Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 512.55

РОСТ ИДЕАЛОВ В МЕТАБЕЛЕВЫХ p–АЛГЕБРАХ ЛИ

В. М. Петроградский, И. А. Субботин

Аннотация. Пусть L — конечно порожденная ограниченная алгебра Ли над конечным полем $\mathbb{F}_q$ и $c_n(L)$ — число ограниченных идеалов $H \subset L$ таких, что $\dim_{\mathbb{F}_q} L/H = n$, $n \geq 0$. Для свободной ограниченной метабелевой алгебры Ли L конечного ранга показано, что последовательность роста идеалов имеет сверхполиномиальный рост, а именно существуют положительные константы λ_1, λ_2 такие, что $q^{\lambda_1 n^2} \leq c_n(L) \leq q^{\lambda_2 n^2}$ для достаточно больших n.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.413

Ключевые слова: ограниченная алгебра Ли, метабелева алгебра Ли, перечислительная комбинаторика, рост подгрупп, рост подалгебр, рост идеалов.

§ 1. Введение. Рост подгрупп, подалгебр и идеалов

Понятие *роста подгрупп* рассматривалось и нашло многочисленные применения в теории групп (см., например, [1]). Пусть G — конечно порожденная группа. Для натурального числа n обозначим через $a_n(G)$ число подгрупп, а через $\tilde{a}_n(G)$ — число *максимальных* подгрупп индекса n в G. Возникают последовательности *роста подгрупп* $\{a_n(G)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\tilde{a}_n(G)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть $G = G_d$ — свободная группа конечного ранга d. В [2] найдена точная рекуррентная формула для элементов последовательности $\{a_n(G_d)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и определена асимптотика этой последовательности. В [1] показано, что при $d > 1$ имеет место эквивалентность $\{a_n(G)\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{\tilde{a}_n(G)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Иными словами, «почти все» подгруппы достаточно большого конечного индекса максимальны в G_d.

Настоящая работа связана с аналогичными утверждениями относительно подалгебр и идеалов для некоторых алгебр над конечным полем, которое на протяжении статьи обозначается через $\mathbb{F}_q$ (q — число элементов поля).

Приведем известные результаты. Во-первых, пусть A — конечно порожденная ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}_q$. Определим последовательность *роста односторонних идеалов* $\{a_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $a_n(A)$ — число левых идеалов $J \subset A$ таких, что $\dim_{\mathbb{F}_q}(A/J) = n$. Также рассмотрим последовательность роста односторонних *максимальных* идеалов $\{\tilde{a}_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть A_d — свободная ассоциативная алгебра ранга d. Первым автором найдена точная рекуррентная формула для $a_n(A_d)$, вычислена асимптотика и доказано, что $a_n(A_d) \approx \tilde{a}_n(A_d)$, $n \to \infty$, если $d > 1$ [3]. Иными словами, «почти все» односторонние идеалы $J \subset A_d$, где $d > 1$, максимальны.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке гранта CNPq, FEMAT.

Во-вторых, пусть L — конечно порожденная ограниченная алгебра Ли над $\mathbb{F}_q$ и $a_m(L)$ — число ограниченных подалгебр $H \subset L$ таких, что $\dim_{\mathbb{F}_q}(L/H) = m$, $m \geq 0$. Аналогично пусть $\tilde{a}_m(L)$ — число подалгебр, которые дополнительно удовлетворяют условию максимальности. Конечность чисел $a_m(L)$ была доказана Райли и Ташич [4]. Таким образом, возникает последовательность *роста подалгебр* $\{a_m(L)\}_{m\geq 0}$. Оценки для свободных ограниченных алгебр Ли, полученные в [4], весьма велики. Первым автором найдена точная рекуррентная формула и вычислена асимптотика для последовательности $\{a_m(F_d)\}_{m\geq 0}$, где F_d — свободная ограниченная алгебра Ли конечного ранга $d \geq 2$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p [5]:

$$a_n(F_d) \approx \theta q^{(d-1)np^n+n}, \quad \theta = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{-j})^{-1}, \quad n \to \infty.$$

Кроме того доказано, что $a_n(F_d) \approx \tilde{a}_n(F_d)$, $n \to \infty$, в случае $d \geq 2$ [6]. Таким образом, можно говорить, что «почти все» ограниченные подалгебры конечной коразмерности $H \subset F_d$ максимальны.

Для конечно порожденной ограниченной алгебры Ли L над конечным полем определим последовательность *роста идеалов* $\{c_n(L)\}_{n\geq 0}$, где $c_n(L)$ — число ограниченных идеалов $H \subset L$ таких, что $\dim_{\mathbb{F}_q}(L/H) = n$. Основным результатом данной заметки является следующая теорема, которая дает оценки на *рост идеалов* в конечно порожденных свободных метабелевых ограниченных алгебрах Ли над конечным полем.

Теорема 1. *Пусть $L = F_p(\mathbf{A}^2, d, \mathbb{F}_q)$ — свободная метабелева ограниченная алгебра Ли конечного ранга $d \geq 2$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$ порядка q. Пусть $\{c_n(L)\}_{n\geq 0}$ — последовательность роста ограниченных идеалов. Тогда существуют положительные константы λ_1, λ_2 такие, что для достаточно больших n выполняются неравенства*

$$q^{\lambda_1 n^2} \leq c_n(L) \leq q^{\lambda_2 n^2}.$$

Ее очевидным следствием является

Следствие 2. *Пусть L — конечно порожденная метабелева ограниченная алгебра Ли над конечным полем $\mathbb{F}_q$ и $\{c_n(L)\}_{n\geq 0}$ — последовательность роста ограниченных идеалов. Тогда существует положительная константа λ такая, что для достаточно больших n*

$$c_n(L) \leq q^{\lambda n^2}.$$

Напомним, что $c_n(L)$ — число ограниченных идеалов $H \subset L$ таких, что $|L/H| = q^n$, $n \geq 0$. По теореме 1 относительно переменной $m = q^n$ число идеалов для свободной метабелевой ограниченной алгебры Ли L конечного ранга зажато между функциями вида $q^{\lambda n^2} = m^{\bar{\lambda}\ln m}$, значит имеем *промежуточный* рост немного быстрее полиномиального. Отметим, что для частного случая метабелевой ограниченной алгебры Ли с ниль-коммутантом имеет место немного более сильная верхняя оценка (см. теорему 8 ниже) [7].

