Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 514.747+517.518.15

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ГРАФИКОВ НА 4–МЕРНЫХ 2–СТУПЕНЧАТЫХ СУБЛОРЕНЦЕВЫХ СТРУКТУРАХ

М. Б. Карманова

Аннотация. Изучаются поверхности-графики на четырехмерных двуступенчатых сублоренцевых структурах, выводятся их дифференциальные свойства и доказываются формулы площади для разных сублоренцевых мер.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.508

Ключевые слова: сублоренцева геометрия, поверхность-график, формула площади, мера Хаусдорфа.

Цель работы — изучение пространственноподобных поверхностей-графиков на четырехмерных сублоренцевых структурах глубины 2, исследование дифференциальных свойств отображений-графиков и вывод формулы для вычисления площади поверхностей.

Сублоренцева геометрия — новая малоизученная область в неголономной геометрии; ее можно интерпретировать как субриманово обобщение геометрии Минковского (см., например, [1]). Статья [2] является одной из первых работ, в которых исследовались подобные структуры. В [3–8] получены описание и свойства достижимых множеств на классах сублоренцевых структур, изучены геодезические [9], выведены глобальные свойства структур [10]. Некоторые свойства сублоренцевых структур установлены на группах $\mathbb{H}$-типа, в частности, рассмотрены геодезические и их связь с описанием движения релятивистской частицы в постоянном равномерном электромагнитном поле [11, 12]. Применение сублоренцевых структур к задачам физики см. в [13, 14].

Опишем объект исследования данной статьи.

Пусть X, Y, T, Z — векторные поля на $\mathbb{R}^4$, причем коммутаторы поля Z со всеми остальными нулевые, а для полей X, Y и T справедливы следующие соотношения:

$$[X,Y] = c_{XYZ}Z, \quad [X,T] = c_{XTZ}Z, \quad [Y,T] = c_{YTZ}Z, \tag{1}$$

где c_{XYZ}, c_{XTZ} и c_{YTZ} — константы.

Введем сублоренцеву норму на $\mathbb{R}^4$ с данным набором полей по аналогии с [1] следующим образом.

Определение 1. Пусть $p \in \mathbb{R}^4$ и $V(p) = xX(p) + yY(p) + tT(p) + zZ(p)$. Положим

$$\left(\mathbf{d}_\infty^{SL}(V(p))\right)^2 = \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2.$$

Работа выполнена частично при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

Тогда *сублоренцева норма* вектора $V(p)$ равна

$$\mathbf{d}_\infty^{SL}(V(p)) = \begin{cases} \sqrt{\max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2}, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 > 0, \\ 0, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 = 0, \\ i\sqrt{|\max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2|}, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 < 0. \end{cases}$$

Если $V = xX + yY + tT + zZ$, то сублоренцева норма векторного поля V с постоянными коэффициентами определяется аналогично.

Определение 2. Полученную структуру с сублоренцевой нормой обозначим символом ${}^s\mathbb{L}$.

Определение 3 (см. [1]). Если норма вектора положительна, то он называется *пространственноподобным*, если нулевая, то *светоподобным*, а если мнимая — то *времениподобным*.

Определение 4 (см. [1]). Поверхность называется *пространственноподобной*, если ее касательные векторы только пространственноподобные. Если в каждой точке поверхности среди ее касательных векторов есть времениподобные, то она называется *времениподобной*.

Пример 5. 1. Рассмотрим поля X, Y, Z. Любое интегральное подмногообразие с касательным расслоением $\operatorname{span}\{X, Y, Z\}$ является пространственноподобной поверхностью.

2. Рассмотрим поля X, $Y + \alpha T$, Z, $|\alpha| < 1$. Любое интегральное подмногообразие с касательным расслоением $\operatorname{span}\{X, Y + \alpha T, Z\}$ является пространственноподобной поверхностью. Действительно, $y^2 > \alpha^2 y^2$.

3. Рассмотрим поля X, Y, $Z + \alpha T$. Тогда любое интегральное подмногообразие с касательным расслоением $\operatorname{span}\{X, Y, Z + \alpha T\}$ является времениподобной поверхностью. Действительно, в этом случае оба неравенства $|z| > \alpha^2 z^2$ и $|z| < \alpha^2 z^2$ справедливы для подходящих значений z.

В силу результатов из [15] структурные константы из соотношения (1) определяют групповую структуру и, следовательно, групповую операцию на $\mathbb{R}^4$ с данным набором полей такую, что поля X, Y, Z, T левоинвариантны относительно нее.

Определение 6. Пусть $v = \exp(xX + yY + tT + zZ)(w)$. Положим *сублоренцево расстояние* d_∞^{SL} равным

$$d_\infty^{SL}(v, w) = \mathbf{d}_\infty^{SL}(xX + yY + tT + zZ).$$

Определение 7. *Шар* относительно d_∞^{SL} радиуса $r > 0$ с центром в точке v — это множество

$$\operatorname{Box}^{SL}(v, r) = \left\{w \in {}^s\mathbb{L} : \left(d_\infty^{SL}(w, v)\right)^2 < r^2\right\}.$$

Определение 8. Полученную структуру ($\mathbb{R}^4$ с набором полей $\{X, Y, T, Z\}$, нормой $\mathbf{d}_\infty^{SL}$, расстоянием d_∞^{SL} и групповой операцией) будем также обозначать символом ${}^s\mathbb{L}$.

Далее используются следующие отображения. Пусть $\mathbb{H}$ — интегральное многообразие подрасслоения $\operatorname{span}\{X, Y, Z\}$, проходящее через $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$. Из (1) вытекает, что это — группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1$. Рассмотрим функцию

$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, где $\Omega \subset \mathbb{H}^1$ — область в $\mathbb{H}^1$, являющуюся липшицевой относительно квазиметрики d_∞ на группе Гейзенберга $\mathbb{H} = \mathbb{H}^1$. Напомним, что для $w = \exp(xX+yY+zZ)(v)$ имеем $d_\infty(w,v) = \max\{|x|,|y|,|z|^{1/2}\}$. Известно [16, 17], что липшицевы функции hc-дифференцируемы почти всюду на области определения: для почти всех v существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_v$ такой, что

$$|\varphi(w) - \mathscr{L}_v\langle w\rangle| = o(d_\infty(v,w)),$$

где $o(1) \to 0$ при $w \to v$. Далее в статье hc-дифференциал φ в точке v обозначен символом $\widehat{D}\varphi(v)$.

Определим действие отображения-графика φ_Γ на $v \in \mathbb{H}$ как

$$v \mapsto \exp(\varphi(v)T)(v).$$

Отметим, что

$$\left|d_\infty^{SL}(\varphi(v),\varphi(w))\right| = |i|\varphi(v) - \varphi(w)|| = |\varphi(v) - \varphi(w)| \leq \mathrm{Lip}(\varphi) d_\infty(v,w).$$

Опишем «дифференциальные» свойства графика φ_Γ. Сначала напомним следующее

Определение 9 [18, 19]. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — однородная группа Ли, $E \subset \mathbb{G}$, $\psi : E \to \widetilde{\mathbb{G}}$, а функция $\tilde{\mathfrak{d}} : \psi(E) \times \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{R}_+$ является квазиметрикой на $\psi(E) \times \psi(E)$. Отображение ψ полиномиально hc-дифференцируемо в точке $x \in E$ относительно $\tilde{\mathfrak{d}}$, если существует отображение $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такое, что

1) $\tilde{\mathfrak{d}}(\psi(w), \mathscr{L}_x\langle w\rangle) = o(d_\infty(x,w))$, $E \ni w \to x$;

2) $\mathscr{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w)$, L_x — оператор с полиномиальными по $\{w_i\}_{i=1}^N$ коэффициентами, где $w = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^N w_i X_i\right)(x)$, N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Отображение $\mathscr{L}_x$ называется *полиномиальным hc-дифференциалом* отображения ψ в точке x и обозначается символом $\widehat{D}_P\psi(x)$.

Здесь θ_v — экспоненциальное отображение относительно точки v, действующее из окрестности нуля евклидова пространства в окрестность точки v однородной группы Ли:

$$(w_1,\dots,w_N) \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^N w_i X_i\right)(v).$$

Теорема 10 [18, 19]. *График φ_Γ липшицева в субримановом смысле отображения φ полиномиально hc-дифференцируем почти всюду, а именно в точках hc-дифференцируемости φ. В качестве $\mathfrak{d}$ используется квазиметрика d_∞.*

Ниже приведены основные выкладки доказательства полиномиальной hc-дифференцируемости и вывода выражения для полиномиального hc-дифференциала.

