Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 517.983.23

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА — ЗИГМУНДА ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

В. Д. Кряквин

Аннотация. Введены пространства Гёльдера — Зигмунда с переменным показателем гладкости. Даны эквивалентные нормы. Доказана теорема об ограниченности псевдодифференциальных операторов с символами из класса Хермандера в этих пространствах.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, пространство Гёльдера — Зигмунда, эквивалентные нормы.

В статье рассматриваются псевдодифференциальные операторы с символами из класса Хермандера (см. [1]) $S^m_{1,\delta}$, $m \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta < 1$, состоящего из всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^{2n}$ функций $a(x,\xi)$ таких, что для любых неотрицательных целых чисел p и q

$$|a|^m_{p,q} := \max_{|\beta|\le p, |\alpha|\le q} \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} \left|\partial^\beta_x \partial^\alpha_\xi a(x,\xi)\right| (1+|\xi|)^{|\alpha|-\delta|\beta|-m} < \infty.$$

Каждому символу $a(x,\xi) \in S^m_{1,\delta}$ ставится в соответствие псевдодифференциальный оператор $A = a(x,D)$, действие которого на функцию $u \in S(\mathbb{R}^n)$ задано формулой

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int a(x,\xi) \int u(y) e^{i(x-y,\xi)}\, dy d\xi.$$

В частности, псевдодифференциальный оператор $\langle D\rangle^{2t}$ построен по символу $\langle\xi\rangle^{2t} = (1+|\xi|^2)^t$ для $t \in \mathbb{R}$. Здесь и всюду в дальнейшем интегрирование ведется по всему $\mathbb{R}^n$, если явно не указано другое множество.

Пусть непрерывная вещественнозначная функция $s(x)$ удовлетворяет условию

$$-\infty < s_- \le s(x) \le s_+ < \infty \tag{1}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $s_\Delta = s_+ - s_-$. Кроме того, будем считать, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и $0 < |y| < 1$ выполняется неравенство

$$|s(x+y) - s(x)| \le \frac{S_1}{|\log_2 |y||} \tag{2}$$

с не зависящей от x и y положительной постоянной S_1. Функция $s(x)$, удовлетворяющая условиям (1) и (2), всюду в дальнейшем будет использоваться явно или неявно только как переменный показатель гладкости по Гёльдеру (Зигмунду), зависящий от точки $x \in \mathbb{R}^n$. Следует сказать, что функциональные пространства переменного порядка или с переменными показателями вводились, исследовались и применялись многими авторами (см., например, [2–8]). Отметим работы [2, 3], где исследовались пространства Гёльдера с переменным показателем гладкости $0 < s(x) < 1$. Условие (2) для показателя гёльдеровой гладкости используется в [3]; оно эквивалентно следующему условию, встречавшемуся в несколько более общей форме в [2]:

$$S_2^{-1}|y|^{s(x)} \le |y|^{s(x+y)} \le S_2|y|^{s(x)}, \quad 0 < |y| < 1, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

где $S_2 = 2^{S_1}$. Заметим, что из (2) при $|\theta| < 1$ следует неравенство

$$|s(x + \theta y) - s(x)| \le \frac{S_1}{|\log_2 |y||}, \quad 0 < |y| < 1, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

В дальнейшем может понадобиться очевидное следствие неравенства (2):

$$s(x) \le s(y) + \frac{S_1}{|\log_2 |x - y||}, \quad 0 < |x - y| < 1, \tag{5}$$

и, в частности,

$$s(x) \le s(0) + \frac{S_1}{|\log_2 |x||}, \quad 0 < |x| < 1. \tag{6}$$

Для определения пространств Зигмунда — Гёльдера воспользуемся разбиением единицы Литтлвуда — Пэли. Пусть бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}^1_+$ функция η такова, что $\eta(t) = 1$ при $0 \le t \le 1$ и $\eta(t) = 0$ при $t \ge 2$. Для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ положим $\lambda_0(\xi) = \eta(|\xi|)$ и $\lambda_k(\xi) = \lambda_0(2^{-k}\xi) - \lambda_0(2^{1-k}\xi)$ для $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\operatorname{supp} \lambda_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \le 2\}, \quad \operatorname{supp} \lambda_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{k-1} \le |\xi| \le 2^{1+k}\}$$

при $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы следующие равенства:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(\xi) = 1, \quad \lambda_k(-\xi) = \lambda_k(\xi) \quad \text{и} \quad \lambda_k(\xi) = \lambda_1(2^{1-k}\xi).$$

Распределение $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит линейному пространству Зигмунда — Гёльдера $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем гладкости s, если

$$\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \|2^{ks(x)}\lambda_k(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} < \infty, \tag{7}$$

где $\|u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество неотрицательных целых чисел и псевдодифференциальный оператор $\lambda_k(D)$ имеет символ $\lambda_k(\xi)$, принадлежащий $S^0_{1,0}$ равномерно по k. Очевидно, что если $s(x) = s$ не зависит от x, то пространство $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с классическим пространством Гёльдера — Зигмунда $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [9, с. 253; 10–13]). Из определения легко видеть, что $\Lambda^{s_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, если для любого x верно неравенство $s_1(x) \le s_2(x)$.

