Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 512.814.4 + 512.813.52

НИЛЬПОТЕНТНЫЕ СУММЫ АЛГЕБР ЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В. В. Горбацевич

Аннотация. Рассматривается операция нильпотентной суммы для произвольных конечномерных алгебр Ли. Доказываются некоторые свойства этой операции, часть их которых аналогичны соответствующим свойствам операции нильпотентного произведения групп, которые были известны ранее. Приводятся применения полученных результатов к построению нильмногообразий и диффеоморфизмов Аносова на них.

Ключевые слова: алгебра Ли, нильпотентная сумма, нильмногообразие, диффеоморфизм Аносова.

Введение

Статья посвящена изучению нильпотентной суммы алгебр Ли — конструкции, применимой для произвольных конечномерных алгебр Ли. Особенно интересна она для случая, когда обе «складываемые» алгебры Ли нильпотентны. Дело в том, что конечномерные нильпотентные алгебры Ли до сих пор изучены недостаточно глубоко. Не так уж много известно и общих нетривиальных конструкций конечномерных нильпотентных алгебр Ли. Из самых известных конструкций такого рода можно отметить (кроме прямой суммы) только конструкцию центрального расширения (которая требует наличия нетривиальной информации — о когомологиях нильпотентных алгебр Ли) и расширения с помощью нильпотентного дифференцирования (что требует информацию об алгебре дифференцирований нильпотентных алгебр Ли). В данной статье рассматривается новая конструкция, которая приводит к нильпотентным алгебрам Ли на основе произвольных исходных нильпотентных алгебр Ли и не использует никаких дополнительных параметров. Скажем несколько слов о том, что предшествовало написанию данной статьи.

В [1] была введена конструкция «произведение с помощью образующих» (product by generators) для алгебр Ли и доказаны некоторые ее свойства. В [2] было продолжено изучение этой конструкции (операции) и указано ее применение для построения новых классов характеристически нильпотентных алгебр Ли (т. е. алгебр Ли, алгебра дифференцирований которых нильпотентна). Однако авторам этих работ, видимо, не было известно, что совершенно аналогичная конструкция для случая абстрактных групп уже многократно рассматривалась ранее (начиная с работ Ф. Леви, о которых см. [3, с. 476]), за которыми последовали, в частности, несколько работ О. Н. Головина и А. Л. Шмелькина, а также других математиков). У Ф. Леви в [4] речь шла об S-произведениях, а у О. Н. Головина — о метабелевых произведениях групп (и некоторых их обобщениях — см. ниже). В [1, 2] ни одна из этих работ не упоминается, и это, видимо, указывает на отсутствие у авторов информации о них. Более того, используемый Ф. Леви термин «S-группа» используется в этих работах в совершенно другом смысле (применительно, конечно, не к группам, а к алгебрам Ли). В дальнейшем для групп была введена более общая конструкция «нильпотентных произведений», которые были подробно изучены (см. например [3, 5]). Затем были введены более общие конструкции — полинильпотентных, разрешимых и вербальных произведений групп, и изучены их свойства (обзор некоторых результатов можно найти в [3]). Отметим еще, что через год после публикации работ [1, 2] вышла работа [6], где вводится и изучается метабелево произведение алгебр Ли (в основном метабелевых) — той же операции, что и в [1, 2] (но сформулированной несколько по-другому). Однако здесь метабелевость понимается не так, как в работах О. Н. Головина и его последователей (у них метабелевы группы — это те, которые теперь обычно называют нильпотентными класса 2, а в [6] метабелевы группы — это разрешимые длины 2).

В данной статье некоторые аналоги описанных выше групповых конструкций изучаются для случая конечномерных алгебр Ли, при этом нужно отметить, что некоторые аналоги для алгебр Ли не представляют интереса (например, аналоги групповых полинильпотентных и разрешимых произведений для алгебр Ли совпадают). Здесь мы будем следовать в основном методам О. Н. Головина и его учеников, но в модернизированном виде. Сразу укажем, что основная цель данной статьи — не полное изложение теории нильпотентных сумм алгебр Ли параллельно теории нильпотентных произведений для абстрактных групп, а изложение таких результатов о суммах, в которых проявляется специфика именно алгебр Ли. Например, для алгебр Ли понятия свободной алгебры и свободной суммы вводятся заметно сложнее, чем их аналоги для случая групп. В частности, для конечномерных алгебр Ли при этом приходится выходить за пределы конечномерного случая и рассматривать бесконечномерные алгебры Ли.

Еще одна цель данной статьи — указать некоторые приложения понятия нильпотентной суммы алгебр Ли. Мы получаем полезные конструкции новых нильпотентных алгебр Ли, а также конструкции нильмногообразий (компактных однородных пространств нильпотентных групп Ли) и диффеоморфизмов Аносова на них. При этом рассматриваются еще и некоторые результаты для нильпотентных групп Ли и дискретных подгрупп в них.

В § 1 дано краткое описание конструкции нильпотентного произведения для случая абстрактных групп. Содержание этого обзорного параграфа будет далее использовано как «мотиватор» аналогичных конструкций и результатов для алгебр Ли. Кроме того, оно будет непосредственно использовано при изучении решеток в нильпотентных группах Ли.

В § 2 вводится понятие нильпотентной суммы алгебр Ли (рассматриваются несколько вариантов определения этой операции) и изучаются некоторые свойства этой операции.

В § 3 вводится понятие нильпотентного произведения для связных групп Ли. При этом группы Ли и их нильпотентное произведение рассматриваются исходя из их алгебр Ли.

В § 4 изучаются компактные нильмногообразия и некоторые конструкции, соответствующие понятию нильпотентной суммы. Указано приложение полученных результатов к построению принципиально новых (по сравнению с использовавшимися до сих пор) примеров диффеоморфизмов Аносова на нильмногообразиях.

В данной статье все алгебры Ли рассматриваются над полем вещественных чисел (хотя многие результаты для алгебр Ли остаются справедливыми и в случае любого поля характеристики 0). Группы Ли всегда предполагаются связными, а часто даже односвязными.

§ 1. О нильпотентных произведениях групп (краткий обзор)

Начнем с определения нильпотентных произведений групп.

Пусть G_α — некоторое семейство групп (абстрактных). Рассмотрим их свободное произведение $*G_\alpha$. Его элементами являются классы эквивалентности всевозможных формальных произведений элементов этих групп по отношению эквивалентности, порожденному таким соотношением: «если два подряд идущих сомножителя принадлежат одной и той же группе, то их можно заменить их произведением» (единица при этом считается общей для всех групп). Подробнее об этой конструкции см. [3]. Если группы G_α задаются своими образующими и соотношениями, то при свободном произведении этих групп их образующие дизъюнктно объединяются и то же делается для множеств их соотношений. Например, любая свободная группа есть свободное произведение групп $\mathbf{Z}$ (в количестве, равном числу образующих свободной группы). Есть и более нетривиальные примеры. Например, модулярная группа $SL_2(\mathbf{Z})$ разлагается в свободное произведение $\mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3$ двух конечных циклических групп.