Доказательство теоремы 10. В силу результатов из [17] отображение φ, определенное на измеримых подмножествах $\mathbb{H}$, непрерывно hc-дифференцируемо всюду (см. также [16] для открытых множеств). Фиксируем точку $v \in \mathbb{H}$. Для доказательства полиномиальной hc-дифференцируемости отображения φ_Γ в этой точке запишем координаты $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(v)$, где w — точка из окрестности v. Имеем

$$v = \exp(-\varphi(v)T)(\varphi_\Gamma(v)), \quad w = \exp(v_1X + v_2Y + v_4Z)(v).$$

Тогда $w = \exp(w_1X + w_2Y + w_3T + w_4Z)(\varphi_\Gamma(v))$, где

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2, \quad w_3 = -\varphi(v),$$

$$w_4 = v_4 + F^4_{31}(-\varphi(v)v_1) + F^4_{32}(-\varphi(v)v_2) = v_4 + F^4_{13}\varphi(v)v_1 + F^4_{23}\varphi(v)v_2.$$

Здесь F^4_{jk} — структурные константы, однозначно определяемые групповой операцией [20].

Аналогично при подсчете координат $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(v)$ получаем $\varphi_\Gamma(w) = \exp(p_1X + p_2Y + p_3T + p_4Z)(\varphi_\Gamma(v))$, где

$$\begin{gathered} p_1 = w_1 = v_1, \quad p_2 = w_2 = v_2, \quad p_3 = \varphi(w) - \varphi(v), \\ p_4 = v_4 + (\varphi(w) + \varphi(v))\big(F^4_{13}v_1 + F^4_{23}v_2\big). \end{gathered} \tag{2}$$

Отметим, что $p_3 = \widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle + o(d_\infty(v, w))$, а

$$p_4 = v_4 + 2\varphi(v)\big(F^4_{13}v_1 + F^4_{23}v_2\big) + \widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle\big(F^4_{13}v_1 + F^4_{23}v_2\big) + o\big(d^2_\infty(v, w)\big).$$

Определим действие полиномиального hc-дифференциала $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)$ на элемент $w = \exp(v_1X + v_2Y + v_4Z)(v)$ как

$$(v_1, v_2, v_4) \mapsto \big(v_1, v_2, \widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle, v_4+2\varphi(v)\big(F^4_{13}v_1+F^4_{23}v_2\big)+\widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle\big(F^4_{13}v_1+F^4_{23}v_2\big)\big).$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$d_\infty(\varphi_\Gamma(w), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle w\rangle) = o(d_\infty(v, w)).$$

Из этих же вычислений следует, что

$$\big|d^{SL}_\infty(\varphi_\Gamma(w), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle w\rangle)\big| = o(d_\infty(v, w)).$$

Таким образом, отображение-график φ_Γ полиномиально hc-дифференцируемо в точках hc-дифференцируемости φ, т. е. почти всюду на $\mathbb{H}$. Теорема доказана. □

Полученный вид полиномиального hc-дифференциала неудобен, так как в выражении для четвертой координаты степени 2 есть слагаемые, сравнимые с r, а не только с r^2. Рассмотрим следующие преобразования в базисе ${}^s\mathbb{L}$.

Определение 11. Фиксируем $v \in \mathbb{H}$. Заданные в окрестности точки $\varphi_\Gamma(v)$ поля $X + 2\varphi(v)F^4_{13}Z$ вместо X и $Y + 2\varphi(v)F^4_{23}Z$ вместо Y образуют вместе с полями T и Z *адаптированное в точке $\varphi_\Gamma(v)$ касательное расслоение*. Новые поля обозначим символами $\widetilde{X}^v$ и $\widetilde{Y}^v$.

Замечание 12. Полиномиальный hc-дифференциал, переводящий точку $w = \exp(v_1X + v_2Y + v_4Z)(v)$ в $\exp(\tilde{v}_1\widetilde{X}^v + \tilde{v}_2\widetilde{Y}^v + \tilde{v}_3T + \tilde{v}_4Z)(\varphi(v))$, в новом базисе имеет вид

$$\tilde{v}_1 = v_1, \quad \tilde{v}_2 = v_2, \quad \tilde{v}_3 = \widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle, \quad \tilde{v}_4 = v_4 + \widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle\big(F^4_{13}v_1 + F^4_{23}v_2\big). \tag{3}$$

Тогда в этом базисе полиномиальный hc-дифференциал аппроксимирует отображение φ в окрестности точки v относительно $\mathfrak{d} = \tilde{d}^v_\infty$, где

$$\tilde{d}^v_\infty(p, q) = \max\{|x|, |y|, |t|, |z|^{1/2}\} \quad \text{для } q = \exp(x\widetilde{X}^v + y\widetilde{Y}^v + tT + zZ)(p).$$

Как видно из доказанного, у поверхности-графика может не быть касательных векторов ни в классическом, ни в субримановом смысле. Расширим понятие пространственноподобной поверхности для нашего случая ${}^s\mathbb{L}$.

Определение 13 (ср. [1]). Пусть $v \in {}^s\mathbb{L}$. Множество $\{\exp(xX+yY+tT+zZ)(v) : \max\{x^2,y^2,|z|\}-t^2=0\}$ называется *световым конусом* в точке v.

Определение 14. Поверхность $S \subset {}^s\mathbb{L}$ называется *пространственноподобной*, если для любой ее точки $v \in S$ существует $r_0 > 0$ такое, что пересечение $S \cap B(v,r)$ лежит строго вне светового конуса с центром в v для любого $r \le r_0$ (т. е. лежит в множестве $\{\exp(xX+yY+tT+zZ)(v) : \max\{x^2,y^2,|z|\}-t^2>0\}$). Здесь B — шар в (суб)римановой (квази)метрике.

В случае, когда векторные поля X, Y, T, Z постоянные, это определение эквивалентно понятию пространственноподобной поверхности, приведенному в [1].

Рассмотрим следующую функцию множества.

Определение 15. Пусть $S \subset {}^s\mathbb{L}$, а $\delta > 0$. Положим

$$^{SL}\mathscr{H}^4_\delta(S) = 8\inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^4 : \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}^{SL}(x_j,r_j) \supset S,\ x_j \in S,\ r_j < \delta,\ j \in \mathbb{N}\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества S, и

$$^{SL}\mathscr{H}^4(S) = \lim_{\delta\to 0} {}^{SL}\mathscr{H}^4_\delta(S).$$

Определим новую меру, согласованную со структурой адаптированных векторных полей, для множеств, лежащих в образе отображения-графика. Сначала введем понятие отображения класса C^1_H и напомним его свойства.

Определение 16 [17]. Пусть Ω — область в $\mathbb{H}$, а $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Отображение φ *принадлежит классу* C^1_H, если горизонтальные производные $X\varphi$ и $Y\varphi$ существуют всюду на Ω и непрерывны.

Известно [17], что отображения класса C^1_H непрерывно hc-дифференцируемы всюду.

Следствие 17. *Если φ принадлежит классу C^1_H, то отображение-график φ_Γ непрерывно полиномиально hc-дифференцируемо всюду.*

Определение 18. Пусть $\Omega \subset \mathbb{H}$ — открытое множество и $\varphi \in C^1_H(\Omega,\mathbb{R})$. Фиксируем $\delta_0 > 0$ и рассмотрим точку $p \in \Omega$ и ее окрестность $\mathscr{U} \subset \Omega$, на которой величина $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости не превосходит некоторого малого $\varepsilon > 0$. Пусть $S \subset \varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ и $\delta > 0$. Положим

$$\big({}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma\big)_\delta(S) = 8\inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^4 : \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(x_j,r_j) \supset S,\ x_j \in S,\ r_j < \delta,\ j \in \mathbb{N}\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества S,

$$\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(x_j,r_j) = \big\{y \in {}^s\mathbb{L} :\ \big(\tilde{d}^{SL}_\infty(x_j,y)\big)^2 < r^2\big\},$$

а

$$\tilde{d}^{SL}_\infty(v,w) = \begin{cases} \sqrt{\max\{x^2,y^2,|z|\}-t^2}, & \max\{x^2,y^2,|z|\}-t^2>0,\\ 0, & \max\{x^2,y^2,|z|\}-t^2=0,\\ i\sqrt{|\max\{x^2,y^2,|z|\}-t^2|}, & \max\{x^2,y^2,|z|\}-t^2<0 \end{cases}$$

для $w = \exp(x\widetilde{X}^v + y\widetilde{Y}^v + tT + zZ)(v)$, и $^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(S) = \lim\limits_{\delta\to 0}\big({}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma\big)_\delta(S)$.