Нам понадобится следующая лемма, которую вместе с ее доказательством можно найти в [9, с. 244].

Лемма 1. *Пусть символ a принадлежит классу $S^m_{1,\delta}$. Тогда для*

$$k_j(x, z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int a(x, \xi)\lambda_j(\xi)e^{iz\xi}\, d\xi, \tag{8}$$

всех мультииндексов α, β и любого целого $M \geq 0$ выполняется неравенство

$$\left|\partial_x^\beta \partial_z^\alpha k_j(x,z)\right| \leq A_{M,\alpha,\beta}|z|^{-M} 2^{j(n+m-M+|\alpha|)} \tag{9}$$

с не зависящей от $j \in \mathbb{Z}_+$ константой $A_{M,\alpha,\beta}$.

Несложный анализ доказательства леммы 1 показывает, что для константы $A_{M,\alpha,\beta}$ справедлива оценка

$$|A_{M,\alpha,\beta}| \leq C|a|_{p,q}^m \tag{10}$$

для некоторых $C > 0$, p и q, не зависящих от символа a. Далее для сокращения записи вместо $A_{M,0,0}$ используется A_M, а буквой C обозначены, вообще говоря, различные положительные постоянные.

Лемма 2. *Пусть $m \in \mathbb{R}^1$, $0 \leq \delta < 1$. Тогда существуют константы $C > 0$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$ такие, что для любого символа $a \in S_{1,\delta}^m$, любого числа $j \in \mathbb{Z}_+$ и любой функции $u \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство*

$$\|2^{js(x)} a(x,D)\lambda_j(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)} \leq C|a|_{p,q}^m 2^{jm} \|2^{js(x)}u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)}.$$

Доказательство. Для $j \in \mathbb{Z}_+$ запишем псевдодифференциальный оператор $a(x,D)\lambda_j(D)$ в виде оператора свертки с ядром (8). Тогда

$$\begin{aligned} |2^{js(x)} a(x,D)\lambda_j(D)u(x)| &= \left|2^{js(x)} \int k_j(x, x-z)u(z)\,dz\right| \\ &= \left|\int 2^{j(s(x)-s(z))} k_j(x,x-z) 2^{js(z)} u(z)\,dz\right| \\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{R}^n} |2^{js(z)}u(z)| \int 2^{j(s(x)-s(z))}|k_j(x,x-z)|\,dz. \end{aligned} \tag{11}$$

Выберем $0 < \varepsilon < 1$, например, можно взять $\varepsilon = 1/2$. Для выбранных $x \in \mathbb{R}^n$ и $j \in \mathbb{Z}_+$ разобьем $\mathbb{R}^n$ на три множества: $\mathbb{R}^n = \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y} \cup \mathfrak{Z}$, где

$$\mathfrak{X} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid |x-z| < 2^{-j}\}, \quad \mathfrak{Y} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid |x-z| \geq 2^{-\varepsilon j}\},$$
$$\mathfrak{Z} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-j} \leq |x-z| < 2^{-\varepsilon j}\}.$$

Если $|x-z| < 2^{-\varepsilon j}$ при $0 < \varepsilon \leq 1$ (что верно для первого и третьего множеств), то $|x-z| < 1$. Тогда из условия (2) следует, что при $j \in \mathbb{N}$

$$j|s(x)-s(z)| \leq \frac{S_1 j}{|\log_2|x-z||} \leq \frac{S_1 j}{|-\varepsilon j|} = \frac{S_1}{\varepsilon}. \tag{12}$$

Оценим интеграл в (11) отдельно на каждом из множеств $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. В области $\mathfrak{X}$ воспользуемся оценкой ядра (9) при $0 \leq M < n$ и неравенством (12) с $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} 2^{j(s(x)-s(z))}|k_j(x,x-z)|\,dz \leq 2^{S_1} 2^{j(n+m-M)} A_M \int\limits_{\mathfrak{X}} |x-z|^{-M}\,dz.$$

Вычисляя последний интеграл в сферических координатах, где $r = |x-z|$, получим

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathfrak{X}} 2^{j(s(x)-s(z))}|k_j(x,x-z)|\,dz &\leq C 2^{S_1} 2^{j(n+m-M)} A_M \int\limits_0^{2^{-j}} r^{-M+n-1}\,dr \\ &\leq C A_M 2^{S_1} 2^{jm}. \end{aligned}$$

В области $\mathfrak{Y}$ выберем $M > n$ в оценке (9). Тогда

$$\int\limits_{\mathfrak{Y}} 2^{j(s(x)-s(z))}|k_j(x,x-z)|\,dz \le 2^{js_\Delta}2^{j(n+m-M)}A_M\int\limits_{\mathfrak{Y}}|x-z|^{-M}\,dz$$

$$\le C2^{js_\Delta}2^{j(n+m-M)}A_M\int\limits_{2^{-\varepsilon j}}^{\infty} r^{-M+n-1}\,dr$$

$$\le \frac{CA_M}{M-n}2^{js_\Delta}2^{j(n+m-M)}2^{\varepsilon j(M-n)} = \frac{CA_M}{M-n}2^{jm}2^{j(s_\Delta+(\varepsilon-1)(M-n))} \le C2^{jm},$$

если $s_\Delta + (\varepsilon-1)(M-n) \le 0$, что будет выполняться при $M \ge n + \frac{s_\Delta}{1-\varepsilon}$.