Отметим характеристическое свойство свободного произведения: если заданы произвольные гомоморфизмы $\phi_\alpha : G_\alpha \to H$ групп G_α в некоторую группу H, то они продолжаются, притом однозначно, до гомоморфизма в H свободного произведения групп G_α. Применим это свойство в следующей ситуации: рассмотрим прямое произведение $\times G_\alpha$ и естественные гомоморфизмы групп G_α в него (вложения в виде прямых сомножителей). Эти гомоморфизмы продолжаются до гомоморфизма $*G_\alpha \to \times G_\alpha$. Ядро этого гомоморфизма обозначим, следуя сложившейся традиции, через N_0, оно называется *свободным коммутантом групп* G_α (т. е. коммутантом этих групп, вложенных в их свободное произведение) или *декартовой подгруппой* свободного произведения. Эта подгруппа всегда является свободной группой и состоит из всех тех элементов свободного произведения, у которых произведение всех элементов из фиксированной группы G_α, входящих в такое произведение, равно единице (и так для любой G_α). По-другому декартову подгруппу можно описать так: она порождена словами вида $[g_\alpha, g_\beta]$ при всевозможных $\alpha \neq \beta$, где $g_\alpha \in G_\alpha$, $g_\beta \in G_\beta$ с последующей нормализацией (ненужной в случае произведения двух групп), т. е. переходу к нормальному делителю, порожденному указанными образующими.

Полезно отметить еще такое свойство свободного произведения: если в группе $G = A * B$ рассмотреть нормальный делитель N, порожденный элементами группы B, то $G/N \simeq A$.

Для определения нильпотентного произведения, следуя [5], введем нормальные делители N_k следующим образом. Через F обозначим свободное произведение $*G_\alpha$ произвольных групп G_α. Исходя из соответствующей декартовой подгруппы N_0, положим $N_1 = [F, N_0]$ и далее $N_k = [F, N_{k-1}]$. Подгруппы N_i иногда называют *кратными свободными произведениями* (нулевое свободное произведение — это N_0).

Нильпотентным произведением порядка k групп G_α называется группа

$*G_\alpha/N_k$. Оно обозначается обычно через $\circ_k G_\alpha$. При $k = 0$ имеем, конечно, прямое произведение. При $k = 1$ получаем операцию, впервые введенную в [4] (под названием «S-произведение», причем только для двух групп). В [7, 8] эта операция была названа *метабелевым произведением групп*.

О. Н. Головиным были доказаны, в частности, следующие результаты о нильпотентных произведениях групп.

1. Операция $\circ_k$ на множестве всех групп ассоциативна.

2. Эта операция является точной, т. е. существуют мономорфизмы $G_\alpha \to \circ_k G_\alpha$, образы которых порождают группу $\circ_k G_\alpha$.

Именно поиск операций на классе всех групп, являющихся точными и отличными от операций прямого и свободного произведений, привела О. Н. Головина к введению нильпотентных произведений.

3 (см. [5]). Для нильпотентных групп G_1 и G_2 группа $G_1 \circ_k G_2$ при значениях k, не превосходящих классы нильпотентности групп G_1 и G_2, максимальна (в том смысле, что все остальные — ее фактор-группы) среди нильпотентных групп класса $\leq k$, порожденных подгруппами, изоморфными G_1 и G_2.

4 (см. [6]). Если $[A, A] = A$, то $A \circ_k B \simeq A \times B$.

Кроме того, если $Z(A) = \{0\}$, то $A \circ_k B \simeq A \times B$.

Отметим еще такой результат: можно ввести понятие тензорного произведения $\otimes$ произвольных групп и тогда оказывается [9], что группа $A \otimes B$ изоморфна взаимному коммутанту групп A и B в их метабелевом произведении$A \circ_1 B$. С другой стороны, это тензорное произведение изоморфно тензорному произведению абелевых групп $A/[A, A]$ и $B/[B, B]$.

После работ О. Н. Головина последовал ряд других работ на тему нильпотентных произведений. При этом стало использоваться новое определение нильпотентного произведения (принадлежащее Морану [10] и использовавшееся даже учеником О. Н. Головина А. Л. Шмелькиным). Оно основано на более общей конструкции вербального произведения групп. Опишем его.

Для произвольных групп G_α их свободное произведение $*G_\alpha$ обозначим через F. Рассмотрим элементы $C^k(F)$ нижнего (убывающего) центрального ряда группы F:

$$C^1(F) = F, C^{k+1}(F) = [F, C^k(F)], \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Оказывается, что нильпотентное произведение $\circ_k(G_\alpha)$ изоморфно группе $F/(C^k(F) \cap N_0)$, где N_0 — это декартова подгруппа или, что то же, нормализованный взаимный коммутант групп G_α, уже описанный выше. Этот факт дает нам новое определение для нильпотентного произведения, которое во многих случаях оказалось удобнее исходного. Кроме того, это новое определение может быть обобщено: можно рассматривать разрешимые произведения, полинильпотентные произведения и в максимальной общности вербальные произведения групп. Для вербальных произведений доказаны их ассоциативность, а также свойства склеивания эпиморфизмов (в сильной — ядерной — форме, это называется *постулатом Маклейна*) и мономорфизмов — об этом с указанием ссылок сказано в дополнении к [3].

В [11] доказано важное свойство нильпотентного произведения

5. Нильпотентная группа не может быть разложена в разноименные нильпотентные произведения.

Тем самым при наличии для группы G разложения $G = A \circ_k B$ число k определено группой G однозначно. В [11] приведены достаточные условия на нильпотентные группы без кручения, для которых разложение в нильпотентное произведение единственно (с точностью до изоморфизма и перестановки множителей, конечно).

При этом сами факторы в нильпотентном произведении в общем случае не однозначно определенные. В [11] даны и примеры неединственности разложения в нильпотентное произведение нильпотентных групп без кручения.

Изложенные в этом параграфе сведения будут использованы далее в качестве «мотиватора» при изучении аналога операции нильпотентного произведения групп — нильпотентной суммы алгебр Ли.

§ 2. Нильпотентные суммы алгебр Ли

По аналогии с конструкцией прямого произведения групп в этом параграфе рассматривается конструкция нильпотентной суммы произвольных (у нас — конечномерных) алгебр Ли. Сама идея введения нильпотентной суммы не нова (в частности, см. [1, 2], автореферат [12] и диссертацию А. В. Сырцова, защищенную в МГУ в 2005 г.). Наше рассмотрение существенно более общее, чем в [1, 2], но менее абстрактное, чем в указанной диссертации А. В. Сырцова (там рассматривались хопфовы кольца Ли без кручения, а мы изучаем конечномерные вещественные алгебры Ли и в дальнейшем соответствующие им группы Ли). Отметим, что относящиеся к нильпотентным суммам результаты А. В. Сырцова, видимо, подробно нигде не опубликованы (не считая автореферата и текста самой диссертации). Автор имел возможность ознакомиться в библиотеке с текстом этой диссертации. О ее содержании в связи с рассматриваемыми в данной статье вопросами будет сказано ниже. Интересно отметить, что в [6] рассматриваются метабелевы произведения (именуемые у нас суммами) метабелевых алгебр Ли. Но там метабелевость понимается иначе, чем в работах О. Н. Головина: в [6] метабелевыми называются алгебры Ли, у которых коммутант абелев (и произведения строятся соответственно этому).

Понятие свободной алгебры Ли предполагаем известным. Отметим только одно полезное свойство: пересечение всех членов нижнего центрального ряда свободной алгебры Ли тривиально. Это означает, что в некотором смысле свободная алгебра Ли может быть сколь угодно точно аппроксимирована нильпотентными алгебрами Ли (конечномерными, если исходная свободная алгебра Ли имеет конечное число образующих). Понятие нижнего центрального ряда будет играть значительную роль в одном из определений нильпотентной суммы алгебр Ли. Одна из сложностей при изучении свободных алгебр Ли — это тот факт, что подалгебра свободной алгебры Ли не обязательно свободна (в отличие от группового случая).

