

УДК 514.113.5

МНОЖЕСТВО ИЗГИБАЕМЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ МНОГОГРАННИКОВ ДАННОГО КОМБИНАТОРНОГО СТРОЕНИЯ НЕ ВСЕГДА ЯВЛЯЕТСЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ

В. А. Александров

Аннотация. Приведен пример замкнутого неизгибаемого невырожденного многогранника P в трехмерном евклидовом пространстве, который является пределом последовательности неизометричных ему изгибаемых невырожденных многогранников, имеющих одинаковое с P комбинаторное строение. Отсюда выводится, что множество всех изгибаемых невырожденных многогранников, имеющих одинаковое с P комбинаторное строение, не является алгебраическим.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.401

Ключевые слова: изгибаемый многогранник, двугранный угол, октаэдр Брикара, алгебраическое множество.

1. Формулировка основных результатов. *Многогранником* мы называем непрерывное в целом и аффинное на каждом симплексе отображение двумерного симплицциального комплекса в трехмерное евклидово пространство, а также образ этого комплекса под действием такого отображения. Мы называем многогранник *вложенным*, если это отображение инъективно.

Вершиной, *ребром* или *гранью* многогранника мы называем образ k -мерной грани симплицциального комплекса при k , равном 0, 1 или 2 соответственно. Многогранник будем называть *невырожденным*, если всякая его грань является невырожденным треугольником (т. е. если вершины одной грани не лежат на одной прямой).

Говорят, что два невырожденных многогранника имеют *одинаковое комбинаторное строение*, если они являются отображениями одного и того же симплицциального комплекса или, что то же самое, если между их вершинами, ребрами и гранями можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее инцидентность.

Многогранник называется *изгибаемым*, если его пространственную форму можно изменить непрерывным образом только за счет изменения двугранных углов при ребрах (т. е. таким образом, что размеры всех его граней остаются неизменными в процессе деформации). В противном случае многогранник называется *неизгибаемым*.

Напомним, что в трехмерном евклидовом пространстве существуют вложенные изгибаемые многогранники, гомеоморфные сфере, и что в процессе изгибания любого ориентированного многогранника (не имеющего границы) сохраняются его ориентированный объем и интегральная средняя кривизна.

С этими и другими свойствами изгибаемых многогранников можно познакомиться, например, по обзорным статьям [1–3] и указанной там литературе. Из недавних работ по теории изгибаемых многогранников выделим [4].

Одним из основных результатов данной заметки является

Теорема 1. *В трехмерном евклидовом пространстве существует невырожденный многогранник P , обладающий следующими свойствами:*

- (1) P является образом симплициального комплекса, гомеоморфного двумерной сфере;
- (2) P неизгибаем;
- (3) существует последовательность невырожденных многогранников P_n , обладающих следующими свойствами:
 - (3а) для каждого n многогранник P_n имеет то же комбинаторное строение, что и многогранник P ;
 - (3б) для каждого n многогранник P_n изгибаем;
 - (3в) при $n \rightarrow \infty$ многогранники P_n сходятся к многограннику P .

Отметим, что вопрос о том, будет ли изгибаемым предел изгибаемых выпуклых многогранников, гомеоморфных диску, изучался, например, Л. А. Шором [5] и А. Д. Александровым [6]. Они доказали, что предельный многогранник может быть как изгибаемым, так и неизгибаемым. Для невыпуклых многогранников без края, насколько нам известно, вопрос о том, будет ли изгибаемым многогранник, являющийся пределом изгибаемых, ранее никем не исследовался.

Чтобы сформулировать еще один основной результат настоящей статьи, условимся об обозначениях.