В области $\mathfrak{Z}$ при $M > n$ в оценке (9) с учетом (12) получаем, что

$$\int\limits_{\mathfrak{Z}} 2^{j(s(x)-s(z))}|k_j(x,x-z)|\,dz \le 2^{S_1\varepsilon^{-1}}2^{j(n+m-M)}A_M\int\limits_{\mathfrak{Z}}|x-z|^{-M}\,dz$$

$$\le CA_M2^{S_1\varepsilon^{-1}}2^{jm}2^{j(n-M)}\int\limits_{2^{-j}}^{2^{-\varepsilon j}} r^{-M+n-1}\,dr$$

$$\le \frac{CA_M}{n-M}2^{S_1\varepsilon^{-1}}2^{jm}2^{j(n-M)}(2^{-\varepsilon j(n-M)} - 2^{-j(n-M)})$$

$$= \frac{CA_M}{n-M}2^{S_1\varepsilon^{-1}}2^{jm}(2^{j(1-\varepsilon)(n-M)} - 1)$$

$$= \frac{CA_M}{M-n}2^{S_1\varepsilon^{-1}}2^{jm}(1 - 2^{-j(1-\varepsilon)(M-n)}) = C2^{jm},$$

и для завершения доказательства осталось учесть неравенство (10).

Следствие 1. *Пусть $a \in S^m_{1,\delta}$, $m \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta < 1$. Тогда для любого $u \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство*

$$\|2^{js(x)}a(x,D)\lambda_j(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \le C2^{jm}\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Доказательство. Заменим в неравенстве леммы функцию $u(x)$ функцией $\psi_j(D)u(x)$, где $\psi_j(D) = \lambda_{j-1}(D) + \lambda_j(D) + \lambda_{j+1}(D)$, $\lambda_{-1} = 0$. Тогда

$$\|2^{js(x)}a(x,D)\lambda_j(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} = \|2^{js(x)}a(x,D)\lambda_j(D)\psi_j(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}$$
$$\le C2^{jm}\|2^{js(x)}\psi_j(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \le C(2^{s_+} + 1 + 2^{-s_-})2^{jm}\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

что и требовалось доказать. Заметим попутно, что из следствия 1 и коммутативности операторов $a(D)$ и $\lambda_j(D)$ легко получается, что если символ $a \in S^m_{1,0}$ не зависит от x, то оператор $a(D)$ ограничен из $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $u \in \Lambda^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. *Псевдодифференциальный оператор с символом $a \in S^m_{1,\delta}$, $0 \le \delta < 1$, непрерывен из $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$. Существуют не зависящие от a положительное число C и неотрицательные целые числа N_1, N_2 такие, что для операторной нормы справедлива оценка*

$$\|a(x,D)\| \le C|a|^m_{N_1,N_2}.$$

Доказательство. Для $u \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ имеем равенство

$$a(x,D)u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a(x,D)\lambda_l(D)u(x).$$

Тогда

$$\left\|2^{j(s(x)-m)}\lambda_j(D)\sum_{l=0}^{\infty}a(x,D)\lambda_l(D)u(x)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \leq \Big(\sum_{|l-j|\leq 2}+\sum_{|l-j|>2}\Big)\|2^{j(s(x)-m)}\lambda_j(D)a(x,D)\lambda_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}. \quad (13)$$

Если $|l-j|>2$, то $\operatorname{supp}\psi_j\cap\operatorname{supp}\lambda_l=\varnothing$ для $\psi_j(\xi)=\lambda_{j-1}(\xi)+\lambda_j(\xi)+\lambda_{j+1}(\xi)$ (где $\lambda_{-1}=0$). Так как символ $\sigma_{j,l}(x,\xi)$ оператора $\psi_j(D)a(x,D)\lambda_l(D)$ по формуле о символе композиции псевдодифференциальных операторов для любого заранее выбранного натурального числа N равен

$$\sigma_{j,l}(x,\xi)=\sum_{|\gamma|<N}\frac{(-i)^{|\gamma|}}{\gamma!}\partial_\xi^\gamma\psi_j(\xi)\partial_x^\gamma a(x,\xi)\lambda_l(\xi)+r_{j,l,N}(x,\xi)=r_{j,l,N}(x,\xi),$$