Начнем наше рассмотрение с понятия свободной суммы алгебр Ли L_α (хотя часто для них по аналогии с группами употребляется не совсем адекватный термин «свободное произведение»). При этом ограничимся случаем, когда число алгебр Ли L_α конечно (этого вполне достаточно для интересующих нас приложений). Впервые понятие свободной суммы (или произведения) алгебр Ли ввел А. И. Ширшов [13]. Проще всего это сделать, исходя из представления алгебр Ли их образующими и соотношениями. Пусть алгебры Ли L_α заданы в виде $\langle X_\alpha \mid R_\alpha \rangle$, где X_α — множество образующих алгебры Ли L_α, а R_α — множество соотношений. Тогда положим $*L_\alpha = \langle \bigsqcup X_\alpha | \bigsqcup R_\alpha \rangle$, здесь дизъюнктно объединяются множества образующих алгебр Ли L_α и множества их соотношений. Более конструктивное определение свободной суммы для алгебр Ли, аналогичное определению свободного произведения для групп через формальные произведения, довольно неудобно. Здесь приходится применять разного рода ухищрения, например, использовать специальные слова (базис Ширшова — «особые слова»). Еще один способ введения свободной суммы — категорный, через свойство универсальности (как и для групп). А именно, алгебра Ли L называется *свободной суммой алгебр Ли* L_α, если она содержит подалгебры Ли, изоморфные L_α, и для любого набора гомоморфизмов $L_\alpha \to K$ в некоторую алгебру Ли существует, притом единственное, распространение этих гомоморфизмов до гомоморфизма $L \to K$. При рассмотрении конечномерных алгебр Ли понятие свободной суммы доставляет немало неудобств, так как она никогда не бывает конечномерной алгеброй Ли. Поэтому при использовании свободной суммы для последующих определений (например, для определения нильпотентной суммы алгебр Ли) бывает полезно переходить от использования свободной суммы к рассмотрению некоторых конечномерных, «усеченных» ее заменителей.

Теперь по аналогии с определением нильпотентного произведения групп дадим два (эквивалентных между собой, конечно) определения нильпотентной суммы алгебр Ли L_α.

Вначале вводится понятие декартовой подалгебры или свободного коммутанта алгебр Ли. Так называется ядро гомоморфизма $*L_\alpha \to \oplus L_\alpha$, полученного продолжением (в силу свойства универсальности свободной суммы) естественных вложений каждой из алгебр Ли L_α в их прямую сумму в виде прямых слагаемых. Эта алгебра Ли свободна [14] и порождена как идеал элементами вида $[X_\alpha, X_\beta]$, где $X_\alpha \in L_\alpha$, $X_\beta \in L_\beta$, при $\alpha \neq \beta$ (т. е. к подалгебре, порожденной элементами вида $[X_\alpha, X_\beta]$, нужно еще применить нормализацию, которую в случае алгебр Ли естественнее было бы называть *идеализацией*). Отметим, что в случае двух слагаемых дополнительной нормализации не требуется. Далее вводим идеалы $N_k : N_1 = [N_0, L], \ldots, N_{k+1} = [N_k, L]$ (здесь $L = *L_\alpha$). Наконец, полагаем $\circ_k L_\alpha = L/N_k$ — это и будет нильпотентная сумма алгебр Ли L_α порядка $k = 0, 1, 2 \ldots.$ Если все алгебры Ли L_α конечномерны и их число конечно, то их нильпотентная сумма любого конечного порядка тоже конечномерна.

При $k = 0$ эта конструкция дает прямую сумму алгебр Ли L_α. При $k = 1$ получаем «метабелеву сумму» (если следовать терминологии О. Н. Головина) или «произведение с помощью образующих», введенное в [1]. В [2] приведена явная конструкция, которую полезно здесь воспроизвести (с некоторыми модификациями).

Введем вспомогательные обозначения. Через L^{ab} будем обозначать абелеву алгебру Ли $L/[L, L]$ — абелианизацию алгебры Ли L. Рассмотрим $H^2\big(L_1 \oplus L_2, L_1^{ab} \otimes L_2^{ab}\big)$ — пространство двумерных когомологий алгебры Ли $L_1 \oplus L_2$ с коэффициентами в тривиальном модуле $L_1^{ab} \otimes L_2^{ab}$. Элементы этого пространства задают центральные расширения алгебры Ли $L_1 \oplus L_2$ с помощью пространства $L_1^{ab} \otimes L_2^{ab}$, рассматриваемого как абелева алгебра Ли. Теперь можно переходить к описанию конструкции метабелевой суммы двух алгебр Ли (мы используем термин «метабелева сумма», отдавая дань традиции для групп, так как термин «произведение с помощью образующих», использованный в [1, 2], представляется очень неудачным).

Для двух алгебр Ли L_1, L_2 рассмотрим отображение $\phi : (L_1 \oplus L_2) \otimes (L_1 \oplus L_2) \to L_1^{ab} \otimes L_2^{ab}$, задаваемое такой формулой:

$$(X_1, X_2), (X_1', X_2') \to X_1^{ab} \otimes {X_2'}^{ab} - {X_1'}^{ab} \otimes X_2^{ab},$$

здесь X^{ab} — это образ элемента X (с индексами) при естественном эпиморфизме абелианизации ($L \to L/[L,L]$) произвольной алгебры Ли L.

Легко проверить, что ϕ — это коцикл, принадлежащий $C^2\big(L_1 \oplus L_2, L_1^{ab} \otimes L_2^{ab}\big)$. Соответствующий ему класс когомологий из $H^2\big(L_1 \oplus L_2, L_1^{ab} \otimes L_2^{ab}\big)$ задает некоторое центральное расширение алгебры Ли $L_1 \oplus L_2$. Как нетрудно проверить, полученная при этом расширении алгебра Ли — это та, которая построена в [2]. С другой стороны, она изоморфна $L_1 \circ_1 L_2$ — нильпотентной сумме порядка 1 двух алгебр Ли, т. е. получается как частный случай описанной выше общей конструкции нильпотентных сумм алгебр Ли.

Полезно заметить, что всегда $N_0/N_1 = \otimes L_\alpha^{ab}$. Именно этот факт объясняет появление пространства $L_1^{ab} \otimes L_2^{ab}$ в приведенной выше конструкции метабелевой суммы. В принципе можно было бы вычислить размерности пространств N_0/N_i при любом натуральном i (используя, например, базис Ширшова), но нам это не понадобится.

Отметим здесь одно важное свойство метабелевой суммы: она дает обычно алгебры Ли с довольно большим центром. Например, если алгебры Ли L_1, L_2 обе нильпотентны, то для них $\dim(L_i/[L_i, L_i]) \geq 2$. Поэтому размерность центра их метабелевой суммы не меньше чем 4 (так как $\dim L_1^{ab} \otimes L_2^{ab} \geq 4$). В частности, получаем, что многие нильпотентные алгебры Ли не имеют разложений в метабелевы суммы. Например, у алгебры Ли $N_n(\mathbf{R})$ нильпотентных вещественных матриц порядка n центр, как известно, одномерен, и потому эта алгебра Ли не разлагается в метабелеву сумму алгебр Ли (которые обязательно должны быть нильпотентными, так как они вкладываются в эту алгебру Ли).