Пусть Q — какой-нибудь невырожденный многогранник в \mathbb{R}^3 . Совокупность всех невырожденных многогранников, имеющих одинаковое с Q комбинаторное строение, обозначим через $\llbracket Q \rrbracket$. Поскольку все многогранники из $\llbracket Q \rrbracket$ являются кусочно-аффинными отображениями одного и того же симплициального комплекса K , один раз фиксировав нумерацию вершин K , тем самым получим «каноническую» нумерацию всех вершин любого многогранника из $\llbracket Q \rrbracket$. Обозначим число вершин комплекса K через v . Взяв произвольный многогранник из $\llbracket Q \rrbracket$, запишем по порядку все координаты всех его вершин. Получим точку в пространстве \mathbb{R}^{3v} и тем самым определим отображение $\varphi : \llbracket Q \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}^{3v}$. Поскольку $\llbracket Q \rrbracket$ состоит из невырожденных многогранников, его образ $\varphi(\llbracket Q \rrbracket)$ является открытым подмножеством в \mathbb{R}^{3v} . Символом $F_{\llbracket Q \rrbracket}$ обозначим совокупность всех изгибаемых многогранников из $\llbracket Q \rrbracket$.

Теорема 2. *Пусть P — многогранник, существование которого гарантирует теорема 1, и v — число вершин многогранника P . В \mathbb{R}^{3v} не существует алгебраического множества A такого, что $\varphi(F_{\llbracket P \rrbracket}) = A \cap \varphi(\llbracket P \rrbracket)$.*

Несколько утрируя ситуацию, теорему 2 можно высказать так: совокупность $F_{\llbracket Q \rrbracket}$ всех изгибаемых невырожденных многогранников данного комбинаторного строения не всегда является алгебраическим множеством. Тем самым множество $F_{\llbracket Q \rrbracket}$ всех изгибаемых невырожденных многогранников кардинально отличается от множества $N_{\llbracket Q \rrbracket}$ всех нежестких (т. е. допускающих нетривиальные бесконечно малые изгибания) многогранников данного комбинаторного строения. Как показано в [7, 8], в \mathbb{R}^{3v} существует алгебраическое множество A

такое, что для любого невырожденного многогранника Q имеет место равенство $\varphi(N_{\llbracket Q \rrbracket}) = A \cap \varphi(\llbracket Q \rrbracket)$.

План дальнейшей части данной статьи таков. В пп. 2–4 мы строим некоторые вспомогательные многогранники и изучаем их свойства, необходимые для доказательства теоремы 1. Доказательства теорем 1 и 2 приведены в пп. 5 и 6 соответственно.

2. Октаэдр Брикара $B(r)$. Начнем с построения некоторого вспомогательного изгибаемого октаэдра B . В литературе его называют *изгибаемым октаэдром Брикара типа 2* (см., например, [9–12; 13, с. 239–240] или [14] и указанную там литературу).

На плоскости рассмотрим два отрезка ab и bc , не лежащие на одной прямой (рис. 1). Пусть точка d симметрична точке b относительно прямой, перпендикулярной отрезку ac и проходящей через его середину. Будем считать, что четыре отрезка ab , bc , cd и da соединены между собой шарнирами в вершинах a , b , c и d , и будем непрерывным образом деформировать этот четырехугольный шарнирный механизм за счет изменения углов между образующими его четырьмя отрезками таким образом, чтобы длины этих отрезков оставались неизменными, а сами точки a , b , c и d всегда лежали в одной плоскости.

Рис. 1. Четырехугольный шарнирный механизм.

Сделанных выше предположений достаточно, чтобы провести построение октаэдра Брикара типа 2. Но для доказательства теоремы 1 нам будет удобнее иметь дело не с произвольным октаэдром Брикара типа 2, а с таким, который подчинен следующим двум дополнительным условиям: в процессе деформации шарнирного механизма ни в какой момент (а) точки a , b , c и d не лежат на одной прямой, (б) отрезки ad и bc не лежат на параллельных прямых. Всюду ниже будем считать условия (а) и (б) выполненными, хотя они не потребуются нам раньше п. 5.