где $r_{j,l,N}\in S^{-N_1}_{1,\delta}$ при $N_1=(1-\delta)N$, причем символ $\sigma_{j,l}$ удовлетворяет оценкам

$$|\sigma_{j,l}|^{-N_1}_{p,q}\leq C|a|^m_{N_2+p,N_2+q}$$

для любых p, q с не зависящими от символа a постоянными C и N_2. Используя коммутативность операторов с не зависящими от x символами, получим

$$\|2^{j(s(x)-m)}\lambda_j(D)a(x,D)\lambda_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} = \|2^{j(s(x)-m)}\langle D\rangle^{-L}\lambda_j(D)\psi_j(D)\langle D\rangle^{L}a(x,D)\lambda_l(D)\psi_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}.$$

Тогда сначала (и на третьем шаге) с учетом неравенства (1), затем по лемме 2 с заменой оператора $a(x,D)$ оператором $\langle D\rangle^{-L}$ имеем

$$\begin{aligned}&\|2^{j(s(x)-m)}\lambda_j(D)a(x,D)\lambda_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}\\ &\quad\leq 2^{j(s_+-m)}\|\langle D\rangle^{-L}\lambda_j(D)\psi_j(D)\langle D\rangle^{L}a(x,D)\lambda_l(D)\psi_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}\\ &\quad\leq C2^{j(s_+-m)}2^{-jL}\|2^{ls_-}2^{-ls_-}\psi_j(D)\langle D\rangle^{L}a(x,D)\lambda_l(D)\psi_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}\\ &\quad\leq C2^{j(s_+-m-L)}2^{-ls_-}\|2^{ls(x)}a_{l,j}(x,D)\psi_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)},\end{aligned}$$

где оператор $a_{l,j}(x,D)=\psi_j(D)\langle D\rangle^{L}a(x,D)\lambda_l(D)$ имеет символ, принадлежащий $S^{-M}_{1,\delta}$ для любого $M>0$. Снова по лемме 2, но уже с заменой оператора $a(x,D)$ оператором $a_{l,j}(x,D)$ получим

$$\begin{aligned}&\|2^{j(s(x)-m)}\lambda_j(D)a(x,D)\lambda_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}\\ &\quad\leq C2^{j(s_+-m-L)}2^{-ls_-}2^{-lM}\|2^{ls(x)}\psi_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}\leq C2^{la}\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

при $s_+-m-L<0$ и $a=-s_--M$. Последнее неравенство выполняется, если выбрать $L>s_+-m$. Пусть $M>-s_-$, тогда $a<0$ и

$$\sum_{|l-j|>2}\|2^{j(s(x)-m)}\lambda_j(D)a(x,D)\lambda_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \leq C\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\sum_{l=0}^{\infty}2^{la}=\frac{C}{1-2^a}\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $|l-j| \leq 2$. Это означает, что $j = l+k$, где $k \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Тогда для любого из пяти слагаемых второй суммы в (13) получим

$$\begin{aligned}
&\|2^{j(s(x)-m)}\lambda_j(D)a(x,D)\lambda_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \\
&\qquad = \|2^{(l+k)(s(x)-m)}\lambda_j(D)a(x,D)\lambda_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \\
&\qquad = \|2^{l(s(x)-m)}2^{k(s(x)-m)}\lambda_j(D)a(x,D)\lambda_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \\
&\qquad \leq C_{m,s}\|2^{l(s(x)-m)}(\lambda_j(D)a(x,D))\lambda_l(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \leq C\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

где $C_{m,s} = \max(2^{2(m-s_-)}, 2^{(m-s_-)}, 1, 2^{(s_+-m)}, 2^{2(s_+-m)})$, учитывается то, что $\lambda_j \in S^0_{1,0}$ равномерно по j, и применяется следствие 1. Для завершения доказательства осталось установить оценку для нормы псевдодифференциального оператора, которая легко просматривается в приведенных выкладках.

Следствие 2. *Обобщенная функция $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда u и все ее первые производные $\partial_{x_j}u$ принадлежат $\Lambda^{s(\cdot)-1}(\mathbb{R}^n)$. Норма $\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ эквивалентна норме*

$$\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)-1}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=1}\|D^\alpha u\|_{\Lambda^{s(\cdot)-1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Доказательство. Необходимость легко следует из теоремы 1. Для доказательства достаточности заметим, что $\langle D\rangle^{-1}u \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и $\langle D\rangle^{-1}\partial_{x_j}u \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\langle D\rangle^{-1}\partial_{x_j}\langle D\rangle^{-1}\partial_{x_j}u \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\Delta\langle D\rangle^{-2}u \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $u = -\Delta\langle D\rangle^{-2}u + \langle D\rangle^{-2}u \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Отсюда эквивалентность норм очевидна.

