла, принадлежащего Сельбергу, и вычислен, например, в [2]. Воспользовавшись формулой (17.10.1) из [2] при $m = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$, получим

$$n!\mathfrak{I}_n = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\big(1 + n + \frac{n(n-1)}{2}\big)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\big(1 + \frac{n-j}{2}\big)\Gamma\big(1 + \frac{j}{2}\big)}{\Gamma\big(1 + \frac{1}{2}\big)}$$
$$= \frac{1}{\Gamma\big(\frac{n^2+n}{2} + 1\big)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\big(1 + \frac{n-j}{2}\big)\Gamma\big(1 + \frac{j}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Пусть $n = 2m$. Тогда

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\big(1 + \frac{n-j}{2}\big)\Gamma\big(1 + \frac{j}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \prod_{j=1}^{2m} \frac{\Gamma\big(1 + \frac{2m-j}{2}\big)\Gamma\big(1 + \frac{j}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{\Gamma\big(1 + \frac{2m-2i}{2}\big)\Gamma\big(1 + \frac{2i}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{\Gamma\big(1 + \frac{2m-2i+1}{2}\big)\Gamma\big(1 + \frac{2i-1}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{\Gamma(1 + m - i)\Gamma(1 + i)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{\Gamma\big(1 + m - i + \frac{1}{2}\big)\Gamma\big(i + \frac{1}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Используя формулы для гамма-функции $\Gamma(k+1) = k!$ и $\Gamma\big(k + \frac{1}{2}\big) = \frac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^k}$, получим

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\big(1 + \frac{n-j}{2}\big)\Gamma\big(1 + \frac{j}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{(m-i)!i!}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{(2(m-i+1)-1)!!\sqrt{\pi}(2i-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{m-i+1}2^i\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{(2(m-i))!!(2i)!!}{2^{m-i}2^i} \frac{(2(m-i)+1)!!(2i-1)!!}{2^{m-1}}$$
$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{2m-1}}(2(m-i)+1)!(2i)! = \frac{1}{2^{(2m-1)m}} \prod_{i=1}^{m}(2(m-i)+1)! \prod_{i=1}^{m}(2i)!$$
$$= \frac{1}{2^{(2m-1)m}} \prod_{i=0}^{m-1}(2i+1)! \prod_{i=1}^{m}(2i)! = \frac{(2m)!}{2^{(2m-1)m}} \prod_{i=1}^{m-1}(2i+1)! \prod_{i=1}^{m-1}(2i)!$$
$$= \frac{(2m)!}{2^{(2m-1)m}} \prod_{i=1}^{m-1}(2i+1)!(2i)! = \frac{(2m)!}{2^{(2m-1)m}} \prod_{i=1}^{2m-1} i!$$
$$= \frac{n!}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}} \prod_{i=1}^{n-1} i! = \frac{1}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}} \prod_{i=1}^{n} i!.$$

Пусть $n = 2m+1$. Тогда

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\big(1+\frac{n-j}{2}\big)\Gamma\big(1+\frac{j}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \prod_{j=1}^{2m+1} \frac{\Gamma\big(1+\frac{2m+1-j}{2}\big)\Gamma\big(1+\frac{j}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$= \frac{\Gamma\big(1+\frac{2m+1}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \prod_{i=1}^{m} \frac{\Gamma\big(1+\frac{2m+1-2i}{2}\big)\Gamma\big(1+\frac{2i}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{\Gamma\big(1+\frac{2m+1-2i+1}{2}\big)\Gamma\big(1+\frac{2i-1}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$= \frac{\Gamma\big(1+m+\frac{1}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \prod_{i=1}^{m} \frac{\Gamma\big(1+m-i+\frac{1}{2}\big)\Gamma(1+i)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{\Gamma(1+m-i+1)\Gamma\big(i+\frac{1}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Используя формулы для гамма-функции $\Gamma(k+1) = k!$ и $\Gamma\big(k+\frac{1}{2}\big) = \frac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^k}$, получим