Очевидно, что при любой описанной выше деформации точка d будет лежать на окружности, проходящей через точки a , b и c . Обозначим центр этой окружности через O , а ее радиус — через r . (При этом условие (б) эквивалентно тому, что ни один из отрезков ab , cd не проходит через точку O .) Фиксируем одно из допустимых значений $r = r_0$. Затем фиксируем параметры $t > s \geq r_0$. На протяжении всей данной статьи символы s и t всегда

Рис. 2. Октаэдр Брикара $B(r)$. будут обозначать именно эти значения параметров.

В дальнейших построениях будем считать, что переменная r обозначает радиус окружности, проходящей через точки a , b и c , и удовлетворяет неравенствам $s - \varepsilon < r \leq s$, где ε — достаточно малое положительное число. На прямой, перпендикулярной плоскости abc и проходящей через точку O , отложим две точки $p = p(r)$ и $q = q(r)$ так, чтобы они лежали по разные стороны от плоскости abc , расстояние от p до O равнялось $\sqrt{s^2 - r^2}$, а расстояние от q до O равнялось $\sqrt{t^2 - r^2}$.

Соединим каждую из точек a , b , c и d с каждой из точек p и q отрезком

прямой, как показано на рис. 2. Получившиеся 6 точек и 12 отрезков вместе со следующими восемью невырожденными треугольниками abp , bcp , cdp , dap , abq , bcq , cdq и daq образуют многогранник $B = B(r)$, имеющий ту же комбинаторную структуру, что и правильный (выпуклый) октаэдр. При этом становится понятным геометрический смысл фиксированных ранее параметров t и s : они являются длинами «боковых ребер» ap , bp , cp , dp и соответственно aq , bq , cq , dq октаэдра $B(r)$.

Октаэдр $B(r)$ называют *октаэдром Брикара* типа 2. Об октаэдрах Брикара типа 1 и типа 3 заинтересованный читатель может прочитать, например, в [9–12; 13, с. 239, 240; 14], но нам они не понадобятся и на их описаниях мы не останавливаемся.

Для нас важно, что октаэдр $B(r)$ изгибаем. Это следует из того, что параметр r можно изменять произвольно в пределах некоторого отрезка $s - \varepsilon < r \leq s$ на вещественной прямой и при этом длины всех ребер октаэдра $B(r)$ будут оставаться неизменными. Более того, октаэдр Брикара $B(r)$ допускает только однопараметрическое семейство изгибаний. Это означает, что всякая непрерывная деформация октаэдра $B(r)$, сохраняющая длины всех его ребер и величину r , порождается некоторым семейством изометрических преобразований всего пространства.

Никаких глубоких свойств однопараметрических многогранников нам не понадобится. Но заинтересованный читатель может познакомиться с классом однопараметрических изгибаемых многогранников по статье [15] и указанной там литературе.

Чтобы сформулировать второе существенное для нас свойство октаэдра $B(r)$, обозначим через $\alpha(r)$ величину меньшего из двугранных углов между треугольниками abq и adq и через $\beta(r)$ — величину меньшего из двугранных углов между треугольниками adq и dcq . Из рис. 2 ясно, что при $r = s$ точка p лежит в плоскости, проходящей через точки a , b , c и d , и в то же время одна из величин $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ принимает свое минимальное значение, а другая — максимальное. Для определенности будем считать, что именно $\alpha(r)$ достигает минимума при $r = s$.

3. Многогранник $C(r)$. С октаэдром $B(s)$ свяжем следующие шесть точек (рис. 3): m и n — внутренние точки ребра aq ; y — внутренняя точка грани abq ; v — внутренняя точка грани adq ; x — точка, лежащая в плоскости треугольника adq , точнее, в той открытой полуплоскости этой плоскости, которая задается прямой aq и не содержит точки d ; u — точка, лежащая в плоскости треугольника abq , точнее, в той открытой полуплоскости этой плоскости, которая задается прямой aq и не содержит точки b .