Лемма 3. *Если $0 < s_-$, то $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Для случая постоянного s доказательство можно посмотреть в [11]. Его можно модифицировать для переменного s. Пусть $u \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left|\sum_{k=0}^\infty \lambda_k(D)u(x)\right| \leq \sum_{k=0}^\infty |\lambda_k(D)u(x)| = \sum_{k=0}^\infty 2^{-ks(x)}|2^{ks(x)}\lambda_k(D)u(x)| \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\|2^{ks(x)}\lambda_k(D)u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}\sum_{k=0}^\infty 2^{-ks(x)} \leq \|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=0}^\infty (2^{-s_-})^k \\
&= \frac{1}{1-2^{-s_-}}\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = C\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от x, что и требовалось доказать.

Пусть

$$\ell_j(z) = \int_{\mathbb{R}^n}\lambda_j(\xi)e^{iz\xi}\,d\xi$$

— преобразование Фурье функции λ_j для $j \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, что для ℓ_j справедливо (9). Нам понадобится такой вариант этого неравенства:

$$|l_j(z)| \leq A_M|z|^{-M}2^{j(n-M)}. \tag{14}$$

Пусть, как обычно, $\delta(x)$ обозначает δ-функцию Дирака, действующую по правилу $\delta(\varphi) = \varphi(0)$. Некоторый довод о полезности введенной шкалы пространств Гёльдера — Зигмунда приводит следующая

Лемма 4. *Распределение $\delta(x)$ принадлежит $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, если $s(0) \le -n$.*

Доказательство. Пусть сначала $|x| \ge 2^{-j/2}$. Тогда с учетом (14)

$$|2^{js(x)}\lambda_j(D)\delta(x)| = |2^{js(x)}\ell_j(x)| \le |2^{js(x)}A_M|x|^{-M}2^{j(n-M)}| \\ \le A_M|2^{j(s(x)+n-M/2)}| \le C \quad (15)$$

при неотрицательном $M > 2(s_+ + n)$ с постоянной C, не зависящей от x и j.

Пусть $|x| \le 2^{-j/2}$. Тогда ввиду неравенства (5) при $j \ne 0$

$$js(x) \le js(0) + \frac{S_1 j}{|\log_2|x||} \le -n + \frac{S_1 j}{|-j/2|} = -n + 2S_1.$$

Поэтому при таких x и $M = 0$ в неравенстве (14) получим, что

$$|2^{js(x)}\lambda_j(D)\delta(x)| = |2^{js(x)}\ell_j(x)| \le A_0|2^{2S_1}| = C. \quad (16)$$

Неравенства (15) и (16) приводят к тому, что $\|\delta\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < \infty$, это и требовалось доказать.

Попытаемся найти эквивалентные нормы в других терминах для пространств Гёльдера — Зигмунда в случае, когда показатель s не принимает неположительных значений. Оператор взятия конечной разности Δ_h действует на функцию u по правилу $\Delta_h u(x) = u(x+h) - u(x)$, $h \in \mathbb{R}^n$, а его целые положительные степени определены по формуле $\Delta_h^k = \Delta_h\Delta_h^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $s_- > 0$ и N — наименьшее натуральное число, большее чем s_+. Пространство $C_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ состоит из непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых конечна норма

$$\|u\|_{C_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L_\infty} + \sup_{0<|h|<1} \left\| |h|^{-s(x)}\Delta_h^N u(x)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}. \quad (17)$$

При $0 < s(x) < 1$ норму пространства $\mathbb{C}_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ можно записать в привычном виде

$$\|u\|_{C_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L_\infty} + \sup_{0<|h|<1}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+h)-u(x)|}{|h|^{s(x)}}, \quad (18)$$

а при $0 < s(x) < 2$ — в виде

$$\|u\|_{C_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L_\infty} + \sup_{0<|h|<1}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+2h)-2u(x+h)+u(x)|}{|h|^{s(x)}}. \quad (19)$$

Условие (3) позволяет «немного» сдвигать функцию u в выражениях (17)–(19). Например, при $0 < s(x) < 2$ ограниченная функция u принадлежит пространству $C_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда существует $B > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $|h| < 1$

$$|u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)| \le B|h|^{s(x)}. \quad (20)$$

Нам понадобятся некоторые известные соотношения (тождество Маршо) для конечных разностей, которые приведем, следуя [14], в нужной далее форме. Пусть оператор сдвига τ_h^k действует на функцию u по правилу $\tau_h^k u(x) = u(x + kh)$, $x, h \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}$, и $\tau_h = \tau_h^1$. Тогда любому многочлену $P(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} p_j t^j$

можно сопоставить оператор $P(\tau_h)$, действие которого на функцию u вводится по формуле

$$P(\tau_h)u(x) = \sum_{j=0}^{m} p_j u(x + jh), \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

В частности, многочлену $P(t) = (t-1)^k$, $k \geq 0$, соответствует оператор $P(\tau_h) = \Delta_h^k$.