Теорема 1 является аналогом результата статьи [8], где найдены оценки на *рост нормальных подгрупп* для конечно порожденных метабелевых групп, последний рост также промежуточный, причем асимптотика близка к асимптотике теоремы 8. Также найдены условия для полиномиальности роста нормальных подгрупп в метабелевых конечно порожденных группах [8]. Мы существенно используем результат упомянутой статьи [8] (см. теорему 9 ниже). Изучался также рост подгрупп и субнормальных подгрупп для конечно порожденных метабелевых групп [9]. Критерий полиномиальности роста числа подгрупп найден в [10]. О росте метабелевых, а также разрешимых групп см. [1, гл. 9], где приведен ряд открытых вопросов о разных типах роста подгрупп, в частности, о росте подгрупп в разрешимых группах.

Представляет интерес дальнейшее изучение роста подалгебр и идеалов конечной коразмерности для конечно порожденных метабелевых, а также разрешимых ограниченных алгебр Ли над конечным полем. О другом типе роста — в смысле размерности Гельфанда — Кириллова для конечно порожденных разрешимых алгебр Ли — см. [11].

Структура настоящей статьи следующая: в § 2 мы приводим технические результаты о расширениях ограниченных алгебр Ли, в § 3 вычисляем дзета-функцию и получаем оценки для конечно порожденных абелевых p-алгебр Ли, наконец, в § 4 приводим необходимые результаты и доказываем основную теорему.

§ 2. Ограниченные алгебры Ли и их расширения

В наших рассуждениях основное поле K всегда имеет конечную характеристику $p > 0$. Пусть L — алгебра Ли. Обозначаем $\operatorname{ad} x : L \to L$, где $\operatorname{ad} x(y) = [x, y]$, для $x, y \in L$.

Напомним, что алгебра Ли L называется *ограниченной* (или *p-алгеброй Ли*) [12], если она дополнительно снабжена унарной операцией $x \mapsto x^{[p]}$, $x \in L$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$ для всех $\lambda \in K$, $x \in L$;
2) $\operatorname{ad}(x^{[p]}) = (\operatorname{ad} x)^p$ для всех $x \in L$;
3) $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum\limits_{i=1}^{p-1} s_i(x, y)$, где $is_i(x, y)$ — коэффициент при t^{i-1}

в формальном многочлене $\operatorname{ad}(tx + y)^{p-1}(x) \in L[t]$, где $x, y \in L$.

Предположим, что L — ограниченная алгебра Ли. Обозначим через J идеал универсальной обертывающей алгебры $U(L)$, порожденный всеми элементами $x^{[p]} - x^p$, где $x \in L$. Фактор-алгебра $u(L) = U(L)/J$ называется *ограниченной обертывающей алгеброй для* L. Подалгебра Ли $H \subset L$ называется *ограниченной*, если она дополнительно замкнута относительно p-отображения. Пусть $H \subset L$ — подалгебра Ли в ограниченной алгебре Ли. Тогда через H_p обозначаем минимальную ограниченную алгебру Ли, содержащую H, и называем ее *p-оболочкой* для H. Если не оговорено отдельно, все подалгебры и идеалы в p-алгебрах Ли подразумеваются ограниченными. Далее p-отображение будем также обозначать через x^p. О свойствах ограниченных алгебр см. [13–15].

Пусть $\{v_i \mid i \in I\}$ — линейно упорядоченный базис L. Тогда по аналогу теоремы Пуанкаре — Биргкофа — Витта ограниченная обертывающая алгебра имеет следующий канонический базис [12]:

$$u(L) = \big\langle v_{i_1}^{\alpha_1} \dots v_{i_m}^{\alpha_m} \mid i_1 < \dots < i_m,\ 0 \le \alpha_i < p,\ m \ge 0 \big\rangle_K.$$

Пусть L — абелева ограниченная алгебра Ли над полем K. В этом случае p-отображение задается условием

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^{[p]} = \lambda_1^p x_1^{[p]} + \lambda_2^p x_2^{[p]}, \quad x_1, x_2 \in L,\ \lambda_1, \lambda_2 \in K.$$

Ограниченная алгебра Ли H называется *циклической*, если она порождена одним элементом $e \in L$ как p-алгебра, т. е. $H = \langle e \rangle_p$. Из этого следует, что

H абелева, и имеем две возможности. Назовем элемент e *алгебраическим*, если существует натуральное n такое, что

$$e^{p^n} = \alpha_{n-1} e^{p^{n-1}} + \dots + \alpha_1 e^p + \alpha_0 e, \quad \alpha_i \in K.$$

В этом случае алгебра H конечномерна. Иначе если множество элементов $\{e^{p^n} \mid n \geq 0\}$ линейно независимо, то элемент e называется *трансцендентным* и H имеет бесконечную размерность. Если $e^{p^n} = 0$ для некоторого натурального n, то e называется *нильпотентным*.

Пусть A — конечномерная абелева p-алгебра. Определим подалгебры

$$\mathscr{P}(A) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \langle x^{p^m} \mid x \in A \rangle_K, \quad \mathscr{N}(A) = \langle x \in A \mid \exists m \geq 1 \ x^{p^m} = 0 \rangle_K.$$

Если поле K совершенно, то имеет место разложение [15]

$$A = \mathscr{P}(A) \oplus \mathscr{N}(A).$$

Для того чтобы описать структуру конечно порожденной абелевой p-алгебры, нужны некоторые дополнительные факты. Введем умножение на векторном пространстве $\Omega = \langle t^i \mid i = 0, 1, 2, \dots \rangle_K$ следующим образом:

$$(\alpha t^i)(\beta t^j) = \alpha \beta^{p^i} t^{i+j}, \quad \alpha, \beta \in K, \ i, j \geq 0.$$

Предположим, что K — совершенное поле, тогда отображение $\tau : \lambda \to \lambda^p$, $\lambda \in K$, есть автоморфизм, и мы имеем косое полиномиальное кольцо $\Omega = K[t, \tau]$. Хорошо известно, что Ω — некоммутативная область главных идеалов [16]. Известно также, что ограниченные подалгебры в A взаимно однозначно соответствуют подмодулями в левом модуле ${}_\Omega A$, где действие Ω определено так: $(\alpha t^j) \circ x = \alpha x^{[p^j]}$ для всех $x \in A$, $j \geq 0$, $\alpha \in K$ [12].