Замечание 19. Подчеркнем, что величина $\tilde{d}_\infty^{SL}(v,w)$ считается в базисе $\{\widetilde{X}^v, \widetilde{Y}^v, T, Z\}$.

Замечание 20. Корректность определения 18 следует из результата шага 2 теоремы 26: для всякой точки существует содержащая ее окрестность $\mathscr{U} \subset \Omega$, обладающая тем свойством, что для любых точек на поверхности $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ можно найти такой радиус $r > 0$, что пересечения $\tilde{d}_\infty^{SL}$-шаров такого радиуса с центрами в этих точках и поверхности пересекаться не будут.

Определение 21. Для каждой точки $x \in \varphi_\Gamma(\Omega)$ рассмотрим окрестность $\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x)\right) \subset \Omega$, на которой для величины $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости выполнены условия определения 18. Рассмотрим такое $\delta > 0$, чтобы любой шар в $\mathbb{H}$ радиуса $r < L\delta$ полностью лежал хотя бы в одной такой окрестности, где L таково, что

$$\frac{1}{L} d_\infty(v_j, w) \le \tilde{d}_\infty^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), \varphi_\Gamma(w)) \le L d_\infty(v_j, w).$$

Локальное существование такой константы доказано на шаге 2 теоремы 26; оно следует из соотношений (6) и (7), записанных для φ_Γ с учетом равномерности величины $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости, которое не превосходит $\varepsilon > 0$. Так как без ограничения общности можно рассматривать компактные подмножества Ω, величина δ строго отделена от нуля. Определим функцию множества на $\varphi_\Gamma(\Omega)$ следующим образом:

$$\left({}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4\right)_\delta(S) = 8 \inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^4 : \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(x_j, r_j) \cap \varphi_\Gamma\big(\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)\big) \supset S,$$
$$x_j \in S,\ r_j < \delta,\ j \in \mathbb{N}\Big\},$$

где в силу выбора $\delta > 0$ окрестность $\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)$ содержит $\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(x_j, r_j)\big)$. Далее определение ${}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4$ на Ω повторяет определение 18.

Замечание 22. Мы рассматриваем систему окрестностей $\left\{\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x)\right)\right\}_{x\in\Omega}$ на Ω в определении 21, чтобы избежать многократных пересечений поверхности $\varphi_\Gamma(\Omega)$ с шарами радиуса r с центрами в ее точках.

Свойство 23. *Если $\varphi \in C_H^1(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ таково, что длина горизонтального градиента $\widehat{D}\varphi$ строго отделена от $\sqrt{2}/2 - \xi$, $\xi > 0$, т. е.*

$$|\widehat{D}\varphi(v)\langle \exp(w_1X + w_2Y + w_4Z)(v)\rangle| \le (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\},$$

$c \ge 1 - \sqrt{2}/2 + \xi$, $\xi > 0$, то функция $\Phi : A \mapsto {}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4(\varphi_\Gamma(A))$ обладает следующими свойствами:

1) *абсолютно непрерывна относительно меры $\mathscr{H}^3$ на $\mathbb{H}$;*

2) *аддитивна на отдаленных шарах.*

Доказательство. Абсолютная непрерывность следует из соотношения (18), установленного на шаге 6 теоремы 26 и из результатов шага 7.

Аддитивность на отдаленных шарах доказана на шаге 2 теоремы 26. $\square$

Определение 24 (см., например, [15]). Пусть $v, w \in \mathbb{H}$, причем $w = \exp(xX + yY + zZ)(v)$. Набор (x, y, z) называется *нормальными координатами* точки w относительно v (в базисе $\{X, Y, Z\}$).

На ${}^s\mathbb{L}$ нормальные координаты точки q относительно точки p (в базисе $\{\widetilde{X}^v, \widetilde{Y}^v, T, Z\}$), где $v \in \mathbb{H}$, определяются аналогично.

Замечание 25. Из определения hc-дифференцируемости следует, что

$$\varphi(w) = \varphi(v) + \widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle + o(\max\{|w_1|, |w_2|, |w_4|^{1/2}\}),$$

где $\widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle = w_1 X\varphi(v) + w_2 Y\varphi(v)$. При переходе в нормальные координаты относительно v имеем (см. также [17])

$$\begin{aligned}
\widehat{D}(\varphi\circ\theta_v)(0)&\big\langle w_1\big(D\theta_v^{-1}X\big) + w_2\big(D\theta_v^{-1}Y\big)\big\rangle \\
&= w_1\big(D\theta_v^{-1}X\big)(\varphi\circ\theta_v)(0) + w_2\big(D\theta_v^{-1}Y\big)(\varphi\circ\theta_v)(0) \\
&= w_1\widehat{D}(\varphi\circ\theta_v)(0)\langle\partial_1 + (A_1\widetilde{w}_1 + B_1\widetilde{w}_2)\partial_4\rangle|_{\widetilde{w}_1=\widetilde{w}_2=0} \\
&+ w_2\widehat{D}(\varphi\circ\theta_v)(0)\langle\partial_2 + (A_2\widetilde{w}_1 + B_2\widetilde{w}_2)\partial_4\rangle|_{\widetilde{w}_1=\widetilde{w}_2=0} \\
&= w_1\widehat{D}(\varphi\circ\theta_v)(0)\langle\partial_1\rangle + w_2\widehat{D}(\varphi\circ\theta_v)(0)\langle\partial_2\rangle \\
&= w_1\widehat{D}\varphi(v)\langle\widehat{D}\theta_v(0)\langle\partial_1\rangle\rangle + w_2\widehat{D}\varphi(v)\langle\widehat{D}\theta_v(0)\langle\partial_2\rangle\rangle \\
&= w_1\widehat{D}\varphi(v)\langle X(v)\rangle + w_2\widehat{D}\varphi(v)\langle Y(v)\rangle = w_1 X\varphi(v) + w_2 Y\varphi(v).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{\partial(\varphi\circ\theta_v)}{\partial v_1}(0) = X\varphi(v)$ и $\frac{\partial(\varphi\circ\theta_v)}{\partial v_2}(0) = Y\varphi(v)$.

Теорема 26. *Пусть $\mathbb{H} = \mathbb{H}^1$ — группа Гейзенберга, $\Omega \subset \mathbb{H}$ — открытое множество; $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ — отображение класса C^1_H; $|\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \le (1 - c)\max\{|w_1|, |w_2|\}$ во всех точках $v \in \Omega$; $c \ge 1 - \sqrt{2}/2 + \xi$, $\xi > 0$.*

Тогда поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ пространственноподобна в смысле определения 14 и сублоренцева ${}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma$-мера образа $\varphi_\Gamma(\Omega) \subset {}^s\mathbb{L}$ вычисляется по формуле

$$\int\limits_{\Omega} \frac{3(1-(X\varphi)^2(v))^{3/2}(1-(Y\varphi)^2(v))^{3/2}}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2(v)) - 1}\, d\mathscr{H}^4(v) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\,{}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(y). \tag{4}$$

Замечание 27. Чтобы вывести формулу площади для сублоренцевой меры, необходимо установить важные свойства поверхности-образа: ее аппроксимируемость «регулярными» поверхностями, метрические свойства и др. Приведем обзор результатов основных шагов доказательства теоремы.

Шаг 1. Доказано, что поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ пространственноподобна в смысле определения 14.

Шаг 2. Выведены (локальные) свойства аддитивности на отдаленных шарах и абсолютной непрерывности для функции множества

$$A \mapsto {}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(A)), \quad A \subset \Omega.$$

Шаг 3. Для поверхности $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$, $\mathscr{U} \subset \Omega$, выведена следующая характеристика ее аппроксимируемости образом полиномиального hc-дифференциала: при достаточно малых $r > 0$ справедливо

$$\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)\big)\big) = (1 + o(1))\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)\big\rangle\big),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по $v \in \mathscr{U} \subset \Omega$.

Шаг 4. Вычислена $\mathscr{H}^3$-мера множества $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)$:

$$\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)$$
$$= \frac{8r^4\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(v)|^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}\bigg(\frac{1}{3}+\frac{2-|\widehat{D}\varphi(v)|^2}{3(1-(X\varphi)^2(v))(1-(Y\varphi)^2(v))}\bigg).$$

Шаг 5. Вычислена ${}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4$-мера множества $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)$:

$${}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big) = (1+o(1))8r^4,$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}\subset\Omega$.