Тождество Маршо [14, 15] для многочленов принимает вид

$$2^l (t-1)^l = (t^2-1)^l - (t-1)^{l+1} P_{l-1}(t), \tag{21}$$

где многочлен

$$P_{l-1}(t) = \sum_{k=1}^{l} C_l^k (t^k - 1)(t-1)^{-1} = \sum_{i=0}^{l-1} p_i t^i$$

имеет коэффициенты $p_i = \sum\limits_{r=i+1}^{l} C_l^r$. Тождество Маршо (21) приводит к равенству операторов

$$2^l \Delta_h^l = \Delta_{2h}^l - P_{l-1}(\tau_h)\Delta_h^{l+1}. \tag{22}$$

Учитывая неравенство (3), легко видеть, что при $|h| < 1$

$$\begin{aligned}\big\|h^{-s(x)}\tau_h \Delta_h^l u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)} &\leq S_2 \big\|h^{-s(x+h)}\Delta_h^l u(x+h)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)} \\ &= S_2 \big\|h^{-s(y)}\Delta_h^l u(y)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_y^n)}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\big\|h^{-s(x)} P(\tau_h)\Delta_h^l u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)} \leq P^+(S_2)\big\|h^{-s(y)}\Delta_h^l u(y)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_y^n)}, \tag{23}$$

где $P^+(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} |p_j| t^j$. Тождество (22) приводит к неравенству

$$\begin{aligned}&2^l \big\|h^{-s(x)}\Delta_h^l u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)} \\ &\quad \leq \big\|2^{s(x)}(2h)^{-s(x)}\Delta_{2h}^l u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)} + \big\|h^{-s(x)} P_{l-1}^+(\tau_h)\Delta_h^{l+1} u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)}.\end{aligned} \tag{24}$$

Неравенство (23) можно применить к последнему слагаемому в (24), тогда

$$\begin{aligned}2^l \big\|h^{-s(x)}\Delta_h^l u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)} &\leq 2^{s_+}\big\|(2h)^{-s(x)}\Delta_{2h}^l u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)} \\ &\quad + P_{l-1}^+(S_2)\big\|h^{-s(x)}\Delta_h^{l+1} u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)}.\end{aligned} \tag{25}$$

Теорема 2. *Нормы* (17) *эквивалентны для любых, больших чем* s_+, *показателей* N *конечных разностей* Δ_h^N.

Доказательство будем проводить, следуя общей схеме доказательства для трансляционно-инвариантных норм (соответствует постоянному s), данного в работе [14], с необходимыми модификациями. Действительно, с одной стороны, из (23) при $N > s_+$ следует, что

$$\|u\|_{L_\infty} + \sup_{0<|h|<1} \big\|h^{-s(x)}\Delta_h^N P(\tau_h)u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}_x^n)} \leq (P^+(S_2)+1)\|u\|_{C_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Тогда

$$\|u\|_{L_\infty} + \sup_{0<|h|<1} \big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N+k}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \le ((S_2+1)^k+1)\big(\|u\|_{L_\infty} + \sup_{0<|h|<1} \big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}\big).$$

Для получения обратного неравенства воспользуемся неравенством (25) с $l = N > s_+$, тогда

$$\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \le 2^{s_+-N}\big\||2h|^{-s(x)}\Delta_{2h}^{N}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} + 2^{-N}P^+_{N-1}(S_2)\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N+1}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}.$$

Так как

$$\sup_{0<|h|<1}\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \le \sup_{0<|h|<1/2}\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} + \sup_{1/2<|h|<1}\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)},$$

где последнее слагаемое не превышает $2^{s_++N}\|u\|_{L_\infty}$, имеем

$$\sup_{0<|h|<1}\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \le 2^{s_+-N}\sup_{0<|h|<1}\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} + 2^{-N}(P^+_{N-1}(S_2)+1)\sup_{0<|h|<1}\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N+1}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} + 2^{s_++N}\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}.$$

Следовательно,

$$(1-2^{s_+-N})\sup_{0<|h|<1}\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \le 2^{-N}(P^+_{N-1}(S_2)+1)\sup_{0<|h|<1}\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N+1}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} + 2^{s_++N}\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)},$$

что приводит к неравенству

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{0<|h|<1}\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} \le C\big(\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} + \sup_{0<|h|<1}\big\||h|^{-s(x)}\Delta_h^{N+1}u(x)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)}\big). \tag{26}$$

Повторяя неравенство (26) нужное число раз, получим требуемое неравенство.

Теорема 3. *Пусть $0 < s_- \le s(x) \le s_+ < 2$. Тогда пространство $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с $C_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и норма* (7) *эквивалентна норме* (17).