Приведем еще одно определение нильпотентной суммы — по аналогии с групповым определением Морана. А именно, положим $\circ_k L_\alpha = L/(C^k(L) \cap N_0)$, где $C^k(L)$ — это члены нижнего центрального ряда алгебры Ли L. Как нетрудно убедиться (по аналогии с групповым случаем), это второе определение эквивалентно исходному, приведенному выше. Ниже рассмотрим еще другие варианты определения нильпотентной суммы, полезные при рассмотрении случая конечномерных алгебр Ли. Пока отметим, что можно дать определения более общих операций на классе алгебр Ли — вербальных сумм — по аналогии с вербальными произведениями в теории групп. Полезно отметить, что вербальные произведения — это «свободные произведения» в многообразиях групп, в которых слова, задающие эти произведения, являются тождествами [3, с. 471]. Ту же точку зрения можно проводить и для алгебр Ли, но не будем здесь касаться этих конструкций. В [12] определение нильпотентной суммы дано как раз в виде частного случая вербальной суммы.

Рассмотрим алгебру Ли $*L_\alpha$ — свободную сумму алгебр Ли L_α, а в ней подалгебру Ли N_0 — декартову подалгебру (на самом деле она является идеалом). В силу определения подалгебры N_0 фактор-алгебра $*L_\alpha/N$ изоморфна прямой сумме $\oplus L_\alpha$. При этом каждая из алгебр Ли L_α вкладывается в $*L_\alpha$ (но они там, вообще говоря, не коммутируют в отличие от прямой суммы). Рассмотрим идеал N_k, описанный выше, и фактор-алгебру $M_k = N_k/N_0$. Полученная алгебра Ли M_k нильпотентна класса k. Если все алгебры Ли L_α конечномерны и их число конечно, то M_k — конечномерная нильпотентная алгебра Ли, причем число ее образующих не меньше размерности векторного пространства N_0/N_1. Назовем ее *нильпотенизатором семейства алгебр Ли* L_α. Отметим сразу, что получили новую конструкцию нильпотентных алгебр Ли, исходящую из произвольного множества произвольных алгебр Ли. Иногда, конечно, эта конструкция будет давать неинтересные результаты, например, приводить к нулевой алгебре Ли. Но во многих случаях она приводит к нетривиальным нильпотентным алгебрам Ли (некоторые примеры приведены ниже). Введем обозначение $M_k = \diamond_\alpha L_\alpha$. В силу изложенного выше имеем такую точную последовательность:

$$0 \to \diamond_\alpha L_\alpha \to \circ_\alpha L_\alpha \to \oplus_\alpha L_\alpha \to 0.$$

Тем самым нильпотентная сумма $\circ_k L_\alpha$ может рассматриваться как расширение алгебры Ли $\oplus_\alpha L_\alpha$ с помощью нильпотентной класса k алгебры Ли $\diamond_\alpha L_\alpha$. Это расширение тоже можно описать с помощью когомологического класса (характеристического класса расширения), но это описание получается весьма громоздким и не дает прояснения ситуации. Для метабелевой суммы алгебра Ли $\diamond L_\alpha$ — это в точности $\otimes L_\alpha^{ab}$, тензорное произведение абелианизаций алгебр Ли L_α (для случая двух алгебр Ли это подробно описано выше со ссылкой на [2]).

Рассмотрим частный случай: нильпотентную сумму конечного числа нильпотентных конечномерных алгебр Ли L_i. Здесь $\circ_k L_i$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли. Но при ее построении приходится использовать бесконечномерную алгебру Ли $*L_i$ (свободная сумма нетривиальных алгебр Ли всегда бесконечномерна). Было бы желательно исключить вторжение бесконечномерности в конструкцию, в которой начальный и конечный объекты конечномерны. Для случая нильпотентных алгебр Ли это удается сделать довольно легко (то же можно сделать и для случая конечномерных произвольных алгебр Ли, но нам это здесь не понадобится).

Фиксируем число k (порядок строящейся нильпотентной суммы) и рассмотрим свободные нильпотентные алгебры Ли NF, они получаются факторизацией свободных алгебр Ли по $(k+1)$-м членам нижнего центрального ряда. Эти нильпотентные алгебры Ли конечномерны (существуют даже явные формулы для вычисления их размерностей). Нильпотентную алгебру Ли L_i можно представить как фактор-алгебру свободной нильпотентной алгебры Ли NF_i по некоторому идеалу. Другими словами, она задается некоторым набором соотношений R_i в NF_i. Тем самым от бесконечномерных свободных алгебр Ли перешли к рассмотрению конечномерных свободных нильпотентных алгебр Ли. Следующий шаг — «сделать конечномерной» свободную сумму конечномерных нильпотентных алгебр Ли.

В силу предложения 3, приведенного ниже, класс нильпотентности свободной суммы порядка k конечного числа нильпотентных алгебр Ли класса нильпотентности $\leq l$ — не более, чем $\max(k, l)$. В частности, если порядок нильпотентной суммы тоже не превосходит числа l, то класс нильпотентности при образовании нильпотентной суммы не увеличивается. Поэтому можно дать такое определение нильпотентной суммы. Рассмотрим многообразие нильпотентных алгебр Ли класса $\leq l$ и свободную сумму в нем. Полученную алгебру Ли нужно профакторизовать по идеалу N_k, построенному по соответствующей декартовой подалгебре Ли. В результате получится нильпотентная сумма — конечномерная нильпотентная алгебра Ли класса нильпотентности $\leq l$. Однако при больших, чем l, порядках нильпотентной суммы такая конструкция не применима. Более подробно на ее модификациях в этих общих случаях останавливаться не будем.

Рассмотрим один простой пример нильпотентной суммы (другие примеры приведены в конце этого параграфа). Нильпотентная сумма порядка k одномерных абелевых алгебр Ли — это свободная нильпотентная алгебра Ли класса k, число образующих которой равно числу одномерных слагаемых. Отсюда следует, в частности, что если $FN_k(l)$ обозначает свободную нильпотентную алгебру Ли класса k с l образующими, то $FN_k(l) \circ_k FN_k(l') \simeq FN_k(l + l')$.

Переходим к изучению некоторых свойств нильпотентных сумм алгебр Ли. Они, конечно, будут аналогичны свойствам нильпотентного произведения групп (см. § 1).

Предложение 1. *Операция $\circ_k$ нильпотентной суммы с индексом k ассоциативна.*

Доказательство. Вначале, как и для групп [4, теорема 5.1], доказывается, что если множество индексов α разбить на две непересекающиеся части, то нильпотентная сумма (фиксированного порядка k) всех групп разлагается в одноименную нильпотентную сумму двух алгебр Ли, каждая из которых — нильпотентная сумма, соответствующая той или иной части разбиения. Это доказательство основано на определении (исходном) нильпотентной суммы и теореме об изоморфизмах, сформулированной в отличие от [4] не для групп, а для алгебр Ли. При этом используются также вспомогательные результаты, совершенно аналогичные приведенным в [4] для групп.

После этого ассоциативность операции $\circ$ можно доказывать, как и теорему 5.5 в [4], трансфинитной индукцией. Но нам достаточно нильпотентных сумм конечного числа алгебр Ли, для которых ассоциативность мгновенно вытекает из сказанного выше. Например, $L_1 \circ_k (L_2 \circ_k L_2)$ и $(L_1 \circ_k L_2) \circ_k L_3$ изоморфны, потому что обе эти нильпотентные суммы изоморфны $\circ_k L_i$ — нильпотентной сумме трех алгебр Ли L_i $(1 \leq i \leq 3)$.