Пусть A — конечно порожденная абелева p-алгебра. Воспользуемся теоремой о структуре конечно порожденного модуля над некоммутативной областью главных идеалов [16]. Из этой теоремы следует, что любой конечно порожденный Ω-модуль есть прямая сумма циклических подмодулей. Поэтому получаем разложение

$$A = \langle z_1 \rangle_p \oplus \dots \oplus \langle z_d \rangle_p \oplus \langle z_{d+1} \rangle_p \oplus \dots \oplus \langle z_{d+n} \rangle_p,$$

где $z_1, \dots, z_d$ — трансцендентные, а $z_{d+1}, \dots, z_{d+n}$ — алгебраические элементы. Заметим, что подалгебра

$$\mathscr{A}(A) = \langle z_{d+1} \rangle_p \oplus \dots \oplus \langle z_{d+n} \rangle_p$$

конечномерна и однозначно определена. Она совпадает с множеством всех алгебраических элементов p-алгебры A. Минимальное число порождающих алгебры A называется *рангом*, он равен числу циклических компонент в разложении.

Пусть $Z = \langle z_1, \dots, z_d \rangle_p$ — абелева p-алгебра такая, что множество элементов $\{z_i^{p^n} \mid 1 \leq i \leq d, \ n \geq 0\}$ линейно независимо. Тогда Z — *свободная абелева* ограниченная алгебра ранга d, будем обозначать ее через $Z = \mathbf{A}_d$. Получаем следующее утверждение.

Теорема 3 [15]. *Пусть L — конечно порожденная абелева p-алгебра над совершенным полем. Тогда существует разложение $L = \mathbf{A}_d \oplus \mathscr{A}(L)$.*

Нам понадобятся следующие технические утверждения о расширениях ограниченных алгебр Ли.

Лемма 4. *Пусть* $0 \to Z \to L \xrightarrow{\phi} M \to 0$ — *точная последовательность ограниченных алгебр Ли. Предположим, что имеем идеал* $B \lhd Z$ *и подалгебру* $A \subset M$. *Тогда*

1) *существует подалгебра* $H \subset L$ *такая, что* $H \cap Z = B$ *и* $\phi(H) = A$ *тогда и только тогда, когда*

(a) B — *идеал в* $\phi^{-1}(A)$,

(b) *точная последовательность* $0 \to Z/B \to \phi^{-1}(A)/B \to A \to 0$ *расщепляется;*

2) *число таких подалгебр* H *равно числу различных расщеплений;*

3) *в случае полупрямого произведения* $L = M \leftthreetimes Z$ *условие* 1(b) *выполняется.*

Доказательство. Обозначим $\widetilde{H} = \phi^{-1}(A)$. Пусть существует искомая подалгебра $H \subset L$. Тогда $\widetilde{H} = H + Z$ и

$$\widetilde{H}/Z = (H + Z)/Z \cong H/(H \cap Z) = H/B \cong A. \tag{1}$$

Согласно (1) получаем

$$0 \to Z \to \widetilde{H} \to A \to 0.$$

По условию $Z \lhd L$, так что $B = Z \cap H \lhd H$. По предположению $B \lhd Z$. Значит, $B \lhd H + Z = \widetilde{H}$. Факторизуем по B предыдущую точную последовательность

$$0 \to Z/B \to \widetilde{H}/B \xrightarrow{\rho} A \to 0. \tag{2}$$

В силу (1)

$$\widetilde{H}/B = (Z + H)/B \supset H/B \cong A.$$

Значит, последовательность (2) расщепляется, поскольку $(Z/B) \cap (H/B) = (Z \cap H)/B = 0$. Таким образом, получаем расщепление $\widetilde{H}/B = Z/B \rightthreetimes \widetilde{A}$, где $\widetilde{A} = H/B \cong A$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что $B \lhd \widetilde{H}$ и последовательность (2) расщепляется, т. е. имеет место полупрямая сумма $\widetilde{H}/B = Z/B \rightthreetimes \widetilde{A}$, где $\widetilde{A} \cong A$. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\psi : \widetilde{H} \to \widetilde{H}/B$ и обозначим $H = \psi^{-1}(\widetilde{A})$. Имеем $\psi(H \cap Z) \subset \psi(H) \cap \psi(Z) = \widetilde{A} \cap (Z/B) = 0$, значит, $H \cap Z \subset B$. Обратное включение тривиально, и получаем $H \cap Z = B$. Рассмотрим эпиморфизм (2) $\rho : \widetilde{H}/B \to A$, тогда $\rho\psi = \phi|_{\widetilde{H}}$ и получаем $\phi(H) = \rho\psi(H) = \rho(\widetilde{A}) = (\widetilde{A} + Z/B)/(Z/B) = (\widetilde{H}/B)/(Z/B) \cong \widetilde{H}/Z \cong A$. Искомая подалгебра $H \subset L$ найдена.

Заметим, что различные расщепления $A \cong \widetilde{A} \subset \widetilde{H}/B$ дают различные подалгебры $H = \psi^{-1}(\widetilde{A})$, таким образом, утверждение 2 доказано.

Докажем утверждение 3. Предположим что $L = Z \rightthreetimes M$, тогда $\phi^{-1}(A) = Z \rightthreetimes A$ и получаем требуемое расщепление $\phi^{-1}(A)/B \cong Z/B \rightthreetimes A$. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть* $0 \to V \to W \to A \to 0$ — *точная последовательность ограниченных алгебр Ли, которая расщепляется инъекцией* $\psi : A \hookrightarrow W$. *Тогда любое другое расщепление* $\psi_1 : A \hookrightarrow W$ *имеет вид* $\psi_1 = \psi + \sigma$, *где линейное отображение* $\sigma : A \to V$ *удовлетворяет условиям*

1. (a) $\sigma([a,b]) = [\psi(a), \sigma(b)] - [\psi(b), \sigma(a)] + [\sigma(a), \sigma(b)]$ *для всех* $a, b \in A$;

(b) $\sigma(a^{[p]}) = \sigma(a)^{[p]} + \sum\limits_{i=1}^{p-1} s_i(\psi(a), \sigma(a))$ *для всех* $a \in A$.

2. *Обозначим множество всех таких отображений* $\sigma : A \to V$ *через* $D(A, V)$.