Доказательство. Для постоянного показателя s теорема известна (см., например, [16; 17, с. 178–186]). Пусть $u \in C_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$|\lambda_0(D)u(x)| = \left|\int u(x-y)\ell_0(y)\,dy\right| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)|\int|\ell_0(y)|\,dy = C\|u\|_{L_\infty} \le C\|u\|_{C_{s(\cdot)}}.$$

При $j \ge 1$, учитывая, что $\ell_k(-z) = \ell_k(z)$, получим

$$|2^{js(x)}\lambda_k(D)u(x)| = \left|2^{js(x)}\int u(x-y)\ell_j(y)\,dy\right| \le \left|2^{js(x)-1}\int \ell_j(y)(u(x-y)+u(x+y)-2u(x))\,dy\right|.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\|2^{js(x)}\lambda_k(D)u(x)\|_{L_\infty} &\le C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(2^{js(x)-1}\int |y|^{s(x)}|\ell_j(y)|\,dy\right)\\ &\le C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(2^{js(x)-1}\int |y|^{s(x)}2^{n(j-1)}|\ell_1(2^{j-1}y)|\,dy\right)\\ &= C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(2^{js(x)-1}2^{(1-j)s(x)}\int |z|^{s(x)}|\ell_1(z)|\,dz\right)\\ &= C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(2^{s(x)-1}\int |z|^{s(x)}|\ell_1(z)|\,dz\right) < C,\end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от j. Таким образом, $u \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, и, следовательно, $C_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Докажем, что $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset C_{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $f \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Это означает, что

$$\|f\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_j |2^{js(x)}f_j(x)|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} < \infty, \quad \text{где } f_j = \lambda_j(D)f,\ f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j.$$

Так как функции f_j бесконечно дифференцируемы, по формуле Тейлора получим

$$\begin{aligned}|f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x)| &\le C|y|^2 2^{j(2-s(x+\theta y)}\sum_{|\alpha|=2}\|2^{s(t)-2}\partial^\alpha f_j(t)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_t)}\\ &\le C|y|^2 2^{j(2-s(x+\theta y))}\|f\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}, \quad |\theta|<1. \qquad (27)\end{aligned}$$

Тогда

$$|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)| = \left|\sum_{j=0}^{\infty}(f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x))\right|$$
$$\le \Big|\sum_{0\le j<m}(f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x))\Big| + \Big|\sum_{j\ge m}(f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x))\Big|.$$

Пусть число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{-m} \le |y| \le 2^{1-m}$. Тогда с учетом (27) для первого слагаемого

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{0\le j<m}(f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x))\Big|\\ &\le C|y|^2\sum_{0\le j<m}2^{j(2-s(x+\theta y))}\|f\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C|y|^2\frac{2^{(m+1)(2-s(x+\theta y))}-1}{2^{(2-s(x+\theta y))}-1}\|f\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Так как $2-s(x+\theta y) > 2-s_+ > 0$, то $(2^{2-s(x+\theta y)}-1)^{-1} < C$. Поэтому

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{0\le j<m}(f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x))\Big|\\ &\qquad\le C|y|^2\|f\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}2^{2-s(x+\theta y)}|y|^{(s(x+\theta y)-2)} \le C|y|^{s(x+\theta y)} \le C|y|^{s(x)},\end{aligned}$$

если учесть (4). Для второй суммы

$$\Big|\sum_{j\ge m}(f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x))\Big|$$
$$\le \sum_{j\ge m}(|f_j(x+y)|+|f_j(x-y)|+2|f_j(x)|)$$
$$\le \sum_{j\ge m}(2^{-js(x+y)}|2^{js(x+y)}f_j(x+y)|$$
$$+2^{-js(x-y)}|2^{js(x-y)}f_j(x-y)|+2^{1-js(x)}|2^{js(x)}f_j(x)|)$$
$$\le \sum_{j\ge m}(2^{-js(x+y)}+2^{-js(x-y)}+2^{1-js(x)})\|f\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$
$$\le \left(\frac{2^{-ms(x+y)}}{1-2^{-s(x+y)}}+\frac{2^{-ms(x-y)}}{1-2^{-s(x-y)}}+2\frac{2^{-ms(x)}}{1-2^{-s(x)}}\right)\|f\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как $0<s_-\le s(x)$, то $1-2^{-s(x)}>0$ и

$$\Big|\sum_{j\ge m}(f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x))\Big|\le C((2^{-m})^{s(x+y)}+(2^{-m})^{s(x-y)}+2(2^{-m})^{s(x)})$$
$$\le C(|y|^{s(x+y)}+|y|^{s(x-y)}+2|y|^{s(x)})\le C|y|^{s(x)}.$$

Таким образом, для функции f справедливо неравенство (20). Для завершения доказательства осталось учесть лемму 3.