Рассмотрим вопрос об одноименности разложений нильпотентной алгебры Ли в нильпотентную сумму. Как отмечено в § 1, нильпотентная группа если и разлагается в несколько различных нильпотентных произведений, то все они одного и того же порядка k. Для произвольных групп такое утверждение неверно (см. [3]). Для алгебр Ли, естественно, оказывается верным аналог указанной теоремы единственности.

Предложение 2. *Нильпотентная алгебра Ли положительной размерности не может разлагаться в разноименные нильпотентные суммы.*

Доказательство. Здесь схема рассуждений совершенно аналогична использованной в [12] в доказательстве соответствующего утверждения для групп, причем даже с некоторыми упрощениями. В частности, не требуется понятия изолятора подгруппы, использованного в [12] (для алгебр Ли над полями это понятие бессодержательно). При этом используется определение свободной суммы «по Морану» (т. е. второе из приведенных выше — аналог определения Морана).

Из предложения 2, в частности, следует, что нильпотентная сумма порядка $k \geq 1$ алгебр Ли не разлагается в нетривиальную прямую сумму. Отметим, что условие нильпотентности здесь существенно (см., например, предложение 4 ниже), как и для групп — где в общем случае неединственность тоже имеет место.

Далее, из предложений 1 и 2 вытекает

Следствие. *Для произвольных конечномерных алгебр Ли L_1, L_2, L_3 положительной алгебра Ли $L_1 \circ_k (L_2 \circ_l L_3)$ изоморфна $(L_1 \circ_k L_2) \circ_l L_3$ тогда и только тогда, когда $k = l$.*

В частности, алгебры Ли $(L_1 \oplus L_2) \circ_k L_3$ и $(L_1 \circ L_3) \oplus (L_2 \circ_k L_3)$ не будут изоморфны, если $k > 0$.

Другими словами, для разноименных нильпотентных сумм ассоциативность не имеет места.

Что касается вопросов единственности разложения в нильпотентные суммы фиксированного порядка нильпотентных алгебр Ли (для случая групп, изученного в [11] и ряде других работ), то это рассмотрено (подробнее, чем нужно для наших целей) в [7]. Там, в частности, приведены доказательства предложений 1 и 2, причем рассуждения в точности аналогичны тем (как и сказано выше), которые для случая групп содержатся в [11]. При этом по аналогии с [11] устанавливается, что неприводимые (т. е. неразложимые в нетривиальные нильпотентные суммы) слагаемые размерностей > 1 в разных нильпотентных суммах одной и той же алгебры Ли взаимозаменяемы. Далее этими вопросами здесь заниматься не будем.

Интересно отметить, что автору диссертации [7] работы [1, 2], видимо, были неизвестны.

Перейдем к некоторым другим свойствам нильпотентной суммы алгебр Ли.

По аналогии с [5] имеют место следующие утверждения.

Предложение 3. *Прямая сумма порядка k нильпотентных алгебр Ли, порядки которых не превосходят некоторого числа l, имеет класс нильпотентности не более, чем $\max(k, l)$.*

Предложение 4. *Если алгебра Ли L совпадает со своим коммутантом или же ее центр тривиален, то любое ее разложение в нильпотентную сумму вырождается в прямую сумму.*

Предложение 5. *Если алгебра Ли L совпадает со своим коммутантом, то ее нильпотентная сумма $L \circ_k L'$ вырождается в прямую сумму $L \oplus L'$.*

Отметим, что условия в предложениях 4 и 5 никогда не выполняются для нильпотентных алгебр Ли.

Отметим также, что условие совпадения L со своим коммутантом можно записать в виде $L^{ab} = \{0\}$. При $k = 1$ это позволяет увидеть очевидность предложения 5 в этом случае, исходя из «когомологического» описания нильпотентной суммы, данного выше.

Например, если в нильпотентной сумме $\circ_k L_\alpha$ одна из алгебр Ли полупроста, то в силу предложения 4 эта нильпотентная сумма изоморфна прямой сумме указанной полупростой алгебры Ли и нильпотентной суммы остальных алгебр Ли $L\alpha$. В силу этого особый интерес приобретают нильпотентные суммы алгебр Ли, не совпадающих со своими коммутантами. Поэтому рассмотрению нильпотентных сумм нильпотентных алгебр Ли имеет смысл уделить особое внимание.

Заметим, что аналог утверждения предложения 5 для алгебры Ли L с тривиальным центром, вообще говоря, неверен. Покажем это на примере. Пусть L, L' — неабелевы двумерные алгебры Ли (с точностью до изоморфизма такая алгебра Ли единственна). Тогда $\dim(L \circ_1 L') = 5$ (это вытекает из явной конструкции метабелевой суммы, приведенной выше), поэтому $L \circ_1 L'$ имеет размерность, большую, чем размерность алгебры Ли $L \oplus L'$.

Предложение 6. *Произвольные эпиморфизмы $\phi_\alpha : L_\alpha \to L'_\alpha$ имеют распространение, притом единственное, до эпиморфизма $\phi^* : \circ_k L_\alpha \to \circ_k L'_\alpha$. Ядро* *эпиморфизма ϕ^* как идеал порождено ядрами эпиморфизмов ϕ_α (точнее, их образами при естественных вложениях L_α в $\circ_k L_\alpha$).*

Доказательство. Рассуждения здесь тождественны использованным, например, в [10] при доказательстве группового аналога для произвольных вербальных произведений.

Рассмотрим в алгебрах Ли L_1, L_2 идеалы M_1, M_2. Тогда алгебра Ли $L_1/M_1 \circ_k L_2/M_2$ изоморфна $L_1 \circ_k L_2/I(M_1, M_2)$, где $I(M_1, M_2)$ — идеализатор идеалов M_1, M_1 в $L_1 \circ_k L_2$ (т. е. идеал, порожденный M_1 и M_2, естественно вложенными в $L_1 \circ_k M_2$).

Из предложения 6 можно вывести еще одну конструкцию нильпотентной суммы нильпотентных алгебр Ли, которая для случая конечного числа конечномерных нильпотентных алгебр Ли не использует никаких бесконечномерных объектов. При этом будем исходить из возможности явно построить нильпотентную сумму свободных нильпотентных алгебр Ли, что само по себе составляет интересную задачу, на которой здесь подробнее останавливаться не будем. Итак, пусть N_1 и N_2 — две конечномерные нильпотентные алгебры Ли (случай любого конечного числа слагаемых разбирается совершенно аналогично). Пусть $\mathrm{dim} N_i/[N_i, N_i] = k_i$. Имеем представления $N_i = FN(k_i)/I_i$, где $FN(k_i)$ — свободные нильпотентные алгебры Ли с k_i образующими и достаточно большими классами нильпотентности (как и соответствующие алгебры Ли N_i, $i = 1, 2$). Алгебра Ли $C = FN(k_1) \circ FN(k_2)$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли. Тогда алгебра Ли $N_1 \circ N_2$ будет изоморфна алгебре Ли $C/I(I_1, I_2)$ конечномерной алгебры Ли C. Такой подход к рассмотрению нильпотентной суммы может в ряде случаев оказаться полезным.

Отметим, что предложение 6 означает, что для нильпотентной суммы алгебр Ли выполнен постулат Маклейна (в случае групп см. [10]). Что же касается постулата Мальцева (в котором речь идет о склеивании мономорфизмов с ядерным условием), то он для алгебр Ли , как и для произвольных групп (даже нильпотентных), вообще говоря, неверен. Видимо, только для нильпотентной суммы абелевых алгебр Ли постулат Мальцева справедлив для любых подалгебр Ли в этих алгебрах Ли. Однако известно [7], что порожденная подгруппами группа в нильпотентном произведении групп является фактор-группой их нильпотентного произведения. Аналогичный факт, как легко проверить, верен и для подалгебр Ли в слагаемых нильпотентной суммы алгебр Ли.