Предположим, что $A \cong \mathbf{A}_d$ *и* $|V| < \infty$, *тогда для числа рассматриваемых расщеплений* ψ *имеет место оценка*

$$|D(A, V)| \leq |V|^d.$$

3. *Предположим дополнительно, что* W *абелева. Тогда множество всех расщеплений совпадает с множеством гомоморфизмов абелевых* p*-алгебр* $D(A, V) = \mathrm{Hom}(A, V)$ *и предыдущая оценка точна.*

Доказательство. Утверждение 1(b) вытекает из свойств p-отображения. Для доказательства утверждения 2 заметим, что в силу свойства 1(b) отображение σ задается однозначно своими значениями на порождающих свободной абелевой p-алгебры $\mathbf{A}_d$. При этом если W абелева, произвольные значения отображения σ на порождающих продолжаются до искомого гомоморфизма. $\square$

§ 3. Дзета-функция конечно порожденных абелевых p-алгебр

Пусть L — конечно порожденная p-алгебра Ли над полем $\mathbb{F}_q$. Обозначим через $a_n(L)$ число ограниченных подалгебр $H \subset L$ таких, что $\dim_{\mathbb{F}_q}(L/H) = n$, $n \geq 0$. Таким образом, получаем последовательность *роста подалгебр* $\{a_n(L)\}_{n \geq 0}$. По аналогии с теорией групп [17, 18] введем *дзета-функцию* для ограниченной алгебры Ли L:

$$\zeta_L(s) = \sum_{H \subset L} |L/H|^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(L) q^{-ns}.$$

Следующий результат в частном случае $L = \mathbf{A}_d$ анонсирован в [5].

Теорема 6. *Пусть* L — *конечно порожденная абелева* p*-алгебра и* $L = \mathbf{A}_d \oplus \mathscr{A}(L)$ — *ее разложение на свободную и алгебраическую части. Тогда имеет место следующая формула для дзета-функции:*

1) $\zeta_L(s) = \zeta_{\mathscr{A}(L)}(s-d)\zeta_{\mathbf{A}_d}(s)$,

2) *дзета-функция для свободной абелевой* p*-алгебры равна*

$$\zeta_{\mathbf{A}_d}(s) = \frac{1}{(1-q^{1-s})(1-q^{2-s})\dots(1-q^{d-s})},$$

3) $\zeta_L(s)$ *рациональна относительно переменной* $t = q^{-s}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $d = 1$ и $L = \mathbf{A}_1 = \langle a \rangle_p$. Имеем циклический модуль ${}_\Omega L \cong {}_\Omega\Omega$, и всякая подалгебра $H \subset L = \langle a \rangle_p$ также циклическая, а именно $H = \langle f(a) \rangle_p$ для некоторого $f(a) \in L$, так как подалгебры взаимно однозначно соответствуют левым идеалам в некоммутативной области главных левых идеалов Ω. Порождающим элементом является p-многочлен минимальной степени $f(a) = a^{p^n} + \lambda_{n-1} a^{p^{n-1}} + \dots + \lambda_1 a^p + \lambda_0 a \in H$, $\lambda_i \in \mathbb{F}_q$. Заметим что он единствен при условии что $\lambda_n = 1$. Получаем базис $L/H = \langle \bar{a}, \bar{a}^p, \dots, \bar{a}^{p^{n-1}} \rangle_{\mathbb{F}_q}$ и $|L/H| = q^n$. Число таких многочленов равно q^n. Имеем

$$\zeta_{\mathbf{A}_1}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q^n)^s} = \frac{1}{1-q^{1-s}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{3}$$

Рассмотрим следующий случай: $L = \mathbf{A}_d \oplus Z$, $d \geq 1$. Обозначим $M = L/Z$ и рассмотрим эпиморфизм $\phi : L \to M = L/Z \cong \mathbf{A}_d$. Всякая подалгебра $H \subset L$ задает две подалгебры: $B = H \cap Z \subset Z$ и $A = \phi(H) \subset M$, кроме того, $|L/H| = |Z/B| \cdot |M/A|$.

Обратно, предположим, что заданы две произвольные подалгебры $A \subset M$ и $B \subset Z$. По лемме 4 существует подалгебра $H \subset L$ такая, что $B = H \cap Z$ и $A = \phi(H)$. Так как подалгебра $A \subset M$ имеет конечную коразмерность, то также $A \cong \mathbf{A}_d$. По лемме 5 всякое изменение расщепления однозначно задано отображением $\sigma : A \to Z/B$, которое является гомоморфизмом абелевых p-алгебр. Число таких гомоморфизмов равно $|D(A, Z/B)| = |Z/B|^d$. Получаем

$$\zeta_L(s) = \sum_{B \subset Z} \sum_{A \subset M} \frac{|Z/B|^d}{(|Z/B| \cdot |M/A|)^s} = \sum_{A \subset M} \frac{1}{|M/A|^s} \sum_{B \subset Z} \frac{1}{|Z/B|^{s-d}}$$
$$= \zeta_M(s) \cdot \zeta_Z(s-d) = \zeta_{\mathbf{A}_d}(s) \cdot \zeta_Z(s-d). \quad (4)$$

Полагая $Z = \mathbf{A}_1$, используем (3), (4) и получаем по индукции формулу дзета-функции для $\mathbf{A}_d$. Взяв $Z = \mathscr{A}(L)$, приходим к первому утверждению теоремы.

Рациональность дзета-функции для конечно порожденной абелевой ограниченной алгебры Ли вытекает из полученной явной формулы и замечания, что $\zeta_{\mathscr{A}(L)}(s)$ — полином относительно $t = q^{-s}$, так как алгебраичная часть $\mathscr{A}(L)$ конечномерна. $\square$

Напомним, что $a_n(L)$ есть число подалгебр $H \subset L$ таких, что $|L/H| = q^n$. Обозначим $m = q^n$. Предположим, что $a_n(L) \approx Cq^{dn} = Cm^d$ при $n \to \infty$. Тогда называем рост подалгебр в L *полиномиальным* степени d.

Следствие 7. *Пусть $L = \mathbf{A}_d$ — свободная абелева p-алгебра ранга d над $\mathbb{F}_q$. Тогда*

(1) *рост подалгебр полиномиален степени d;*

(2) *имеет место асимптотика*

$$a_n(L) \approx \frac{q^{dn}}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})\dots(1-q^{-d+1})}, \quad n \to \infty;$$

(3) *имеют место оценки*

$$q^{dn} \le a_n(L) < \frac{q^{dn}}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})\dots(1-q^{-d+1})}, \quad n = 0, 1, 2 \dots;$$

(4) $a_n(L) < \theta q^{dn}$, $n = 0, 1, 2 \dots$, *где* $\theta = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{-j})^{-1}$.