Если $s_->0$, то обозначим $\delta=\min(1/4,s_-)$, а через L — наименьшее целое число, большее s_+, т. е. $L=[s_+]+1$. Пусть при $0\le k\le L-1$

$$\Omega_k=\{x\in\mathbb{R}^n\mid k+\delta\le s(x)\le k+2-\delta\},$$

тогда

$$\mathbb{R}^n=\bigcup_{k=0}^{L-1}\Omega_k.$$

Условие (2) обеспечивает существование бесконечно дифференцируемых функций φ_k, $0\le k\le L-1$, ограниченных вместе со своими производными и таких, что

$$\sum_{k=0}^{L-1}\varphi_k=1,\quad \operatorname{supp}\varphi_k\subset\Omega_k.$$

Отсюда с учетом теорем 1, 3 и следствия 2 легко выводится

Следствие 3. *Пусть $0<s_-$. Тогда норма $\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ эквивалентна норме*

$$\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{|\alpha|=0}^{k}\|\varphi_kD^\alpha u\|_{C_{s(\cdot)-k}(\mathbb{R}^n)}.$$

В заключение заметим, что при исследовании дифференциальных уравнений в неограниченных областях важным является вопрос о поведении функций на бесконечности. В случае, когда нужно иметь определенное, «близкое к степенному», поведение элементов пространства Гёльдера — Зигмунда, это можно сделать с помощью введения следующего веса (см. [12]), не меняющего гладкости в конечных точках. Функцию $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ будем называть *весовой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

существуют постоянные $c > 0$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$c^{-1}(1+|x|)^{l_1} \le \omega(x) \le c(1+|x|)^{l_2}, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

для некоторого $\delta_0 > 0$ и любого мультииндекса β существует постоянная $c_\beta > 0$ такая, что

$$\left|\frac{\partial^\beta \omega(x)}{\partial x^\beta}\right| \le c_\beta \omega(x)(1+|x|)^{-\delta_0|\beta|}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда обобщенная функция u $(\in S'(\mathbb{R}^n))$ принадлежит банахову пространству Гёльдера — Зигмунда $\Lambda^{s(\cdot),\omega}(\mathbb{R}^n)$ с весом ω, если $\omega^{-1}u \in \Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot),\omega}(\mathbb{R}^n)} := \|\omega^{-1}u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Очевидно, что, если $0 < c_1 < \omega(x) < c_2 < \infty$, то $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{s(\cdot),\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1 из [12] позволяет без труда перенести теорему 1 на весовой случай.

Теорема 4. *Псевдодифференциальный оператор с символом $a \in S^m_{1,\delta}$ действует ограниченно из $\Lambda^{s(\cdot),\omega}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda^{s(\cdot)-m,\omega}(\mathbb{R}^n)$. Существуют положительные не зависящие от a постоянные C, p и q такие, что имеет место оценка операторной нормы*

$$\|a(x,D)\| \le C|a|^m_{p,q}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hörmander L.* Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations // Singular Integrals. Proc. Symp. Pure Math. 1966. V. 10. P. 138–183.
2. *Beals R.* L_p and Hölder estimates for pseudodifferential operators: Sufficient conditions // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1979. V. 29, N 3. P. 239–260.
3. *Karapetians N. K., Ginzburg A. I.* Fractional integrals and singular integrals in the Hölder classes of variable order // Integral Transforms Spec. Funct. 1994. V. 2, N 2. P. 91.
4. *Edmunds D. E., Rakosnik J.* Sobolev embeddings with variable exponent // Stud. Math. 2000. V. 143. P. 267–293.
5. *Fan X., Shen J., Zhao D.* Sobolev embeddings theorems for $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 262, N 2. P. 749–760.
6. *Жиков В. В.* Разрешимость трехмерной задачи о термисторе // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2008. Т. 261. С. 101–114.
7. *Жиков В. В.* К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнений // Функцион. анализ и его прил. 2009. Т. 43, № 2. С. 19–38.
8. *Рабинович В. С., Самко С. Г.* Сингулярные интегральные операторы в весовых пространствах Лебега с переменными показателями на сложных карлесоновских кривых // Функцион. анализ и его прил. 2012. Т. 46, № 1. С. 87–92.
9. *Stein E. M.* Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.
10. *Taylor M. E.* Tools for PDE: pseudodifferential operators, paradifferential operators, and layer potentials. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. (Math. Surv. Monogr.; V. 81).
11. *Rabinovich V. S.* Fredholm property of pseudo-differential operators on weighted Hölder–Zygmund spaces // Oper. Theory, Adv. Appl. 2006. V. 164, N 2. P. 95–114.
12. *Кряквин В. Д.* Критерии компактности и нетеровости псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Гёльдера — Зигмунда // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 101–110.
13. *Кряквин В. Д.* Характеризация псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера — Зигмунда // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 3. С. 318–324.

14. *Головкин К. К.* Об эквивалентных нормировках дробных пространств // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1962. T. LXVI. C. 364–383.
15. *Marchaud A.* Sur les dérivées et sur le différences des fonctions de variables rèeles // J. Math. Pures Appl. 1927. V. 6. P. 337–425.
16. *Jaffard S., Meyer Y.* Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions // Mem. Am. Math. Soc. 1996. V. 123, N 587. P. 1–110.
17. *Meyer Y.* Wavelet and operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

Статья поступила 8 ноября 2013 г.

Кряквин Вадим Донатович
Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8А, Ростов-на-Дону 344090
vadkr@math.rsu.ru