Следующий результат не имеет группового аналога — он касается разложений Леви для алгебр Ли.

Предложение 7. *Пусть $L = *_k L_i$ — нильпотентная сумма порядка k конечного числа конечномерных алгебр Ли L_i. Тогда полупростая часть (фактор Леви) алгебры Ли L изоморфна прямой сумме полупростых частей алгебр Ли L_i, а радикал алгебры Ли L порожден образами радикалов алгебр Ли L_i при их естественных вложениях в L.*

Доказательство. Рассмотрим разложения Леви $L_i = S_i + R_i$ алгебр Ли L_i (S_i — полупростые части алгебр Ли L_i, а R_i — радикалы). Естественные эпиморфизмы $L_i \to S_i$ (с ядрами R_i) порождают в силу предложения 6 эпиморфизм $*_k L_i \to *_k S_i$. Ввиду предложения 5 сумма $*_k S_i$ — это на самом деле прямая сумма $\oplus S_i$. Ядро указанного эпиморфизма разрешимо, так как порождено разрешимыми идеалами (радикалами) алгебр Ли L_i. Поэтому полупростая алгебра Ли $\oplus S_i$ изоморфна полупростой части алгебры Ли $*_k L_i$.

Еще одно применение предложения 6 основано на рассмотрении эпиморфизмов $L_i \to L_i/C^\infty(L_i)$ произвольных конечномерных алгебр Ли в нильпотентные алгебры Ли — факторы по «предельному» (конечному в случае конечномерных алгебр Ли) члену нижнего центрального ряда. Это порождает некоторый канонический эпиморфизм $*_k L_i$ в нильпотентную алгебру Ли $*_k L_i/C^\infty(L_i)$. Подробнее об этом здесь говорить не будем.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще два подхода к определению нильпотентной суммы алгебр Ли. Они основаны на категориальной универсальности операции нильпотентной суммы. Первое из них дается следующим утверждением.

Предложение 8. *Для нильпотентных алгебр Ли L_α класса нильпотентности $\le k$ их нильпотентная сумма порядка k максимальна среди всех нильпотентных алгебр Ли класса нильпотентности $\le k$, порождаемых системой подалгебр Ли, изоморфных алгебрам Ли L_α (т. е. любая другая нильпотентная алгебра Ли, обладающая такими же свойствами, является ее фактор-алгеброй).*

Доказательство. Рассуждения совершенно аналогичны приведенным в [5] для случая групп.

Покажем еще один подход к введению понятия нильпотентной суммы алгебр Ли. Для свободной суммы алгебр Ли характеристическим является свойство распространения (причем однозначного) гомоморфизмов $\phi_\alpha : L_\alpha \to H$ в произвольную алгебру Ли H до гомоморфизма $\phi * L_\alpha \to H$. Для прямой суммы аналогичное утверждение имеет место при условии, что образы гомоморфизмов ϕ_α попарно коммутируют, другими словами, если выполнены условия $[\phi_\alpha(X_\alpha), \phi_\beta(X_\beta)] = 0$ для любых различных индексов ($\alpha \ne \beta$). Обобщим это свойство на нильпотентные суммы.

Гомоморфизмы ϕ_α, ϕ_β в алгебру Ли H назовем *нилькоммутирующими порядка k*, если любое слово длины k, составленное из элементов, принадлежащих их образам (причем в каждом слове есть элементы по крайней мере двух различных алгебр Ли L_α), равно нулю. При $k = 0$ это условие тривиально, при $k = 1$ это условие коммутирования, о котором говорилось выше. Ясно, что нильпотентная сумма порядка k универсальна относительно распространимости гомоморфизмов при условии их нилькоммутируемости порядка k. Это тоже характеризация нильпотентной суммы. Отсюда, в частности, вытекает

Предложение 9. *Прямое произведение $\times \operatorname{Aut}(L_\alpha)$ групп автоморфизмов алгебр Ли L_α естественным образом вкладывается в группу автоморфизмов $\operatorname{Aut}(\circ_k L_\alpha)$ их нильпотентной суммы.*

Прямая сумма $\oplus \operatorname{Der}(L_\alpha)$ алгебр Ли дифференцирований естественным образом вкладывается в алгебру Ли дифференцирований алгебры Ли $*_k L_\alpha$.

Рассмотрим некоторые простые примеры вычисления нильпотентной суммы алгебр Ли.

1. Рассмотрим метабелеву (т. е. при $k = 1$) сумму $\widehat{L} = L \circ_1 \mathbf{R}$ алгебры Ли L и одномерной алгебры Ли.

Из конструкции метабелевой суммы вытекает, что $\widehat{L} = L + N$ — полупрямая сумма, где $N = \mathbf{R} + L^{ab}$ (L^{ab} — идеал в N). Действие образующей $1 \in \mathbf{R}$ на L^{ab} тривиально, т. е. алгебра Ли N есть прямая сумма одномерной алгебры Ли и L^{ab} (и потому N абелева).

Далее, имеем $[\widehat{L}, \widehat{L}] = [L, L] + L^{ab}$. Все остальные члены нижнего центрального ряда у алгебр Ли L и $\widehat{L}$ совпадают.

Легко убедиться, что если $Z(L) \subset [L, L]$, то $Z(\widehat{L}) = Z(L) + L^{ab}$.

Отметим также, что последовательное выполнение нескольких метабелевых сумм $\circ_1$ с одномерной алгеброй Ли $\mathbf{R}$ эквивалентно (в силу ассоциативности нильпотентных сумм) метабелевой сумме со свободной метабелевой (т. е. 2-нильпотентной) алгеброй Ли.

2. Рассмотрим нильпотентные суммы (произвольного порядка k) вида $L \circ_k \mathbf{R}$. Пусть Z — ненулевой элемент одномерной алгебры Ли $\mathbf{R}$.

Алгебра Ли $\widehat{L}$ порождается, как нетрудно проверить, подалгеброй, изоморфной L, и элементом Z, при этом к прямой сумме $L \oplus \mathbf{R}$ добавляются нильпотентный идеал, порожденный «особыми словами» (словами Ширшова), составленными из элементов $X_i \in L$ и Z (в которые Z обязательно входит хотя бы один раз), причем слова длины $> k$ считаются равными нулю.

3. Рассмотрим алгебру Ли $\widehat{L} = L \circ_1 N_3$, где N_3 — неабелева трехмерная нильпотентная алгебра Ли (она такая единственная и в подходящем базисе U, V, W задается соотношением $[U, V] = W$).

Имеем $\widehat{L} = L + N$ (полупрямая сумма), где идеал N имеет вид полупрямой суммы $N = N_3 + L^{ab} \otimes \mathbf{N}_3^{ab}$ с естественным действием N_3 на втором слагаемом).

Нетрудно проверить, что $[\widehat{L}, \widehat{L}] = [L, L] + [N_3, N_3] + V$, где $V = L^{ab} \otimes \mathbf{N}_3^{ab}$.

Далее, имеем $[[\widehat{L}, \widehat{L}], \widehat{L}] = [[L, L], L]$ и т. д.

Если $Z(L) \subset [L, L]$, то $Z(\widehat{L}) = Z(L) \oplus Z(n_3) \oplus V$.