Доказательство. Подставив в дзета-функцию $t = q^{-s}$, получаем

$$\tilde{\zeta}_L(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(L) t^n = \frac{1}{(1-qt)(1-q^2t)\dots(1-q^dt)}.$$

Рассмотрим следующий множитель и разложим его в ряд:

$$g(t) = \frac{1}{(1-qt)(1-q^2t)\dots(1-q^{d-1}t)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad |t| < q^{1-d}. \quad (5)$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(L) t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{dn} t^n\right),$$

$$a_n(L) = q^{dn}\left(c_0 + \frac{c_1}{q^d} + \frac{c_2}{q^{2d}} + \dots + \frac{c_n}{q^{nd}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (6)$$

Заметим, что функция $g(t)$ аналитична в $t_0 = q^{-d}$ и второй множитель в (6) стремится к $g(t_0)$, что доказывает утверждения 1 и 2.

Из (5) мы видим, что $c_0 = 1$, кроме того, все коэффициенты c_i, $i = 1, 2, \dots$, положительны. По-другому это можно также получить, заметив, что $c_n = a_n(\mathbf{A}_{d-1})$, $n \geq 0$. Используем это наблюдение в (6) и получаем утверждение 3. $\square$

§ 4. Основной результат: рост идеалов в метабелевых *p*-алгебрах Ли

Рост подгрупп и нормальных подгрупп широко исследован, при этом важным случаем являются разрешимые и, в частности, метабелевы группы [8, 9; 1, гл. 9].

Как видели в § 3, рост подалгебр полиномиален для конечно порожденных абелевых ограниченных алгебр Ли. В данном параграфе докажем основной результат настоящей заметки — теорему 1, которая дает оценки на рост идеалов в конечно порожденных метабелевых ограниченных алгебрах Ли над конечным полем. В данном случае рост идеалов сверхполиномиален.

Определим неассоциативный моном $\delta_l(x_1, \dots, x_{2^l})$ индукцией по l, полагая $\delta_0(x) = x$ и

$$\delta_{l+1}(x_1, \dots, x_{2^{l+1}}) = [\delta_l(x_1, \dots, x_{2^l}), \delta_l(x_{2^l+1}, \dots, x_{2^{l+1}})], \quad l \geq 0.$$

Пусть L — алгебра Ли, в которой тождественно выполняется соотношение $\delta_l(x_1, \dots, x_{2^l}) \equiv 0$, причем l минимально. Тогда алгебра L называется *разрешимой ступени l*. Класс всех алгебр Ли, разрешимых ступени не выше l, образует многообразие, обозначаемое через $\mathbf{A}^l$. Разрешимая алгебра Ли ступени 2 называется *метабелевой*.

Рассмотрим сначала $L_0 = F(\mathbf{A}^2, X)$ — свободную метабелеву алгебру Ли, порожденную линейно упорядоченным множеством $X = \{x_i \mid i \in I\}$. Хорошо известно [13], что она имеет базис, состоящий из элементов X и всевозможных правонормированных коммутаторов вида

$$L_0 = \langle x_i \mid x_i \in X \rangle_K \oplus Z_0,$$

где

$$Z_0 = \langle [x_{i_n}, \dots, [x_{i_2}, x_{i_1}] \dots] \mid x_{i_j} \in X,\ i_n \geq \dots \geq i_2 < i_1,\ n \geq 2 \rangle_K. \tag{7}$$

Тогда $Z_0 = L_0^2 = [L_0, L_0]$ является коммутантом. Из метабелевости всей алгебры вытекает также, что $L_0 \triangleright Z_0$ — абелев идеал.

Рассмотрим $L = (L_0)_p$ — p-оболочку подалгебры Ли L_0 в универсальной обертывающей алгебре $U(L_0)$ относительно обычной операции возведения в p-степень. Базис этой оболочки получается добавлением p^k-степеней, $k \geq 1$, для всех базисных элементов:

$$L = M' \oplus Z, \tag{8}$$

где

$$M' = \langle x_i^{p^k} \mid x_i \in X,\ k \geq 0 \rangle_K, \tag{9}$$

$$Z = \langle [x_{i_n}, \dots, [x_{i_2}, x_{i_1}] \dots]^{p^k} \mid x_{i_j} \in X,\ i_n \geq \dots \geq i_2 < i_1,\ n \geq 2,\ k \geq 0 \rangle_K \tag{10}$$

(M' всего лишь подпространство). Универсальные рассуждения показывают, что таким образом построенная алгебра $L = (L_0)_p$ является свободной метабелевой p-алгеброй Ли, порожденной множеством X. Будем обозначать ее через

$L = F_p(\mathbf{A}^2, X, K)$, где K — основное поле. Заметим, что Z является p-оболочкой абелевой подалгебры $Z_0 \subset L$, при этом она является свободной абелевой ограниченной алгеброй Ли, где свободным порождающим множеством служит любой базис для Z_0, например (7).

В дальнейшем будем полагать, что порождающее множество конечно: $X = \{x_1, \dots, x_d\}$, $d \geq 2$; получаем свободную метабелеву ограниченную алгебру Ли ранга d, которую будем обозначать также через $L = F_p(\mathbf{A}^2, d, K)$.

Обозначим через Z^p линейную оболочку всех p-степеней элементов из Z. Получаем ограниченную подалгебру Z^p, которая является центральной в L. Действительно, пусть $x \in L$, $z \in Z$, тогда $[z^p, x] = [z, \dots, z, x] \subset [z, L^2] \subset [Z, Z_0] = 0$. Таким образом, p-алгебра Ли $\overline{L} = L/Z^p$ удовлетворяет тождествам

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \equiv 0, \quad [x, y]^p \equiv 0.$$

Более того, $\overline{L}$ — свободная алгебра, заданная тождествами выше. Оценка на рост идеалов этой алгебры найдена ранее.