Шаг 6. Установлено следующее свойство сублоренцевой ${}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4$-меры образа $\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(v,r))$: точная нижняя грань сумм вида $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} 8r_j^4$ достигается тогда и только тогда, когда значение $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j),r_j)\big)\big)$ близко к точной нижней грани, где $\big\{\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j),r_j)\big\}_{j\in\mathbb{N}}$ покрывают множество $\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(v,r))$.

Шаг 7. Выведена производная функции множеств:

$$\Phi'(v) = \frac{3(1-(X\varphi)^2(v))^{3/2}(1-(Y\varphi)^2(v))^{3/2}}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2(v))-1},$$

с помощью которой доказана формула площади (4).

Доказательство теоремы 26. Прежде всего заметим, что $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ — липшицево в субримановом смысле отображение, кроме того, локально $\mathrm{Lip}_{SR}(\varphi) \le 1-\tilde{c}$, $\tilde{c}>0$. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{c}=c$.

Шаг 1. Для всякой точки $v\in\Omega$ покажем существование такой ее окрестности $\mathscr{U}\subset\Omega$, что поверхность $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ не будет пересекать ни одного светового конуса с вершиной на этой поверхности. Фиксируем точку $v\in\Omega$. В адаптированном (в точке $\varphi_\Gamma(v)$) базисе $\{\widetilde{X}^v,\widetilde{Y}^v,T,Z\}$ соотношения (2) для $\varphi_\Gamma(w) = \exp(p_1\widetilde{X}^v+p_2\widetilde{Y}^v+p_3T+p_4Z)(\varphi_\Gamma(v))$ имеют вид

$$\begin{gathered} p_1=w_1=v_1,\quad p_2=w_2=v_2,\quad p_3=\varphi(w)-\varphi(v),\\ p_4=v_4+(\varphi(w)-\varphi(v))\big(F_{13}^4v_1+F_{23}^4v_2\big). \end{gathered}\tag{5}$$

По предположению $\varphi(w)=\varphi(v)+\widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle+o(\max\{|v_1|,|v_2|,|v_4|^{1/2}\})$ для $w=\exp(v_1X+v_2Y+v_4Z)(v)$. Тогда

$$\begin{aligned}\max\big\{v_1^2,v_2^2\big\}-(\varphi(w)-\varphi(v))^2 &\ge \max\big\{v_1^2,v_2^2\big\}-(1-c)^2\max\big\{v_1^2,v_2^2\big\}\\ &-2\cdot o(\max\{|v_1|,|v_2|,|v_4|^{1/2}\})\max\big\{v_1^2,v_2^2\big\}-o(1)^2\cdot\max\big\{v_1^2,v_2^2,|v_4|\big\}.\end{aligned}$$

Пусть $\mathscr{U}\ni v$ — окрестность точки v такая, что величина $o(1)$ в определении hc-дифференцируемости (и, следовательно, и полиномиальной hc-дифференцируемости) не превосходит такого $\varepsilon>0$, что

$$\varepsilon < \frac{2c-c^2}{12\max\big\{1,|F_{13}^4|,|F_{23}^4|\big\}}$$

для всех $w\in\mathscr{U}$, $w=\exp(v_1X+v_2Y+v_4Z)(v)$. Отсюда

$$\begin{aligned}\max\big\{v_1^2,v_2^2\big\}-(\varphi(w)-\varphi(v))^2 &\ge (2c-c^2)\max\big\{v_1^2,v_2^2\big\}\\ &-2\varepsilon(\max\{|v_1|,|v_2|,|v_4|^{1/2}\})\max\{|v_1|,|v_2|\}-\varepsilon^2\big(\max\big\{v_1^2,v_2^2,|v_4|\big\}\big).\end{aligned}$$

Предположим без ограничения общности, что $|v_1| \geq |v_2|$. Перепишем последнее неравенство в виде

$$\max\{v_1^2, v_2^2\} - (\varphi(w) - \varphi(v))^2 \geq (2c - c^2)v_1^2 - 2\varepsilon\bigl(\max\{|v_1|, |v_4|^{1/2}\}\bigr)|v_1| - \varepsilon^2\bigl(\max\{v_1^2, |v_4|\}\bigr)\bigr).$$

Если $|v_1| \geq |v_4|^{1/2}$, то

$$\max\{v_1^2, v_2^2\} - (\varphi(w) - \varphi(v))^2 > 0$$

в силу выбора $\varepsilon > 0$. Предположим, что $|v_1| < |v_4|^{1/2}$ и

$$(2c - c^2)v_1^2 - 2\varepsilon|v_4|^{1/2}|v_1| - \varepsilon^2|v_4| \leq 0.$$

Тогда $(2c - c^2)v_1^2 - 2\varepsilon|v_4| - \varepsilon^2|v_4| \leq 0$ и $|v_4| \geq \frac{(2c-c^2)v_1^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}$, тем самым

$$\begin{aligned}|p_4| &\geq |v_4| - ((1-c)|v_1| + \varepsilon|v_4|^{1/2}) \max\{|F_{13}^4|, |F_{23}^4|\}|v_1| \\ &\geq |v_4| - (1-c)\max\{|F_{13}^4|, |F_{23}^4|\}\frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{2c - c^2}|v_4| \\ &\quad - \varepsilon\max\{|F_{13}^4|, |F_{23}^4|\}\sqrt{\frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{2c - c^2}}|v_4| \\ &\geq |v_4| - \varepsilon\max\{|F_{13}^4|, |F_{23}^4|\}\left(\frac{2 + \varepsilon}{2c - c^2} + \sqrt{\frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{2c - c^2}}\right)|v_4| > 0\end{aligned}$$

в силу выбора $\varepsilon > 0$. Следовательно, поверхность $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ не будет пересекать светового конуса с вершиной в точке v. Так как отображение φ непрерывно hc-дифференцируемо, окрестность $\mathscr{U}$ можно выбрать настолько малой, чтобы величина $o(1)$ не превосходила $\varepsilon > 0$ для всех точек из $\mathscr{U}$, поэтому поверхность $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ не будет пересекать ни одного светового конуса с вершиной на этой поверхности, значит, она пространственноподобна. Заметим, что в этом случае достаточно условия $c > 0$.

Шаг 2. Рассмотрим функцию множества

$$\Phi : A \mapsto {}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4(\varphi_\Gamma(A)).$$

Чтобы установить аддитивность Φ на удаленных шарах, нужно доказать следующее свойство: для всякой точки Ω существует такая содержащая ее окрестность $\mathscr{U} \Subset \Omega$, что если $v \in \mathscr{U}$, то множество $\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r) \cap \varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ лежит в $o(r)$-окрестности множества $\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r) \cap \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$. Отсюда будет следовать, что для любых точек на поверхности $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ можно найти такой радиус $r > 0$, что пересечения (сублоренцевых) шаров такого радиуса с центрами в этих точках и поверхности пересекаться не будут.

Фиксируем $v \in \Omega$. Для получения требуемого свойства сначала оценим размер прообраза $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\langle\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\rangle$. В частности, покажем, что d_∞-расстояние от точек этого множества до v сравнимо с r, причем оценка сравнения равномерна на $\mathscr{U}$.

Перейдем в нормальные координаты в прообразе в базисе $\{X, Y, Z\}$ относительно v и в образе в базисе $\{\widetilde{X}^v, \widetilde{Y}^v, T, Z\}$ относительно $\varphi_\Gamma(v)$ и рассмотрим точку $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ такую, что

$$\exp(w_1\widetilde{X}^v + w_2\widetilde{Y}^v + w_3T + w_4Z)(\varphi_\Gamma(v)) \in \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\Omega\rangle \cap \operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r).$$

По условию теоремы на $\widehat{D}\varphi$ справедливо соотношение $|w_3| \leq (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\}$ и из определения сублоренцева шара вытекает, что $\max\{w_1^2, w_2^2, |w_4|\} - w_3^2 \leq r^2$.