Рис. 3. Построение многогранника $C(s)$. Здесь точка p лежит в плоскости четырехугольника $abcd$.

Удалим из грани abq октаэдра $B(s)$ треугольник tnu и «заклеим» образовавшуюся треугольную дырку боковой поверхностью треугольной пирамиды $tnxy$. Треугольники tnx , txy и nxy , образующие эту боковую поверхность, показаны на рис. 3 тонкими сплошными линиями. Шестиугольную грань $abqnut$ получившегося многогранника триангулируем отрезками ay , by и qu

(на рис. 3 они не показаны, чтобы не усложнять изображение).

Из грани adq только что построенного многогранника удалим треугольник mnv и «заклеим» образовавшуюся треугольную дырку боковой поверхностью треугольной пирамиды mnv . Треугольники mni , miv и niv , образующие эту боковую поверхность, показаны на рис. 3 тонкими пунктирными линиями. Шестиугольную грань $adqnmv$ получившегося многогранника триангулируем отрезками av , dv и qv (на рис. 3 они не показаны, чтобы не усложнять изображение).

Построенный таким образом невырожденный многогранник обозначим через $C(s)$. Отметим следующие его свойства.

(а) Двугранный угол тетраэдра $mnix$ при ребре mn равен $\alpha(s)$ (во избежание недоразумений уточним, что хотя все вершины этого тетраэдра являются вершинами многогранника $C(s)$, но ребро ix тетраэдра $mnix$ не является ребром многогранника $C(s)$).

(б) Многогранник $C(s)$ изгибаем. В самом деле, его вершины a, b, c, d, p и q можно двигать в пространстве в соответствии с движениями тех же самых вершин многогранника $B(s)$ при непрерывных изометрических деформациях последнего. При этом тетраэдры $mniv$ и $mnix$ будут оставаться конгруэнтными сами себе и будут жестко следовать за движениями граней adq и abq многогранника $B(r)$, а параметр r будет изменяться в некотором интервале $I = (s - \varepsilon, s]$ на вещественной прямой ($\varepsilon > 0$). Многогранник из соответствующего непрерывного семейства многогранников, соответствующий параметру $r \in I$, обозначим через $C(r)$.

(в) Если $r \in I$, то двугранный угол $\gamma(r)$ тетраэдра $mnix$ при ребре mn строго больше, чем $\alpha(s)$: $\gamma(r) > \alpha(s)$. В самом деле, $\gamma(r) = \alpha(r) > \min_{r \in I} \alpha(r) = \alpha(s)$.

4. Многогранник P . Продолжим построения п. 3. Обозначим через w середину отрезка mn . Подвергнем октаэдр $B(s)$ гомотетии h_k с центром w , причём коэффициент гомотетии $k > 0$ подберем настолько малым, чтобы образ $h_k(aq)$ отрезка aq целиком содержался в отрезке mn : $h_k(aq) \subset mn$. Далее, пусть T обозначает поворот всего пространства вокруг отрезка mn на угол π . Образ октаэдра $B(s)$ под действием отображения $T \circ h_k$ обозначим через $B'(s)$, а образ любой вершины z октаэдра $B(s)$ под действием этого отображения — через z' .

Уменьшая, если нужно, коэффициент гомотетии k , будем считать, что точка d' лежит внутри грани $mnix$, а точка b' — внутри грани mni (см. рис. 3).

Наконец, удалим из объединения многогранников $C(s)$ и $B'(s)$ треугольники $a'b'q'$ и $a'd'q'$. (Напомним, что для нас «многогранник» означает «многогранная поверхность», а не «трехмерное тело».) Полученный многогранник обозначим через P .

В п. 5 докажем, что P можно взять в качестве того многогранника, существование которого утверждается в теореме 1.