Теорема 8 [7]. *Пусть L — метабелева ограниченная алгебра Ли над $\mathbb{F}_q$, порожденная d элементами, $d \geq 2$, и такая, что $[L, L]^p = 0$. Пусть $\{c_n(L)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность роста ограниченных идеалов. Тогда существует константа α такая, что для достаточно больших n*

$$c_n(L) \leq q^{\alpha n^{(2-1/d)}}.$$

Данная теорема и наша основная теорема используют следующий результат. Пусть R — конечно порожденное коммутативное кольцо с единицей, тогда R имеет конечное число идеалов каждого конечного индекса [19, 8]. Обозначим через $a_n(R)$ число идеалов $I \subset R$ таких, что $|R/I| = n$, и через $s_n(R)$ — число идеалов индекса, не превосходящего n, т. е.

$$s_n(R) = \sum_{i=1}^{n} a_i(R), \quad n \geq 1.$$

Напомним, что идеал I коммутативного кольца R называется *простым*, если он собственный и для любых элементов a, $b \in R$ из условия $ab \in I$ следует, что $a \in I$ или $b \in I$. Другими словами, R/I — целостное кольцо. Напомним, что *размерность Крулля* коммутативного кольца R равна длине j максимальной цепочки строгих включений простых идеалов $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_j$ [19]. Обозначим размерность Крулля коммутативного кольца через $\operatorname{Dim} R$. Пусть Z — конечно порожденный R-модуль. Тогда *размерность Крулля* R-модуля Z определяется как $\operatorname{Dim} Z = \operatorname{Dim}(R/\operatorname{ann}_R Z)$, где $\operatorname{ann}_R Z$ — аннулятор модуля Z [19].

Для любого R-модуля Z и натурального числа n будем использовать следующие обозначения: $a_n(Z)$ есть число подмодулей индекса n в Z, а также $s_n(Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(Z)$ — число подмодулей индекса, не превосходящего n. (Обращаем внимание, что здесь для перечисления подмодулей используем другую нормировку: считаем число подмодулей данного индекса, а не данной коразмерности.)

Теорема 9 [8]. *Пусть R — конечно порожденное коммутативное кольцо и Z — конечно порожденный R-модуль с размерностью Крулля $\operatorname{Dim} Z = d \geq 1$. Тогда существуют положительные константы b и c такие, что*

$$n^{b(\ln n)^{1-2/d}} \leq s_n(Z) \leq n^{c(\ln n)^{1-1/d}}$$

для всех достаточно больших n.

Приступим к доказательству основного результата настоящей заметки.

Доказательство теоремы 1. Пусть алгебра $L = F_p(\mathbf{A}^2, d, \mathbb{F}_q)$ порождена множеством $X = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, $d \geq 2$. Продолжаем использовать введенные выше обозначения, в частности, имеем базис (8)–(10). Имеем гомоморфизм p-алгебр Ли

$$\varphi : L \to L/Z = M,$$

где последняя фактор-алгебра изоморфна свободной абелевой p-алгебре ранга d:

$$M = \left\langle \bar{x}_1^{p^k}, \dots, \bar{x}_d^{p^k} \mid k \geq 0 \right\rangle_K \cong \mathbf{A}_d,$$

и $\bar{x}_i = \varphi(x_i)$, $i = 1, \dots, d$, являются ее свободными порождающими.

Пространство Z_0 — естественный модуль над $L/Z = M \cong \mathbf{A}_d$, а именно $v * z = [v, z]$, $z \in Z_0$, $v \in L/Z$. Продолжая это действие, получаем, что Z_0 является естественным модулем над ограниченной обертывающей алгеброй, которая изоморфна кольцу многочленов:

$$R = u(M) \cong u(\mathbf{A}_d) \cong \mathbb{F}_q[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_d]. \tag{11}$$

Напомним представление L в виде прямой суммы векторных пространств $L = M' \oplus Z$ (8), где $M' = \left\langle x_1^{p^k}, \dots, x_d^{p^k} \mid k \geq 0 \right\rangle_K$ — подпространство (9). Пусть также $\iota : M \to M'$, $\iota\big(\bar{x}_i^{p^k}\big) = x_i^{p^k}$, $i = 1, \dots, d$, — изоморфизм векторных пространств.

Имеем конечно порожденный (вообще говоря, не свободный) R-модуль:

$${}_R Z_0 = R * \langle [x_i, x_j] \mid 1 \leq i < j \leq d \rangle_K. \tag{12}$$

(A) Докажем верхнюю оценку теоремы. Пусть $H \subset L$ — произвольная ограниченная подалгебра конечной коразмерности, $|L/H| = q^n$, $n \geq 0$. Тогда получаем две подалгебры: $Z \cap H = B \subset Z$ и $\varphi(H) = A \subset M$. Имеем $|L/H| = |Z/B| \cdot |M/A|$, поэтому также $|M/A| = q^a$, $|Z/B| = q^b$, где $a + b = n$.

Для оценки числа подалгебр $A \subset M$ таких, что $|M/A| = q^a$, используем следствие 7:

$$a_a(M) = a_a(\mathbf{A}_d) \leq \theta q^{da}, \quad a \geq 0. \tag{13}$$

Пусть подалгебры $A \subset M$, $B \subset Z$ зафиксированы, тогда по лемме 4 число соответствующих подалгебр H ограничено числом различных расщеплений точной последовательности

$$0 \to Z/B \to \varphi^{-1}(A)/B \to A \to 0.$$

Подалгебра $A \subset M$ имеет конечный индекс, значит, $A \cong \mathbf{A}_d \cong M$. По лемме 5 число различных расщеплений не превосходит числа

$$|D(A, Z/B)| \leq |Z/B|^d = q^{bd}, \quad b \geq 0. \tag{14}$$

Имеет место естественный изоморфизм M-модулей: $Z/Z^p \cong Z_0$. Обозначим $\widetilde{Z} = Z/Z^p$, рассмотрим также канонический эпиморфизм $\tau : Z \to \widetilde{Z}$. Напомним что $|Z/B| = q^b$. Рассмотрим $\widetilde{B} = \tau(B) \subset \widetilde{Z}$. Пусть $|\widetilde{Z}/\widetilde{B}| = q^k$, тогда имеем $0 \leq k \leq b$.

Условие 1(a) леммы 4 эквивалентно тому, что подалгебра B — идеал в $\phi^{-1}(A) = \iota(A) \oplus Z$. Это равносильно тому, что $B \subset Z$ является A-подмодулем в модуле ${}_A Z$.