Пусть $w_1^2 \geq \max\{w_2^2, |w_4|\}$. Тогда

$$r^2 \geq w_1^2 - w_3^2 \geq w_1^2 - (1-c)^2 w_1^2 = (2c - c^2) w_1^2,$$

поэтому $\max\{w_1^2, w_2^2, |w_4|\} \leq \frac{r^2}{2c-c^2}$. Осталось оценить величину $\widetilde{w}_4 = w_4 - w_3\bigl(F_{13}^4 w_1 + F_{23}^4 w_2\bigr)$ в прообразе (см. преобразования координат при полиномиальном hc-дифференциале в (3)). Имеем

$$|\widetilde{w}_4| \leq |w_4| + (1-c)|w_1|\bigl(\bigl|F_{13}^4 w_1\bigr| + \bigl|F_{23}^4 w_2\bigr|\bigr) \leq \frac{r^2}{2c-c^2} + (1-c)Kr^2 \leq r^2 L.$$

Пусть $|w_4| \geq w_1^2 \geq w_2^2$. Из этого условия следует, что

$$r^2 \geq |w_4| - w_3^2 \geq |w_4| - (1-c)^2 w_1^2 \geq |w_4| - (1-c)^2 |w_4| = (2c - c^2)|w_4|$$

и снова $\max\bigl\{w_1^2, w_2^2, |w_4|\bigr\} \leq \frac{r^2}{2c-c^2}$. Для оценки $\widetilde{w}_4 = w_4 - w_3\bigl(F_{13}^4 w_1 + F_{23}^4 w_2\bigr)$ получаем

$$\begin{aligned}|\widetilde{w}_4| &\leq |w_4| + (1-c)|w_1|\bigl(\bigl|F_{13}^4 w_1\bigr| + \bigl|F_{23}^4 w_2\bigr|\bigr)\\ &\leq |w_4| + (1-c)|w_4|^{1/2} K |w_4|^{1/2} \leq \frac{r^2}{2c-c^2} + (1-c)Kr^2 \leq r^2 L.\end{aligned}$$

Таким образом, величина $d_\infty(v, \exp(w_1 X + w_2 Y + \widetilde{w}_4 Z)(v))$ сравнима с r, и оценка равномерна на Ω.

Пусть $\tilde{d}_\infty^{SL}\bigl(0, \bigl(w_1^0, w_2^0, \widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle, w_4^0\bigr)\bigr) = r$ для $\bigl(w_1^0, w_2^0, w_4^0\bigr)$. Для завершения шага 2 доказательства необходимо сравнить пересечения образа некоторой малой окрестности $\mathscr{U} \subset \Omega$ при отображении φ_Γ и сублоренцева шара с центром в $\varphi_\Gamma(v)$, $v \in \mathscr{U}$, с частью поверхности $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\Omega\rangle$, лежащей в этом шаре. Оценим сначала характер пересечения образа $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\Omega\rangle$ с сублоренцевым шаром. Для этого покажем, что для всякого $\sigma > 0$ будет выполняться неравенство

$$\tilde{d}_\infty^{SL}\bigl(0, \bigl((1+\sigma)w_1^0, (1+\sigma)w_2^0, \widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle(1+\sigma)w_1^0, (1+\sigma)w_2^0\bigr\rangle, (1+\sigma)w_4^0\bigr)\bigr) > r$$

и для всякого $\sigma < 0$ — неравенство

$$\tilde{d}_\infty^{SL}\bigl(0, \bigl((1+\sigma)w_1^0, (1+\sigma)w_2^0, \widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle(1+\sigma)w_1^0, (1+\sigma)w_2^0\bigr\rangle, (1+\sigma)w_4^0\bigr)\bigr) < r.$$

Рассмотрим первый случай, когда $\sigma > 0$; второй случай, $\sigma < 0$, следует из первого. По предположению на $\tilde{d}_\infty^{SL}$-расстояние до точки $\bigl(w_1^0, w_2^0, \widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle, w_4^0\bigr)$ имеем

$$\max\bigl\{\bigl(w_1^0\bigr)^2, \bigl(w_2^0\bigr)^2, \bigl|w_4^0\bigr|\bigr\} - \bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2 = r^2.$$

Перепишем условие на σ:

$$\max\bigl\{(1+\sigma)^2\bigl(w_1^0\bigr)^2, (1+\sigma)^2\bigl(w_2^0\bigr)^2, (1+\sigma)\bigl|w_4^0\bigr|\bigr\} - (1+\sigma)^2\bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2 > r^2.$$

Если $\bigl(w_1^0\bigr)^2 \geq \max\bigl\{\bigl(w_2^0\bigr)^2, \bigl|w_4^0\bigr|\bigr\}$, то

$$(1+\sigma)^2\bigl(w_1^0\bigr)^2 - (1+\sigma)^2\bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2 = (1+\sigma)^2 r^2 = r^2 + (2\sigma + \sigma^2)r^2,$$

т. е. неравенство верно при любом положительном σ. Если $\bigl|w_4^0\bigr| \geq \max\bigl\{\bigl(w_1^0\bigr)^2, \bigl(w_2^0\bigr)^2\bigr\}$ (пусть для определенности $\bigl(w_1^0\bigr)^2 \geq \bigl(w_2^0\bigr)^2$), то

$$r^2 = \bigl|w_4^0\bigr| - \bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2 \geq \bigl|w_4^0\bigr| - (1-c)^2\bigl(w_1^0\bigr)^2 \geq \bigl|w_4^0\bigr| - (1-c)^2\bigl|w_4^0\bigr| = (2c-c^2)\bigl|w_4^0\bigr|$$

и, следовательно, $\bigl|w_4^0\bigr| \leq \frac{r^2}{2c-c^2}$. В частности, если $c > 1 - \sqrt{2}/2 + \xi$, то $\bigl|w_4^0\bigr| < \frac{2}{1+2\sqrt{2}\xi-2\xi^2}r^2$. Кроме того, $\bigl(w_1^0\bigr)^2 \geq \frac{|w_4^0|-r^2}{(1-c)^2} > \frac{2}{1-2\sqrt{2}\xi+2\xi^2}\bigl(\bigl|w_4^0\bigr| - r^2\bigr)$. Найдем такое $\sigma > 0$, что

$$(1+\sigma)\bigl|w_4^0\bigr| > r^2 + (1+\sigma)^2\bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2.$$

Тогда с учетом соотношения $\bigl|w_4^0\bigr| = r^2 + \bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2$ имеем

$$(1+\sigma)\bigl|w_4^0\bigr| - (1+\sigma)^2\bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2 = r^2 + \sigma r^2 - \sigma(1+\sigma)\bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2,$$

т. е. нужно выполнение условия $\sigma r^2 - \sigma(1+\sigma)\bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2 > 0$. Если $\sigma > 0$, то $r^2 - (1+\sigma)\bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2 > 0$, что возможно, только если

$$(1+\sigma) < \frac{r^2}{\bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2} = \frac{r^2}{\bigl|w_4^0\bigr| - r^2},$$

т. е.

$$\sigma < \frac{2r^2 - \bigl|w_4^0\bigr|}{\bigl|w_4^0\bigr| - r^2}.$$

Заметим, что в силу оценок на $\bigl|w_4^0\bigr|$ и $\bigl(w_1^0\bigr)^2$ при $1+\sigma \geq \frac{r^2}{|w_4^0|-r^2} \cdot \frac{1-2\sqrt{2}\xi+2\xi^2}{1+2\sqrt{2}\xi-2\xi^2}$ получим $(1+\sigma)\bigl|w_4^0\bigr| \leq (1+\sigma)^2\bigl(w_1^0\bigr)^2$, поэтому далее на этом луче, проходящем через 0 и $\bigl(w_1^0, w_2^0, w_4^0\bigr)$, квадрат первой координаты будет больше модуля координаты с номером 4, а соответствующая разность

$$\max\bigl\{(1+\sigma)^2\bigl(w_1^0\bigr)^2, (1+\sigma)^2\bigl(w_2^0\bigr)^2, (1+\sigma)\bigl|w_4^0\bigr|\bigr\} - (1+\sigma)^2\bigl(\widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle\bigr)^2$$

будет строго больше r^2. Следовательно, так как $\frac{1-2\sqrt{2}\xi+2\xi^2}{1+2\sqrt{2}\xi-2\xi^2} < 1$, то σ может быть любым положительным числом.