Изучим возможные непрерывные изометрические деформации многогранника P . При этом нам придется следить за деформациями некоторых совокупностей вершин многогранника P (например, $\{a, b, c\}$), сравнивая их с деформациями совокупностей соответствующих вершин октаэдра $B(r)$ в том виде, как он был построен в п. 2 (т. е. когда он не имел ничего общего с многогранником P). Чтобы различать эти ситуации, будем писать, например, $\{a, b, c\}_P$ и

$\{a, b, c\}_{B(r)}$ соответственно.

Лемма. Пусть многогранник P подвергается произвольной непрерывной изометрической деформации, при которой любая его вершина достаточно мало удаляется от своего исходного положения. Пусть Q является результатом такой деформации, причем его вершины обозначены теми же буквами, что и вершины исходного многогранника P , использованными выше в ходе построения P (см., например, рис. 3). Тогда найдется число $r \in I$ такое, что множество $\{a, b, c, d, p, q\}_Q$ вершин многогранника Q конгруэнтно множеству $\{a, b, c, d, p, q\}_{B(r)}$ тех же самых вершин октаэдра $B(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подберем $r \in I$ таким образом, чтобы евклидово расстояние между точками a и c многогранника Q (см. рис. 3) было равно евклидову расстоянию между точками a и c многогранника $B(r)$. Тогда тетраэдр $\{a, b, c, p\}_Q$ конгруэнтен тетраэдру $\{a, b, c, p\}_{B(r)}$, поскольку у этих тетраэдров соответствующие ребра равны. Аналогично тетраэдр $\{a, b, c, q\}_Q$ конгруэнтен тетраэдру $\{a, b, c, q\}_{B(r)}$.

Заметим, что тетраэдры $\{a, b, c, p\}_Q$ и $\{a, b, c, q\}_Q$ прилегают друг к другу по невырожденному (т. е. не лежащему на одной прямой) треугольнику abc (см. условие (а) из п. 2), причем лежат по разные стороны от плоскости треугольника abc . Последнее следует из того, что при построении точек p и q в п. 2 мы потребовали, чтобы они лежали по разные стороны от плоскости abc . Аналогично тетраэдры $\{a, b, c, p\}_{B(r)}$ и $\{a, b, c, q\}_{B(r)}$ прилегают к треугольнику abc , причем лежат по разные стороны от плоскости abc . Следовательно, множества $\{a, b, c, p, q\}_Q$ и $\{a, b, c, p, q\}_{B(r)}$ конгруэнтны:

$$\{a, b, c, p, q\}_Q \cong \{a, b, c, p, q\}_{B(r)}. \quad (1)$$

Очевидно, приведенное выше рассуждение останется в силе, если в нем заменить точки a, b, c точками a, b, d . Следовательно,

$$\{a, b, d, p, q\}_Q \cong \{a, b, d, p, q\}_{B(r)}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) немедленно следует

$$\{a, b, c, d, p, q\}_Q \cong \{a, b, c, d, p, q\}_{B(r)}, \quad (3)$$

если четыре точки a, b, p, q образуют невырожденный симплекс. Последнее условие заведомо выполнено, ведь отрезок ab не проходит через центр описанной окружности четырехугольника $abcd$ (см. условие (б) из п. 2).

Тем самым формула (3), а вместе с нею и лемма доказаны.

Неформально смысл леммы можно пояснить следующим образом с использованием рис. 3. При построении многогранника P мы удалили отрезок mn из ребра aq , так что в принципе в процессе деформации многогранника P отрезки am и nq не обязаны лежать на одной прямой. Кроме того, при построении многогранника P мы триангулировали грани $atunqb$ и $atvnpqd$, так что в принципе в процессе деформации многогранника P треугольники, образующие триангуляцию грани $atunqb$ (равно как и грани $atvnpqd$), не обязаны лежать в одной плоскости. Лемма как раз показывает, что этого не происходит, т. е. что при любой изометрической деформации многогранника P отрезки am и nq лежат на прямой aq , все треугольники, образующие триангуляцию грани $atunqb$, лежат в плоскости abq и все треугольники, образующие триангуляцию грани $atvnpqd$, лежат в плоскости adq .