С этого момента будем предполагать, что $H \subset L$ — идеал. Для перечисления идеалов $H \triangleleft L$ имеем $B = H \cap Z \triangleleft L$ и вышеприведенное условие заменяется более сильным: $B \subset Z$ является подмодулем в M-модуле ${}_M Z$. Переходя к факторам, получаем, что $\widetilde{B} \subset \widetilde{Z}$ является подмодулем в M-модуле ${}_M \widetilde{Z}$. Через $a_{q^k}({}_M \widetilde{Z})$ обозначим число M-подмодулей $\widetilde{B} \subset \widetilde{Z}$ таких, что $|\widetilde{Z}/\widetilde{B}| = q^k$.

Модуль над p-алгеброй Ли M — это модуль над ее ограниченной обертывающей алгеброй $R = u(M)$, изоморфной кольцу многочленов (11). Для последнего размерность Крулля равна $\operatorname{Dim} R = d$ [19]. Модуль ${}_R \widetilde{Z} \cong {}_R Z_0$ конечно порожден (12), а значит, $\operatorname{Dim}({}_R \widetilde{Z}) \le \operatorname{Dim} R = d$ [19]. Применим теорему 9 к модулю ${}_R \widetilde{Z}$ для $n = q^k$:

$$a_{q^k}({}_R \widetilde{Z}) \le s_{q^k}({}_R \widetilde{Z}) \le \rho q^{\mu k^{2-1/d}}, \quad k \ge 0, \tag{15}$$

где $\mu = c(\ln q)^{1-1/d}$ и достаточно большая константа $\rho > 0$ дополнительно введена, чтобы иметь неравенство для всех $k \ge 0$.

Имеет место естественное разложение векторных пространств $Z = Z_0 \oplus Z^p$, с учетом которого для простоты отождествим $\widetilde{Z} = Z/Z^p$ с Z_0. Подалгебра $B \subset Z$ может быть расположена косо относительно разложения выше. А именно, для подпространства $\widetilde{B} = \tau(B) \subset \widetilde{Z} = Z_0$ не можем гарантировать, что $\widetilde{B} \subset B$. Наша цель — найти M-подмодуль $\widetilde{C} \subset \widetilde{B} \subset Z_0$ конечной коразмерности такой, что $\widetilde{C} \subset B$.

Так как $\dim Z_0/\widetilde{B} = k$, выберем дополняющее подпространство

$$Z_0 = V \oplus \widetilde{B}, \quad \dim V = k. \tag{16}$$

Из (7) вытекает следующее представление пространства Z_0 в виде (не прямой) суммы:

$$Z_0 = W + [x_1, Z_0] + \dots + [x_d, Z_0], \tag{17}$$

где

$$W = \langle [x_i, x_j] \mid 1 \le i < j \le d \rangle_K, \quad \dim W = d(d-1)/2. \tag{18}$$

Подставим (16) в (17):

$$Z_0 = W + \langle [x_1, V] + \dots + [x_d, V] \mid 1 \le i < d,\ 1 \le j \le k \rangle_K + [x_1, \widetilde{B}] + \dots + [x_d, \widetilde{B}]. \tag{19}$$

Введем подпространство $\widetilde{C} = [x_1, \widetilde{B}] + \dots + [x_d, \widetilde{B}]$. Напомним, что имеем действие кольца многочленов (11), поэтому построенное подпространство $\widetilde{C}$ является M-подмодулем в модуле $\widetilde{B} \subset Z_0$. Заметим также, что $\widetilde{C} = [L, \widetilde{B}]$. Используя (19), (18), (16), получаем

$$\dim Z_0/\widetilde{C} \le d(d-1)/2 + dk.$$

Выберем дополняющий базис

$$Z_0 = \langle z_1, \dots, z_s \rangle_K \oplus \widetilde{C}, \quad s \le d(d-1)/2 + dk. \tag{20}$$

Пусть $\langle z_1, \dots, z_s \rangle_p$ и $C = (\widetilde{C})_p$ — абелевы ограниченные алгебры Ли, порожденные подпространствами $\langle z_1, \dots, z_s \rangle_K$ и $\widetilde{C}$. Тогда (20) дает разложение в прямую сумму свободных абелевых ограниченных алгебр Ли:

$$Z \cong \langle z_1, \dots, z_s \rangle_p \oplus (\widetilde{C})_p \cong \mathbf{A}_s \oplus C. \tag{21}$$

Рассмотрим произвольный элемент $y \in B$, тогда $y = y_0 + y_1$, где $y_0 \in \widetilde{B}$, $y_1 \in Z^p$. Из центральности Z^p для любого $x \in L$ имеем $[x, y] = [x, y_0] \in [L, \widetilde{B}] =$

$\widetilde{C}$. Таким образом, $[L, B] = [L, \widetilde{B}] = \widetilde{C}$, значит, $\widetilde{C} \subset B$. Так как B ограниченная, получаем, что $C = (\widetilde{C})_p \subset B$. Таким образом, всякому идеалу $B \subset Z$ однозначно соответствует подалгебра $B/C \subset Z/C \cong \mathbf{A}_s$, причем такой же коразмерности $|(Z/C)/(B/C)| = |Z/B| = q^b$. Для оценки числа таких подалгебр используем следствие 7 и оценку (20):

$$a_b(\mathbf{A}_s) \le \theta q^{bs} \le \theta q^{b(d(d-1)/2+dk)}, \quad b \ge 0. \tag{22}$$

Таким образом, идеал $B \subset Z$, $\dim Z/B = b$ однозначно задает M-подмодуль $\widetilde{B} = (B + Z^p)/Z^p \subset \widetilde{Z} \cong Z_0$, $\dim \widetilde{Z}/\widetilde{B} = k$, $0 \le k \le b$, число таких подмодулей ограничено оценкой (15). Подмодулем однозначно заданы подпространство $\widetilde{C} = [L, \widetilde{B}] = [L, B] \subset Z_0$, $\dim Z_0/\widetilde{C} \le s$, и ограниченная подалгебра $C = (\widetilde{C})_p \subset B$. При этом подалгебре $B \subset Z$ однозначно соответствует подалгебра $B/C \subset Z/C \cong \mathbf{A}_s$ такой же коразмерности $|(Z/C)/(B/C)| = |Z/B| = q^b$. Получаем верхнюю оценку

$$c_n(L) \le \sum_{a+b=n} \sum_{k=0}^{b} a_a(M) s_{q^k}({}_R\widetilde{Z}) a_b(\mathbf{A}_s) |D(A, Z/B)|, \quad n \ge 0. \tag{23}$$