Пусть $\sigma < 0$. Положим

$$r' = \tilde{d}_\infty^{SL}\bigl(0, \bigl((1+\sigma)w_1^0, (1+\sigma)w_2^0, \widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle(1+\sigma)w_1^0, (1+\sigma)w_2^0\bigr\rangle, (1+\sigma)w_4^0\bigr)\bigr)$$

и умножим каждую компоненту вектора $\bigl((1+\sigma)w_1^0, (1+\sigma)w_2^0, (1+\sigma)w_4^0\bigr)$ на $\frac{1}{1+\sigma} = 1 + \sigma'$, где $\sigma' > 0$. Из рассуждений для множителя, большего единицы, получаем

$$r = \tilde{d}_\infty^{SL}\bigl(0, \bigl(w_1^0, w_2^0, \widehat{D}\varphi(v)\bigl\langle w_1^0, w_2^0\bigr\rangle, w_4^0\bigr)\bigr) > r'.$$

Оценим координаты точки пересечения поверхности $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\Omega\rangle$ и шара $\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)$. Запишем отображение, обратное к полиномиальному hc-дифференциалу в адаптированном (в точке $\varphi_\Gamma(v)$) базисе (см. также (3)):

$$\widetilde{w}_1 = w_1, \quad \widetilde{w}_2 = w_2, \quad \widetilde{w}_4 = w_4 - \widehat{D}\varphi(v)\langle\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2\rangle\bigl(F_{13}^4\widetilde{w}_1 + F_{23}^4\widetilde{w}_2\bigr).$$

Тогда

$$|\widetilde{w}_4| \leq |w_4| + (1-c)K\max\bigl\{w_1^2, w_2^2\bigr\} \leq (1+K)\max\bigl\{w_1^2, w_2^2, |w_4|\bigr\}. \tag{6}$$

Так как

$$r^2 \geq \max\{w_1^2, w_2^2, |w_4|\} - \bigl(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1, w_2\rangle\bigr)^2$$
$$\geq \max\{w_1^2, w_2^2, |w_4|\} - (1-c)^2 \max\{w_1^2, w_2^2, |w_4|\}$$
$$= (2c - c^2)\max\{w_1^2, w_2^2, |w_4|\}, \quad (7)$$

то $\max\{w_1^2, w_2^2, |w_4|\} < 2r^2$ при $c > 1 - \sqrt{2}/2 + \xi$.

Рассмотрим такую окрестность $\mathscr{U}$ фиксированной точки v, что величина $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости не превосходит некоторого $\varepsilon > 0$. Выбор $\varepsilon > 0$ зависит от ξ, а именно величина $\frac{\varepsilon}{\xi}(48 + 48K)$ должна быть достаточно малой. Тогда для точек $w = (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, \widetilde{w}_4)$, лежащих в прообразе пересечения $\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r) \cap \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$, из (6) и (7) вытекает соотношение

$$|\varphi(w) - \widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle| \leq \varepsilon\sqrt{2 + 2K}r. \quad (8)$$

Докажем, что для всякой точки (w_1, w_2, w_4) на прямой, проходящей (в нормальных координатах относительно v) через нее и начало координат, найдутся $w' = (w_1', w_2', w_4')$ и $w'' = (w_1'', w_2'', w_4'')$ такие, что $\varphi_\Gamma(w')$ лежит в $\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)$, а $\varphi_\Gamma(w'')$ лежит вне $\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)$. Иными словами, наша цель — найти такие $\sigma', \sigma'' > 0$, что выполняются оценки (9) и (10) (см. ниже).

Для точки (w_1^0, w_2^0, w_4^0), обладающей свойством

$$\max\{(w_1^0)^2, (w_2^0)^2, |w_4^0|\} - \bigl(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\bigr)^2 = r^2,$$

найдем такое малое $\sigma' > 0$, что

$$\max\{(1+\sigma')^2(w_1^0)^2, (1+\sigma')^2(w_2^0)^2, (1+\sigma')|w_4^0|\}$$
$$- (1+\sigma')^2\bigl(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\bigr)^2 > r^2 + \varepsilon(48 + 48K)r^2.$$

Множитель 48 в соотношении выше обусловлен оценкой $\sigma' \leq 1$, соотношением (8), записанным для $r' = (1+\sigma')r < 2r$, и тем, что образы четвертой координаты при φ_Γ и при $\widehat{D}\varphi(v)$ отличаются не более чем на $\varepsilon d_\infty(v, w)^2$. Положим $48 + 48K = K'$.

Оценим значения σ' и σ'' для $(w_1^0)^2 \geq \max\{(w_2^0)^2, |w_4^0|\}$. В этом случае при подходящем выборе σ' имеем

$$(1+\sigma')^2\bigl((w_1^0)^2 - \bigl(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\bigr)^2\bigr) = (1+\sigma')^2 r^2$$
$$= r^2 + (2\sigma' + (\sigma')^2)r^2 > r^2 + \varepsilon K' r^2.$$

Из соотношения видно, что для его справедливости достаточно рассмотреть $\sigma' = \varepsilon K'$. Следовательно,

$$\max\{(1+\sigma')^2(w_1^0)^2, (1+\sigma')^2(w_2^0)^2, (1+\sigma')|w_4^0|\}$$
$$- \bigl(\varphi_\Gamma\bigl((1+\sigma')w_1^0, (1+\sigma')w_2^0, (1+\sigma')w_4^0\bigr)\bigr)^2 > r^2.$$

Исследуем $\sigma'' > 0$; пусть $(1-\sigma'')(w_1^0)^2 \geq |w_4^0|$. Тогда

$$(1-\sigma'')^2\bigl((w_1^0)^2 - \bigl(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\bigr)^2\bigr) = (1-\sigma'')^2 r^2$$
$$= r^2 - (2\sigma'' - (\sigma'')^2)r^2 < r^2 - \varepsilon K' r^2$$

при $\sigma'' \geq \varepsilon K'$. Если $(1-\sigma'')\big(w_1^0\big)^2 < \big|w_4^0\big|$, то, так как $(1-c)^2\big(w_1^0\big)^2 < r^2$ по выбору c, получаем

$$\begin{aligned}
&(1-\sigma'')\big(\big|w_4^0\big| - (1-\sigma'')\big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\big)\\
&\quad = (1-\sigma'')\big(\big|w_4^0\big| - \big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\big) + \sigma''(1-\sigma'')\big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\\
&\qquad \leq (1-\sigma'')r^2 + \sigma''(1-\sigma'')(1-c)^2\big(w_1^0\big)^2\\
&\qquad < (1-\sigma'')r^2 + \sigma''(1-\sigma'')r^2 = r^2 - (\sigma'')^2 r^2 < r^2 - \varepsilon K' r^2
\end{aligned}$$

для $\sigma'' \geq \sqrt{\varepsilon K'}$.

Оценим значения σ' и σ'' для $\big|w_4^0\big| \geq \max\big\{\big(w_1^0\big)^2, \big(w_2^0\big)^2\big\}$. Без ограничения общности будем считать, что $\max\big\{\big(w_1^0\big)^2, \big(w_2^0\big)^2\big\} = \big(w_1^0\big)^2$. Положим $\sigma' > 0$; тогда при $(1+\sigma')\big(w_1^0\big)^2 < \big|w_4^0\big|$ с учетом (7) выводим

$$\begin{aligned}
&(1+\sigma')\big(\big|w_4^0\big| - (1+\sigma')^2\big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\big)\\
&\quad = (1+\sigma')\big(\big|w_4^0\big| - \big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\big) - \sigma'(1+\sigma')\big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\\
&\qquad \geq (1+\sigma')r^2 - \sigma'(1-c)^2\big|w_4^0\big| \geq r^2 + \sigma' r^2(2\sqrt{2}\xi - 2\xi^2) > r^2 + \varepsilon K' r^2,
\end{aligned}$$

если $\sigma' > \frac{\varepsilon}{\xi}K'$. При $(1+\sigma')\big(w_1^0\big)^2 \geq \big|w_4^0\big|$, учитывая оценку (7), получаем

$$\begin{aligned}
&(1+\sigma')^2\big(\big(w_1^0\big)^2 - \big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\big)\\
&\qquad \geq (1+\sigma')\big(\big|w_4^0\big| - (1+\sigma')\big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\big)\\
&\qquad = (1+\sigma')r^2 - \sigma'(1+\sigma')\big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\\
&\qquad \geq (1+\sigma')r^2 - \sigma'(1+\sigma')(1-c)^2\big(w_1^0\big)^2\\
&\qquad \geq (1+\sigma')r^2 - \sigma'(1+\sigma')r^2 = (1+\sigma')r^2 > r^2 + \varepsilon K' r^2
\end{aligned}$$

при $\sigma' > \varepsilon K'$. Окончательно, для $\sigma'' > 0$ имеем $(1-\sigma'')\big(w_1^0\big)^2 < \big|w_4^0\big|$ и

$$\begin{aligned}
&(1-\sigma'')\big(\big|w_4^0\big| - (1-\sigma'')\big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\big)\\
&\quad \leq (1-\sigma'')\big(\big|w_4^0\big| - \big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\big) + \sigma''(1-\sigma'')\big(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1^0, w_2^0\rangle\big)^2\\
&\qquad \leq (1-\sigma'')r^2 + \sigma''(1-\sigma'')(1-c)^2\big|w_4^0\big|\\
&\qquad \leq (1-\sigma'')r^2 + \sigma''(1-\sigma'')r^2 = (1-\sigma'')r^2 < r^2 - \varepsilon K' r^2
\end{aligned}$$