5. Доказательство теоремы 1. По построению P является образом симплициального комплекса, гомеоморфного двумерной сфере. Значит, свойство (1) выполнено.

Тот факт, что многогранник P не допускает нетривиальных изгибаний, почти очевиден. Ведь мы построили P , приклеив «снаружи» к двугранному углу изгибаемого многогранника $C(s)$ двугранный угол октаэдра $B'(s)$. Более того, известно, что каждый из этих двугранных углов может только увеличиться в процессе изометрической деформации. Но, с другой стороны, сумма этих двугранных углов равна 2π , а значит, каждый из них остается неизменным в процессе деформации. Отсюда следует, что любая изометрическая деформация многогранника P тривиальна.

Поясним сказанное более подробно.

Предположим, что многогранник P подвергается некоторой изометрической деформации, и убедимся, что она с необходимостью тривиальна.

Рассмотрим все четыре двугранных угла, сходящихся в ребре $a'q'$ многогранника $B'(s)$ (здесь было бы правильнее говорить не о самом октаэдре $B'(s)$, а только о тех его вершинах, ребрах и гранях, которые стали элементами многогранника P в ходе описанного выше построения P). Для наглядности на рис. 4 изображено сечение малой окрестности точки w плоскостью, проходящей через w и перпендикулярной отрезку $a'q'$, где (i) — сечение

Рис. 4.

двугранного угла тетраэдра $tnxy$ при ребре tn , (ii) — сечение двугранного угла октаэдра $B'(s) \subset P$ при ребре $a'q'$, (iii) — сечение двугранного угла тетраэдра $tnuv$ при ребре tn , (iv) — сечение двугранного угла многогранника $B(s) \subset P$ при ребре aq .

Два из этих двугранных углов, обозначенных на рис. 4 символами (i) и (iii), являются двугранными углами тетраэдров $tnxy$ и $tnuv$ при ребре tn . При любой изометрической деформации многогранника P величины этих двугранных углов остаются неизменными.

Еще один из рассматриваемых двугранных углов, обозначенный на рис. 4 символом (ii), является двугранным углом октаэдра $B'(s)$ при ребре $a'q'$ и равен $\alpha(s)$. В силу выбора значения s этот угол может только увеличиться при любой изометрической деформации октаэдра $B'(s)$ (а значит, и при любой изометрической деформации многогранника P).

Наконец, четвертый из рассматриваемых двугранных углов, обозначенный на рис. 4 символом (iv), является двугранным углом октаэдра $B(s)$ при ребре aq и тоже равен $\alpha(s)$. В силу леммы из п. 4 при любой изометрической деформации многогранника P этот двугранный угол будет равен двугранному углу $\alpha(r)$ октаэдра $B(r)$ при некотором специальном выборе параметра r . Значит, угол (iv) тоже может только увеличиться в процессе изометрической деформации многогранника P .

Но сумма всех четырех углов (i)–(iv) постоянна в процессе изометрической деформации многогранника P и равна 2π . Значит, каждый из этих углов постоянен, и деформация тривиальна. Следовательно, свойство (2) из формулировки теоремы 1 выполнено.

Теперь построим многогранник P_n , о котором идет речь в свойстве (3) те-

ремы 1. Построим его модификацией многогранника P . (На всякий случай напомним, что при построении многогранника P в п. 4 мы считали, что $r = s$.) Точнее говоря, оставим без изменения все вершины P , кроме одной вершины p , все ребра P , кроме четырех ребер ap , bp , cp и dp , и все грани P , кроме четырех граней abp , bcp , cdp и adp . Заменяем вершину p многогранника P новой вершиной p_n так, чтобы длины каждого из четырех новых ребер ap_n , bp_n , cp_n и dp_n были равны $s + 1/n$. Получившийся многогранник обозначим через P_n .