Полезными упражнениями для заинтересованного читателя могут оказаться самостоятельные вычисления алгебр Ли $A \circ_k B$ для случая, когда A, B — произвольные конечномерные абелевы алгебры Ли, а также вычисления алгебр Ли вида $L \circ_k \mathbf{R}$ (где L — произвольная алгебра Ли).

§ 3. Нильпотентные произведения групп Ли и их подгрупп

Пусть G_1, G_2 — две связные группы Ли. Построим для них нильпотентное произведение. Стандартный групповой подход здесь применить невозможно, так как понятия свободного произведения групп не переносится на группы Ли (по крайней мере конечномерные). Только прямое произведение $G_1 \times G_2$ (т. е. нильпотентное произведение порядка $k = 0$) вводится естественным образом. При $k = 1$ можно по аналогии со случаем алгебр Ли ввести метабелево произведение, используя явную конструкцию через расширение (описанную выше в § 2). А именно, рассмотрим $G_1^{ab} \otimes G_2^{ab}$ — тензорное произведение двух абелевых групп Ли G_1^{ab}, G_2^{ab}. Отметим, что тензорное произведение абелевых групп Ли естественным образом снабжается структурой групп Ли. Можно указать и явный вид такого произведения. Произвольная абелева связная группа Ли может быть представлена в виде $A = T \times \mathbf{R}^n$ (где T — тор, т. е. компактная абелева группа Ли, изоморфная $(S^1)^n$). Для двух таких групп Ли $A_i = T_i \times \mathbf{R}^{n_i}$ $(i = 1, 2)$ их тензорное произведение имеет вид $\mathbf{R}^{n_1 n_2} \times (S^1)^{n_1 m_2 + n_2 m_1 + m_1 + m_2}$, где $m_i = \dim T_i$ $(i = 1, 2)$. Далее строятся характеристический класс $\phi \in H^2\big(G_1 \times G_2, G_1^{ab} \otimes G_2^{ab}\big)$ и соответствующее ему расширение группы $G_1 \times G_2$.

Но нильпотентные произведения порядков $k \geq 2$ такой прямой конструкцией получить трудно. Можно пытаться использовать аналоги свойств универсальности, указанные выше для нильпотентных сумм. Но мы пойдем другим путем: через алгебры Ли.

Пусть G_1, G_2 — две односвязные группы Ли. Через $L_i = L(G_i)$ обозначим их алгебры Ли. Рассмотрим нильпотентную сумму $L_1 \circ_k L_2$ порядка k этих двух алгебр Ли. Это конечномерная вещественная алгебра Ли. Соответствующую ей односвязную группу Ли назовем *нильпотентным произведением порядка k* групп Ли G_1, G_2, обозначив ее через $G_1 \circ_k G_2$. Так как алгебры Ли L_i вкладываются в их нильпотентную сумму, то и группы Ли G_i вкладываются в виде подгрупп Ли (очевидно, замкнутых) в их нильпотентное произведение, причем эти подгруппы порождают нильпотентное произведение. Имеем также представление нильпотентного произведения в виде расширения прямого произведения с помощью нильпотентной односвязной группы Ли (алгебру Ли которую выше обозначили через $M(L_1, L_2)$). Если группы Ли G_i нильпотентны (именно этот частный случай нам будет далее наиболее интересен), то их нильпотентное произведение тоже нильпотентная односвязная группа Ли.

Так как центр алгебры Ли действует на L_1 тривиально, он присоединенным представлением действует тривиально и на $L_1 \circ_k L_2$. Поэтому $Z(L_i) \subset Z(L_1 \circ_k L_2)$, $i = 1, 2$.

Аналогично рассмотрим в нильпотентном произведении естественную подгруппу Ли, изоморфную G_1, и ее присоединенное действие на алгебре Ли, изоморфное нильпотентной сумме. Более того, рассмотрим действие $\mathrm{Aut}(G_1)$ на свободной сумме алгебр Ли. Действие подгруппы $Z(G_1)$ на L_1 тривиально. Действие этой подгруппы на G_2 считаем тривиальным. Тогда эти действия порождают в силу предложения 9 естественное и потому тривиальное действие группы Ли $Z(G_1)$ на нильпотентной сумме, так как подалгебры Ли L_i порождают нильпотентную сумму. Этим доказано, что центры $Z(G_i)$ лежат в центре группы Ли $G_1 \circ_k G_2$.

Но тогда можно определить и нильпотентное произведение произвольных связных групп Ли. Пусть $G_i = \widetilde{G}_i / Z_i$ — две связные группы Ли, рассматриваемые как фактор-группы односвязных групп Ли $\widetilde{G}_i$ по дискретным центральным подгруппам $Z_i \subset Z(G_i)$. Тогда в качестве нильпотентного произведения групп Ли G_1 и G_2 можно взять группу Ли $\widetilde{G}_1 \circ_k \widetilde{G}\nu_2$ (нильпотентное произведение односвязных групп Ли, уже определенное выше), профакторизованное по центральным подгруппам Z_i.

Пусть D_i — дискретные подгруппы в группах Ли G_i (которые для простоты можно считать односвязными). Рассмотрим группу $D = D_1 \circ_k D_2$ (нильпотентное произведение, определенное обычным для групп образом). Она вкладывается в $G_1 \circ_k G_2$: ее образ, как можно доказать, порождается подгруппами D_i, естественным образом вложенными в нильпотентное произведение объемлющих групп Ли.

§ 4. Нильпотентные произведения нильмногообразий

Пусть N_1, N_2 — две односвязные нильпотентные группы Ли. Если в них существуют решетки (дискретные подгруппы с компактным фактор-пространством), то они определены над $\mathbf{Q}$ (см., например, [15]). Но тогда и их нильпотентное произведение определено над $\mathbf{Q}$, так как это верно для соответствующих алгебр Ли. Решетки в нильпотентных группах Ли определяются $\mathbf{Q}$-структурой однозначно с точностью до соизмеримости.

Рассмотрим некоторую решетку в $N_1 \circ_k N_2$, соответствующую $\mathbf{Q}$-структуре на нильпотентном произведении. Будем называть эту решетку *внутренним нильпотентным произведением* исходных решеток Γ_i (эта подгруппа определена не однозначно, а с точностью до соизмеримости).

Вкратце рассмотрим примеры нильпотентных произведений нильмногообразий.

1. Рассмотрим трехмерную нильпотентную группу Ли $N_3(\mathbf{R})$ — группу Ли унипотентных вещественных матриц третьего порядка. В ней рассмотрим естественную решетку — подгруппу $N_3(\mathbf{Z})$, составленную из целочисленных матриц. Соответствующее нильмногообразие $M = N_3(\mathbf{R})/N_3(\mathbf{Z})$ часто называют *многообразием Ивасавы* (который на самом деле рассматривал только комплексный аналог этого нильмногообразия). В качестве второго множителя возьмем прямую $\mathbf{R}$ с естественной решеткой $\mathbf{Z}$ в ней. Соответствующее нильмногообразие является окружностью.

Можно рассмотреть метабелево произведение многообразия Ивасавы и окружности. Оно является нильмногообразием группы Ли, алгебра Ли которой описана в примере 1 в конце § 2. Размерность этого нового компактного нильмногообразия равна 6. Аналогично рассматривается и метабелево произведение произвольного компактного нильмногообразия и окружности.

Далее рассмотрим еще два примера, соответствующие рассмотренным выше (в конце § 2) примерам нильпотентных сумм алгебр Ли.

2. Нильпотентное произведение порядка k многообразия Ивасавы и окружности.