при $\sigma'' > \varepsilon K'$. Таким образом, при подходящем выборе $\sigma' > 0$ и $\sigma'' > 0$ в силу соотношения (8) требуемые неравенства

$$\begin{aligned}
&\tilde{d}_\infty^{SL}\big(0, \big((1+\sigma')w_1^0, (1+\sigma')w_2^0,\\
&\qquad \varphi\big((1+\sigma')w_1^0, (1+\sigma')w_2^0, (1+\sigma')w_4^0\big), (1+\sigma')w_4^0\big)\big) > r
\end{aligned} \tag{9}$$

и

$$\begin{aligned}
&\tilde{d}_\infty^{SL}\big(0, \big((1-\sigma'')w_1^0, (1-\sigma'')w_2^0,\\
&\qquad \varphi\big((1-\sigma'')w_1^0, (1-\sigma'')w_2^0, (1-\sigma'')w_4^0\big), (1-\sigma'')w_4^0\big)\big) < r
\end{aligned} \tag{10}$$

выполняются. В частности, существуют такие малые $\sigma_0' > 0$ и $\sigma_0'' > 0$, что (9) и (10) справедливы соответственно для всех $\sigma' \geq \sigma_0'$ и $\sigma'' \geq \sigma_0''$ (предполагается, что верхняя граница значений σ', σ'' определяется окрестностью $\mathscr{U}$).

Поэтому в этих точках значения φ_Γ будут лежать строго внутри или вне шара $\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v),r)$.

Отсюда вытекает, что для всякой точки существует содержащая ее окрестность $\mathscr{U}\subset\Omega$, обладающая следующим свойством: для любых точек на поверхности $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ можно найти такой радиус $r>0$, что пересечения $\tilde{d}^{SL}_\infty$-шаров такого радиуса с центрами в этих точках и поверхности между собой пересекаться не будут. Действительно, выберем $\varepsilon>0$ и окрестность $\mathscr{U}$ такого диаметра, что $|\varphi(w)-\widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle|<\varepsilon\cdot d_\infty(v,w)$ для всех $v,w\in\mathscr{U}$. Тогда для точек $\varphi_\Gamma(u),\varphi_\Gamma(w)\in\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ достаточно рассмотреть такое $r>0$, что $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(u)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(u),r)$ и $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(w)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(w),r)$ не пересекаются, кроме того, множества

$$B_u=L_{1+\sigma'}\big[\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(u)^{-1}\big\langle\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(u),r)\big\rangle\big]$$

и

$$B_w=L_{1+\sigma'}\big[\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(w)^{-1}\big\langle\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(w),r)\big\rangle\big],$$

где $L_{1+\sigma'}$ — растяжение в $1+\sigma'$ раз, также не пересекаются (это возможно в силу оценок (6) и (7)). Тогда, во-первых, $\varphi_\Gamma(B_u)\cap\varphi_\Gamma(B_w)=\varnothing$ и, во-вторых, по доказанному $\varphi_\Gamma(B_u)\supset\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(u),r)\cap\varphi_\Gamma\langle\mathscr{U}\rangle$ и $\varphi_\Gamma(B_w)\supset\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(w),r)\cap\varphi_\Gamma\langle\mathscr{U}\rangle$.

Действительно, предположим, что существует $p\in\mathscr{U}$ такое, что $p\notin B_u$ и $\varphi_\Gamma(p)\in\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(u),r)$. Тогда $\max\{p_1^2,p_2^2,|p_4|\}-\varphi(p)^2<r^2$, где $(p_1,p_2,\varphi(p),p_4)$ — координаты $\varphi_\Gamma(p)$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$. Следовательно,

$$\max\{p_1^2,p_2^2,|\hat{p}_4|\}-(\widehat{D}\varphi(p)\langle p_1,p_2\rangle)^2<r^2+(3+1)\varepsilon d_\infty(u,p)^2=r^2+4\varepsilon d_\infty(u,p)^2,$$

где $\hat{p}_4$ — четвертая координата $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(u)\langle p\rangle$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$. С учетом оценки (6) получаем

$$(1-\varepsilon(4+4K))\max\{p_1^2,p_2^2,|\widehat{p}_4|\}-(\widehat{D}\varphi(p)\langle p_1,p_2\rangle)^2<r^2.$$

Следовательно, так как $(1-c)^2<1/2$, имеем

$$(1/2-\varepsilon(4+4K))\max\{p_1^2,p_2^2,|\widehat{p}_4|\}<r^2,$$

поэтому

$$\max\{p_1^2,p_2^2,|\widehat{p}_4|\}-(\widehat{D}\varphi(p)\langle p_1,p_2\rangle)^2<r^2+\frac{\varepsilon(4+4K))}{1/2-\varepsilon(4+4K)}r^2<r^2+\varepsilon K'r^2;$$

противоречие с тем, что $p\notin B_u$.

Подчеркнем, что окрестность $\mathscr{U}$ зависит от оценки ε величины $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости; кроме того, величины $\sigma'>0$ и $\sigma''>0$ также определяются значением ε. Следовательно, ${}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma$-мера аддитивна на отдаленных шарах как на $\varphi(\mathscr{U})$, так и на $\varphi(\Omega)$ (с учетом требований определения 21).

Абсолютная непрерывность функции множества Φ вытекает из оценки (6) и обратной к ней $|w_4|\le(1+K)\max\{\widetilde{w}_1^2,\widetilde{w}_2^2,|\widetilde{w}_4|\}$ (см. подробности в шаге 7).

Шаг 3. Покажем, что при достаточно малых $r>0$ справедливо

$$\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\big)=(1+o(1))\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}\big\langle\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v),r)\big\rangle\big),$$

где $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно по v из некоторой окрестности $\mathscr{U}$, существование которой доказано на шаге 2. Фиксируем $v\in\mathscr{U}$, $r>0$ и шар

$\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)$. Рассмотрим его прообраз $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}\langle\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\rangle$. Тогда существуют не зависящие от $r>0$ и $v\in\mathscr{U}$ числа σ_0',σ_0'', сравнимые с $\varepsilon>0$, такие, что (см. (9) и (10))

$$L_{1+\sigma_0'}\big[\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}\big\langle\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\big\rangle\big]\supset\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)$$
$$\supset L_{1-\sigma_0''}\big[\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}\big\langle\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\big\rangle\big].$$

Так как ε одно и то же на $\mathscr{U}$, из последнего соотношения следует равномерная сходимость

$$\lim_{r\to0}\frac{\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\cap\mathscr{U}\big)}{\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}\big\langle\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\big\rangle\cap\mathscr{U}\big)}=1.$$

Поэтому при достаточно малых $r>0$ справедливо

$$\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\big)=(1+o(1))\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\big),$$

где $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}$.

Шаг 4. Покажем, что

$$\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)$$
$$=\frac{8r^4\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(v)|^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}\Big(\frac13+\frac{2-|\widehat{D}\varphi(v)|^2}{3(1-(X\varphi)^2(v))(1-(Y\varphi)^2(v))}\Big).$$

Фиксируем окрестность $\mathscr{U}$, описанную на шагах 2 и 3, и точку $v\in\mathscr{U}$. По теореме 10 и следствию 17 отображение-график φ_Γ полиномиально hc-дифференцируемо в точке v. Рассмотрим элемент $\varphi_\Gamma(v)$ и перейдем в нормальные координаты относительно него (в адаптированном в точке $\varphi_\Gamma(v)$ базисе $\{\widetilde{X}^v,\widetilde{Y}^v,T,Z\}$). Запишем полиномиальный hc-дифференциал в этом базисе, переводящий точку с координатами (v_1,v_2,v_4) в точку с координатами $(\tilde v_1,\tilde v_2,\tilde v_3,\tilde v_4)$:

$$\tilde v_1=v_1,\quad \tilde v_2=v_2,\quad \tilde v_3=\widehat{D}\varphi(v)\langle v_1,v_2\rangle,\quad \tilde v_4=v_4+\widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle\big(F^4_{13}v_1+F^4_{23}v_2\big).\tag{11}$$

Сначала вычислим $\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)$. Для этого в нормальных координатах относительно $\varphi_\Gamma(v)$ воспользуемся формулой коплощади: построим проекцию $(\tilde v_1,\tilde v_2,\tilde v_3,\tilde v_4)\mapsto(\tilde v_1,\tilde v_2,\tilde v_3)$. Образ множества

$$(\tilde\theta^v)^{-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}^{SL}_{\Gamma}(\varphi_\Gamma(v),r)\big),$$