Очевидно, P_n и P имеют одинаковое комбинаторное строение, причем $P_n \rightarrow P$ при $n \rightarrow \infty$. Более того, для каждого n многогранник P_n изгибаем, поскольку точки a, b, c, d, p_n не лежат в одной плоскости и угол (iv) , изображенный на рис. 4, может быть уменьшен. Тем самым выполнено свойство (3) и теорема 1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2. Будем рассуждать от противного. Допустим, что существует алгебраическое множество $A \subset \mathbb{R}^{3v}$ такое, что $\varphi(F_{\llbracket P \rrbracket}) = A \cap \varphi(\llbracket P \rrbracket)$.

Поскольку A замкнуто в \mathbb{R}^{3v} , множество $\varphi(F_{\llbracket P \rrbracket})$ относительно замкнуто в $\varphi(\llbracket P \rrbracket)$.

С другой стороны, если P_n — многогранники из формулировки теоремы 1, то $\varphi(P_n) \in \varphi(F_{\llbracket P \rrbracket})$ для любого n , $\varphi(P_n) \rightarrow \varphi(P)$ при $n \rightarrow \infty$ и $\varphi(P) \in \varphi(\llbracket P \rrbracket)$, но $\varphi(P) \notin \varphi(F_{\llbracket P \rrbracket})$. Значит, множество $\varphi(F_{\llbracket P \rrbracket})$ не является относительно замкнутым в $\varphi(\llbracket P \rrbracket)$.

Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Автор благодарен рецензенту за замечания по улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Connelly R. Conjectures and open questions in rigidity // Proc. Intern. Congr. mathematicians (Helsinki, 1978). Helsinki: Acad. Sci. Fennica, 1980. P. 407–414.
2. Schlenker J.-M. La conjecture des soufflets (d'après I. Sabitov) // Astérisque. 2004. (Bourbaki seminar. Volume 2002/2003. Exposes 909–923. Paris: Société Math. de France). V. 294. P. 77–95.
3. Сабитов И. Х. Алгебраические методы решения многогранников // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 3. С. 3–66.
4. Gaifullin A. A. Sabitov polynomials for volumes of polyhedra in four dimensions // Adv. Math. 2014. V. 252. P. 586–611.
5. Шор Л. А. Об изгибании выпуклых многогранников с границей // Мат. сб. 1958. Т. 45, № 4. С. 471–488.
6. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. Новосибирск: Наука, 2007. (Избранные тр.; Т. 2).
7. Позняк Э. Г. Нежесткие замкнутые многогранники // Вестн. МГУ. Сер. математика и механика. 1960. № 3. С. 14–18.
8. Глюк Г. Почти все односвязные замкнутые поверхности неизгибаемы // Исследования по метрической теории поверхностей. Новое в зарубежной науке. / Ред. А. Н. Колмогоров и С. П. Новиков. М.: Мир, 1980. Т. 18. С. 148–163.
9. Bricard R. Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé // J. Math. 1897. Т. 3. P. 113–148.
10. Lebesgue H. Octaèdres articulés de Bricard // Enseign. Math. 1967. V. 13. P. 175–185.
11. Stachel H. Zur Einzigkeit der Bricardschen Oktaeder // J. Geom. 1987. V. 28, N 1. P. 41–56.
12. Сабитов И. Х. Локальная теория изгибаний поверхностей // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 48. С. 196–207. (Итоги науки и техники).
13. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
14. Alexandrov V. The Dehn invariants of the Bricard octahedra // J. Geom. 2010. V. 99, N 1–2. P. 1–13.

-
15. Максимов И. Г. Описание комбинаторного строения алгоритмически 1-параметрических многогранников типа сферы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 892–910.

Статья поступила 25 ноября 2013 г., окончательный вариант — 15 июня 2015 г.

Александров Виктор Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, физический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`alex@math.nsc.ru`