3. Метабелево произведение произвольного компактного нильмногообразия и многообразия Ивасавы.

Перейдем к рассмотрению диффеоморфизмов Аносова на нильмногообразиях (некоторые сведения о таких диффеоморфизмах в нужном нам контексте см. в [16]).

Пусть M — гладкое многообразие, на котором задана некоторая риманова метрика. Диффеоморфизм $f : M \to M$ (класса C^k, $k \geq 1$) называется *диффеоморфизмом Аносова*, если существуют непрерывное разложение касательного расслоения $T(M) = E^s \oplus E^u$ (подрасслоения E^s и E^u называют соответственно *устойчивой* и *неустойчивой компонентами*), инвариантное относительно f, и константы c, c', а также число $\lambda \in (0,1)$ такие, что для любого $n > 0$

$$\|(df)^n(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| \quad \text{для любого } v \in E^s,$$
$$\|(df)^n(v)\| \geq c'\lambda^{-n} \|v\| \quad \text{для любого } v \in E^u.$$

Известно, что можно подобрать такую метрику на M, для которой будет $c = 1$. От выбора метрики на M свойство диффеоморфизма f быть диффеоморфизмом Аносова не зависит (так как все метрики на компактном многообразии между собой эквивалентны), хотя значения констант c, c' от нее зависят.

Рассмотрим два диффеоморфизма двух компактных нильмногообразий $f_i \in \mathrm{Diff}(N_i/\Gamma_i)$. Будем рассматривать алгебраические диффеоморфизмы, т. е. индуцированные автоморфизмами групп Ли N_i или, что эквивалентно, соответствующих им нильпотентных алгебр Ли. Имеется гипотеза о том, что других диффеоморфизмов Аносова на компактных многообразиях (любых!) не существует. Через Λ_i обозначим спектры (т. е. наборы собственных значений) автоморфизмов Φ_i соответствующих алгебр Ли.

Рассмотрим метабелево произведение нильмногообразий N_1, N_2, как описано выше. По Φ_i можно построить алгебраический автоморфизм полученного нильмногообразия — произведения. Его спектр, очевидно, описывается так: к Λ_1 и Λ_2 добавляется $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2$ — множество попарных произведений собственных чисел из Λ_i (по одному из каждого спектра).

Предположим, что автоморфизмы Φ_i гиперболические. Напомним, что автоморфизм связной группы Ли G называется *гиперболическим*, если характеристические корни его дифференциала по модулю отличны от единицы. Тогда этот дифференциал называется также *гиперболическим автоморфизмом алгебры Ли* $L(G)$.

Чтобы на произведении нильмногообразий построенный диффеоморфизм тоже был гиперболическим, нужно, чтобы числа из спектров Λ_1, Λ_2 были мультипликативно независимы (подробнее см. [16]). В результате доказано следующее утверждение.

Предложение 10. *Пусть $M_1 = N_1/\Gamma_1$ и $M_2 = N_2/\Gamma_2$ — два компактных нильмногообразия. Предположим, что на них существуют алгебраические диффеоморфизмы Аносова f_i $(i = 1, 2)$. Тогда если спектры Λ_i этих диффеоморфизмов мультипликативно независимы, то на компактном нильмногообразии $M_1 \circ_k M_2$ тоже существует диффеоморфизм Аносова* (*при произвольном натуральном k*).

Это предложение позволяет резко расширить возможности построения диффеоморфизмов Аносова на компактных нильмногообразиях.

Например, рассмотрим метабелеву сумму двух двумерных абелевых алгебр Ли $\mathbf{R}^2 \circ_1 \mathbf{R}^2$ — это будет метабелева алгебра Ли размерности 8. Ей соответствует метабелево произведение двух двумерных торов (нильмногообразий, соответствующих этим алгебрам Ли).

На этих двумерных торах возьмем линейные автоморфизмы, здесь спектр — корни уравнений вида $\lambda^2 - n\lambda + 1$ (характеристических уравнений матриц, задающих эти автоморфизмы) при некоторых целых значениях параметра n. Выясним, когда корни соответствующего автоморфизма группы Ли — нильпотентного произведения, будут мультипликативно независимы. Если они мультипликативно зависимы, то при некоторых целых значениях параметров n, m, k, l имеет место равенство $(n + \sqrt{n^2-1})/2^k = (m + \sqrt{m^2-1})/2^l$. Как нетрудно понять, оно может иметь место, только если $\sqrt{n^2-1}$ и $\sqrt{m^2-1}$ линейно зависимы над $\mathbf{Q}$. Но эта линейная зависимость бывает не всегда, хотя и довольно часто. Например, при $n = 3, m = 4$ числа $\sqrt{2}, 2\sqrt{3}$ рационально линейно независимы. В этом случае получаем диффеоморфизм Аносова на 8-мерном нильмногообразии $T^2 \circ_1 T^2$. Такого рода примеров с использованием операции нильпотентного произведения нильмногообразий можно строить много.

Укажем еще естественное обобщение этого примера — с использованием алгебры Ли $\mathbf{R}^n \circ_k \mathbf{R}^m$. При этом можно получить диффеоморфизмы Аносова на нильмногообразиях, не разложимых в прямое произведение, что особо ценится при изучении диффеоморфизмов Аносова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ancochea J. M., Campoamor-Stursberg R.* Characteristically nilpotent Lie algebras of type $g_1 \times g_2$ // Forum Math. 2003. V. 15. P. 299–307.
2. *Ancochea J. M., Campoamor-Stursberg R.* On the product by generators of characteristically nilpotent Lie S-algebras // Pure Appl. Algebra. 2003. V. 184. P. 155–164.
3. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
4. *Levi F.* Notes on group theory // J. Indian Math. Soc. 1944. V. 8. P. 78–91.
5. *Головин О. Н.* Нильпотентные произведения групп // Мат. сб. 1950. Т. 27. С. 427–454.
6. *Даниярова Э. Ю., Казачков И. В., Ремесленников В. Н.* Полуобласти и метабелево произведение метабелевых алгебр Ли // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 14. С. 3–10.

7. *Головин О. Н.* К вопросу об изоморфизме нильпотентных разложение группы // Мат. сб. 1951. Т. 28, № 2. С. 445–452.
8. *Головин О. Н.* Метабелевы произведения групп // Мат. сб. 1951. Т. 28. С. 431–444.
9. *MacHenry T.* The tensor product and the second nilpotent product of groups // Math. Z. 1960. Bd 73. S. 134–145.
10. *Moran S.* Associative operations on groups. I // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6. P. 581–596.
11. *Шмелькин А. Л.* Об изоморфизме нильпотентных разложений нильпотентных групп без кручения // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4. С. 1412–1425.
12. *Сырцов А. В.* Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук «Аналоги для алгебр Ли некоторых утверждений из теории групп» М.: МГУ, 2005.
13. *Ширшов А. И.* Об одной гипотезе теории алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 2. С. 297–301.
14. *Кукин Г. П.* О декартовой подалгебре свободной лиевой суммы алгебр Ли // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 6. С. 422–430.
15. *Рагунатан М.* Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.
16. *Горбацевич В. В.* Об алгебраических диффеоморфизмах Аносова на нильмногообразиях // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 995–1021.

Статья поступила 7 февраля 2014 г.

Горбацевич Владимир Витальевич
Московский гос. технологический университет МАТИ им. К. Э. Циолковского,
кафедра высшей математики,
ул. Оршанская, 3, Москва 121552
vgorvich@yandex.ru