Наконец, собираем все оценки (23), (13), (14), (15), (22) и получаем искомую верхнюю оценку:

$$c_n(L) \le \sum_{a+b=n} \sum_{k=0}^{b} \theta q^{ad} \rho q^{\mu k^{2-1/d}} \theta q^{b(d(d-1)/2+dk)} q^{bd}$$
$$\le \theta^2 \rho (n+1)^2 q^{nd+\mu n^{2-1/d}+nd(d-1)/2} q^{dn^2} = q^{(d+o(1))n^2}.$$

(B) Докажем нижнюю оценку теоремы. Алгебра L порождена элементами $\{x_1, \dots, x_d\}$. Рассмотрим ее фактор по идеалу, порожденному элементами $x_3, \dots, x_d$, получаем свободную метабелеву p-алгебру ранга 2. Рассмотрим фактор-алгебру полученной алгебры по идеалу, порожденному стандартными коммутаторами, содержащими 2 и более букв x_2. Обозначим полученную алгебру через L_1, и пусть x, v_1 — образы элементов x_1, x_2, обозначим $v_{n+1} = [x, v_n]$, $n \ge 1$. Анализируя базис (9), (10), видим, что полученная алгебра имеет базис как векторное пространство

$$L_1 = M_1 \oplus Z_1, \quad M_1 = \langle x^{p^s} \mid s \ge 0 \rangle_K, \quad Z_1 = \left\langle v_n^{p^s} \mid n \ge 1,\ s \ge 0 \right\rangle_K,$$

где Z_1 — абелев идеал с указанным выше действием. Пусть $m \ge 1$, и рассмотрим свободную абелеву p-алгебру $D = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_p \subset Z_1$. Для ее подалгебры $D^p = \left\langle v_1^p, \dots, v_m^p \right\rangle_p$ число подалгебр $B_0 \subset D^p$ фиксированной коразмерности $\dim D^p/B_0 = b$ ограничено снизу по следствию 7:

$$a_b(D^p) \ge q^{bm}, \quad b \ge 0. \tag{24}$$

Эти же подалгебры являются подалгебрами в D коразмерности $\dim D/B_0 = b + m$. Рассмотрим подалгебру $A = \langle x^{p^s} \mid s \ge k \rangle_K \subset M_1$, где $k = [\log_p m] + 1$, тогда $\dim M_1/A = k$ и $[x^{p^k}, v_i] = v_{i+p^k}$, $i \ge 1$. Рассмотрим подпространство

$$H = A \oplus B_0 \oplus \langle v_{m+1}, v_{m+2}, \dots \rangle_p \subset L_1.$$

По построению подалгебра $B_0 \subset D^p$ центральна, а также $[A, Z_1] \subset \langle v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, \rangle_K$, тем самым H является идеалом в L_1. Имеем коразмерность $\dim L_1/H = b + m + k$, пусть $b + m + k = n$, тогда из (24) получаем оценку

$$c_n(L_1) \ge q^{(n-m-\log_p m-1)m}, \quad n \ge m + \log_p m + 1.$$

Для произвольного $n \geq 2$ полагаем $m = [n/2]$ и получаем искомую нижнюю оценку

$$c_n(L) \geq c_n(L_1) \geq q^{n^2(1/4+o(1))}, \quad n \geq 2. \quad \square$$

Замечание. Сформулируем гипотезу, что на самом деле для роста идеалов свободной метабелевой ограниченной алгебры Ли L конечного ранга над конечным полем (см. основную теорему 1) имеет место более точная асимптотика, нижняя оценка для которой получена выше:

$$c_n(L) = q^{n^2(1/4+o(1))}, \quad n \geq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lubotzky A., Segal D.* Subgroup growth. New York, etc.: Springer-Verl., 2003.
2. *Hall M.* Subgroups of finite index in free groups // Can. J. Math. 1949. V. 1. P. 187–190.
3. *Petrogradsky V. M.* One-sided ideal growth of free associative algebras // Monatsh. Math. 2006. V. 149. P. 243–249.
4. *Riley D., Tasic V.* On the growth of subalgebras in Lie p-algebras // J. Algebra. 2001. V. 237, N 1. P. 273–286.
5. *Petrogradsky V. M.* Growth of subalgebras for restricted Lie algebras and transitive actions // Int. J. Algebra Comput. 2005. V. 15, N 5–6. P. 1151–1168.
6. *Петроградский В. М., Смирнов А. А.* Перечисление максимальных подалгебр в свободных ограниченных алгебрах Ли // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 6. С. 1381–1390.
7. *Смирнов А. А.* Асимптотика ограниченных алгебр Ли: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Ульяновск, 2009.
8. *Segal D.* On the growth of ideals and submodules // J. London Math. Soc. 1997. V. 56, N 2. P. 245–263.
9. *Segal D., Shalev A.* Groups with fractionally exponential subgroup growth // J. Pure Appl. Algebra. 1993. V. 88, N 1–3. P. 205–223.
10. *Lubotzky A., Mann A., Segal D.* Finitely generated groups of polynomial subgroup growth // Israel J. Math. 1993. V. 82, N 1–3. P. 363–371.
11. *Petrogradsky V. M.* Growth of finitely generated polynilpotent Lie algebras and groups, generalized partitions, and functions analytic in the unit circle // Int. J. Algebra Comput. 1999. V. 9, N 2. P. 179–212.
12. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1963.
13. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
14. *Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V.* Infinite-dimensional Lie superalgebras. Berlin: de Gruyter, 1992. (de Gruyter Exp. Math.; V. 7).
15. *Strade H., Farnsteiner R.* Modular Lie algebras and their representations. New York, etc.: Marcel Dekker, 1988.
16. *Джекобсон Н.* Теория колец. М.: Мир, 1951.
17. *Grunewald F. J., Segal D., Smith G. C.* Subgroups of finite index in nilpotent groups // Invent. Math. 1988. V. 93, N 1. P. 185–223.
18. *Petrogradsky V. M.* Multiple zeta functions and asymptotic structure of free abelian groups of finite rank // J. Pure Appl. Algebra. 2007. V. 208, N 3. P. 1137–1158.
19. *Атья М., Макдональд И.* Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 6 октября 2014 г.

Петроградский Виктор Михайлович
Department of Mathematics, University of Brasilia,
70910-900 Brasilia DF, Brazil
petrogradsky@rambler.ru

Субботин Иван Андреевич
Факультет математики и информационных технологий,
Ульяновский гос. университет,
ул. Льва Толстого, 42, Ульяновск 432970
shelby888@yandex.ru