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\big(1+\frac{n-j}{2}\big)\Gamma\big(1+\frac{j}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$= \frac{(2(m+1)-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{m+1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \prod_{i=1}^{m} \frac{(2(m-i+1)-1)!!\sqrt{\pi}i!}{2^{m-i+1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{(m-i+1)!(2i-1)!!\sqrt{\pi}}{2^i\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$= \frac{(2m+1)!!}{2^m} \prod_{i=1}^{m} \frac{(2(m-i)+1)!!i!(m-i+1)!(2i-1)!!}{2^{m-1}}$$
$$= \frac{(2m+1)!!}{2^m} \prod_{i=1}^{m} \frac{(2(m-i)+1)!!(2i-1)!!}{2^{m-1}} \frac{(2i)!!(2(m-i)+2)!!}{2^i 2^{m-i+1}}$$
$$= \frac{(2m+1)!!}{2^m} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{2m}}(2i)!(2(m-i)+2)!$$
$$= \frac{(2m+1)!!}{2^{2m^2+m}} \prod_{i=1}^{m}(2i)! \prod_{i=1}^{m}(2(m-i)+2)! = \frac{(2m+1)!!}{2^{2m^2+m}} \prod_{i=1}^{m}(2i)! \prod_{i=0}^{m-1}(2i+2)!$$
$$= \frac{(2m+1)!!}{2^{2m^2+m}}(2m)! \prod_{i=1}^{m-1}(2i)! \prod_{i=1}^{m-1}(2i+1)! \prod_{i=0}^{m-1}(2i+2)$$
$$= \frac{(2m+1)!!}{2^{2m^2+m}}(2m)!(2m)!! \prod_{i=1}^{m-1}(2i)!(2i+1)!$$
$$= \frac{(2m+1)!(2m)!}{2^{2m^2+m}} \prod_{i=1}^{2m-1} i! = \frac{1}{2^{(2m+1)m}} \prod_{i=1}^{2m+1} i! = \frac{1}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}} \prod_{i=1}^{n} i!.$$

В итоге

$$\mathfrak{I}_n = \frac{1}{n!} \frac{1}{\Gamma\big(\frac{n^2+n}{2}+1\big)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\big(1+\frac{n-j}{2}\big)\Gamma\big(1+\frac{j}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$= \frac{1}{n!} \frac{1}{\big(\frac{n^2+n}{2}\big)!} \frac{1}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}} \prod_{i=1}^{n} i! = \frac{1}{\big(\frac{n^2+n}{2}\big)!} \frac{1}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}} \prod_{i=1}^{n-1} i!$$
$$= \frac{1}{\big(\frac{n^2+n}{2}\big)!} \frac{1}{2^{\frac{n^2-n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} (k-1)!.$$

Доказательство. Основная теорема 1 следует из лемм 6 и 7.

Замечание. Полученный результат согласуется с результатом из [5] при $n = 1$.

Действительно, $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ совпадает с $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ (например, по лемме 1), а для произвольной матрицы X из $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$

$$\det(X - \lambda I) = \det\left(X - \frac{\operatorname{tr} X}{n} \cdot I - \left(\lambda - \frac{\operatorname{tr} X}{n}\right) I\right),$$

т. е. $\mathrm{P}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{P}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}))$, значит, доля $\mathrm{P}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$ равна доле $\mathrm{P}(\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}))$, которая по теореме 1 равна $(\sqrt{2})^{-1}$. Но согласно [5] $\mathrm{P}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})) = (\sqrt{2})^{-1}$.

Заключение

Как следствие теоремы 1 можно отметить, что доля матриц с вещественным спектром быстро стремится к нулю с ростом порядка матриц.

Кроме того, теорема дает новую числовую характеристику классического объекта — вещественной простой алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Аналогичная задача интересна и для других алгебр Ли, в частности, для всех вещественных простых алгебр Ли. Доказанная в работе теорема 2 описывает метод нахождения доли матриц с вещественным спектром в достаточно широком классе вещественных алгебр Ли, для которых выполнен аналог разложения Шура.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Науч. книга, 1997.
2. *Madan Lal Mehta.* Random matrices. Amsterdam: Elsevier Acad. Press, 2004.
3. *Girko V. L.* Random matrices // Handbook of Algebra, ed. Hazewinkel. Amsterdam: Elsevier Sc. B.V., 1996. V. 1. P. 27–78.
4. *Edelman A., Raj Rao N.* Random matrix theory // Acta Numer. 2005. V. 14, N 1. P. 233–297.
5. *Edelman A.* The probability that a random real Gaussian matrix has k real eigenvalues, related distributions, and the circular law // J. Multivariate Anal. 1997. V. 60, N 2. P. 203–232.
6. *Кривоногов А. С.* Доля матриц с вещественным спектром в вещественной симплектической алгебре Ли // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 547–552.
7. *Зеликин М. И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. М.: Факториал, 1998.
8. *Хамфрис Дж.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.
9. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. II.

Статья поступила 5 сентября 2014 г.

Кривоногов Андрей Сергеевич
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
krivonogov.andrey@gmail.com

Чуркин Валерий Авдеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
churkin@math.nsc.ru