где $\tilde\theta^v:(\tilde v_1,\tilde v_2,\tilde v_3,\tilde v_4)\mapsto\exp(\tilde v_1\widetilde{X}^v+\tilde v_2\widetilde{Y}^v+\tilde v_3T+\tilde v_4Z)(\varphi_\Gamma(v))$, при такой проекции — плоскость, пересекающая гиперболоид $\max\{\tilde v_1^2,\tilde v_2^2\}-\tilde v_3^2=r^2$; ее площадь равна

$$\frac{4r^2}{\sqrt{(1-(X\varphi)^2(v))(1-(Y\varphi)^2(v))}}\cdot\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi|^2}.$$

Действительно, $\tilde v_1$ и $\tilde v_2$ меняются в промежутках $\big[-\frac{r}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}},\frac{r}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}}\big]$ и $\big[-\frac{r}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}},\frac{r}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}\big]$ соответственно, а якобиан отображения $(\tilde v_1,\tilde v_2)\mapsto(\tilde v_1,\tilde v_2,\widehat{D}\varphi(v)\langle\tilde v_1,\tilde v_2\rangle)$ равен

$$\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi|^2}.\tag{12}$$

При каждом фиксированном (v_1, v_2) (а следовательно, и $(\tilde v_1, \tilde v_2)$) однозначно определяются значение $\widehat D\varphi(v)\langle v_1, v_2\rangle = \widehat D\varphi(v)\langle \tilde v_1, \tilde v_2\rangle$ и промежуток, в котором меняется $\tilde v_4$:

$$\tilde v_4 \in [-r^2 - (\widehat D\varphi(v)\langle \tilde v_1, \tilde v_2\rangle)^2, r^2 + (\widehat D\varphi(v)\langle \tilde v_1, \tilde v_2\rangle)^2]. \tag{13}$$

Для подсчета величины $\mathscr{H}^3\big(\widehat D_P\varphi(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \operatorname{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)\big)$ осталось применить формулу коплощади для проекции $(\tilde v_1, \tilde v_2, \tilde v_3, \tilde v_4) \mapsto (\tilde v_1, \tilde v_2, \tilde v_3)$. Так как ее коэффициент коплощади равен единице, выводим

$$\begin{aligned}
&\mathscr{H}^3\big(\widehat D_P\varphi(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \operatorname{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)\big) = \sqrt{1+|\widehat D\varphi(v)|^2} \\
&\quad\times \int\limits_{-\frac{r}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}}}^{\frac{r}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}}} \int\limits_{-\frac{r}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}}^{\frac{r}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}} (2r^2 + 2(\widehat D\varphi(v)\langle \tilde v_1, \tilde v_2\rangle)^2)\, d\tilde v_1\, d\tilde v_2 \\
&\quad= \frac{8r^4\sqrt{1+|\widehat D\varphi(v)|^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}} \\
&\quad+ 2\sqrt{1+|\widehat D\varphi(v)|^2} \int\limits_{-\frac{r}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}}}^{\frac{r}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}}} \int\limits_{-\frac{r}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}}^{\frac{r}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}} (\widehat D\varphi(v)\langle \tilde v_1, \tilde v_2\rangle)^2\, d\tilde v_1\, d\tilde v_2 \\
&= \frac{8r^4\sqrt{1+|\widehat D\varphi(v)|^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}\left(1 + \frac{(X\varphi)^2(v)}{3(1-(X\varphi)^2(v))} + \frac{(Y\varphi)^2(v)}{3(1-(Y\varphi)^2(v))}\right).
\end{aligned}$$

Преобразуем выражение в скобках и получим, что в нормальных координатах относительно $\varphi_\Gamma(v)$ (в базисе $\{\widetilde X^v, \widetilde Y^v, T, Z\}$) справедливо

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^3\big(\widehat D_P\varphi(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \operatorname{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)\big) &= \frac{8r^4\sqrt{1+|\widehat D\varphi(v)|^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}} \\
&\times\left(\frac{1}{3} + \frac{2-|\widehat D\varphi(v)|^2}{3(1-(X\varphi)^2(v))(1-(Y\varphi)^2(v))}\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Аналогично непосредственными вычислениями с учетом отрицательного квадрата длины на третьей координате и соответствующего элемента площади на подпространстве, натянутом на первые три базисных вектора (в координатах первого рода), вычисляемому по формуле

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & ia \\ 0 & 1 & ib \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & ia \\ 0 & 1 & ib \end{pmatrix}^T\right|^{1/2} = \sqrt{1-a^2-b^2},$$

где i — мнимая единица (следовательно, якобиан отображения

$$(\tilde v_1, \tilde v_2) \mapsto (\tilde v_1, \tilde v_2, \widehat D\varphi(v)\langle \tilde v_1, \tilde v_2\rangle)$$

равен $\sqrt{1-|\widehat D\varphi|^2}$), выводим для множеств в нормальных координатах относительно $\varphi_\Gamma(v)$ в базисе $\{\widetilde X^v, \widetilde Y^v, T, Z\}$ соотношение

$$\begin{aligned}
&{}^L\mathscr{H}^3\big(\widehat D_P\varphi(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \operatorname{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)\big) \\
&\quad= \frac{8r^4\sqrt{1-|\widehat D\varphi(v)|^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}\left(\frac{1}{3} + \frac{2-|\widehat D\varphi(v)|^2}{3(1-(X\varphi)^2(v))(1-(Y\varphi)^2(v))}\right)
\end{aligned}$$

(здесь ${}^{L}\mathscr{H}^3$ — мера, «учитывающая» отрицательный квадрат длины).

Шаг 5. Покажем, что

$$ {}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v),r)\big)=8r^4(1+o(1)), $$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}$. Эта мера на образе полиномиального hc-дифференциала определяется по аналогии со случаем образа отображения-графика с заменой шаров в базисе $\big\{X+2\varphi(v_j)F^4_{13}Z,Y+2\varphi(v_j)F^4_{23}Z,T,Z\big\}$ шарами в базисе $\big\{X+2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F^4_{13}Z,Y+2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F^4_{23}Z,T,Z\big\}$. Так как доказываем локальное свойство, без ограничения общности можно рассматривать окрестность $\mathscr{U}$, описанную на шаге 3. Фиксируем $v\in\mathbb{H}$, $\delta>0$ и покрытие шарами, аппроксимирующее $({}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma)_\delta\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v),r)\big)$ (см. определение 18). Этому покрытию соответствует сумма $8\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}r_j^4$. Для оценки меры фиксируем центр $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle$ одного из шаров покрытия и найдем локальное искажение меры при $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)$ в точке v_j. Выразим координаты $\big(\widetilde{w}^j_1,\widetilde{w}^j_2,\widetilde{w}^j_3,\widetilde{w}^j_4\big)$ произвольной точки $w\in\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle,r_j)$ относительно центра шара $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle$ в базисе $\{\widetilde{X}^v,\widetilde{Y}^v,T,Z\}$. В дальнейших рассуждениях координаты w относительно $\varphi_\Gamma(v)$ обозначены через (w_1,w_2,w_3,w_4), а координаты $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle$ относительно $\varphi_\Gamma(v)$ — через $\big(v^j_1,v^j_2,v^j_3,v^j_4\big)$. Имеем

$$ \widetilde{w}^j_1=w_1-v^j_1,\quad \widetilde{w}^j_2=w_2-v^j_2, $$

$$ \widetilde{w}_3=w_3-v^j_3=\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1,w_2\rangle-\widehat{D}\varphi(v)\big\langle v^j_1,v^j_2\big\rangle=\widehat{D}\varphi(v)\big\langle w_1-v^j_1,w_2-v^j_2\big\rangle, $$

$$ \widetilde{w}_4=w_4-v^j_4+F^4_{12}\big(w_1v^j_2-w_2v^j_1\big)+F^4_{13}\big(w_1v^j_3-w_3v^j_1\big)+F^4_{23}\big(w_2v^j_3-w_3v^j_2\big). $$

Тогда в прообразе последние координаты точек v_j и $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\langle w\rangle$ равны соответственно $v^j_4-v^j_3\big(F^4_{13}v^j_1+F^4_{23}v^j_2\big)$ и $w_4-w_3\big(F^4_{13}w_1+F^4_{23}w_2\big)$. Заметим, что если $(\overline{w}_1,\overline{w}_2,\overline{w}_4)$ — нормальные координаты точки $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\langle w\rangle$ относительно v_j (в базисе $\{X,Y,Z\}$), то

$$ \overline{w}_4=w_4-v^j_4-F^4_{13}\big(w_1w_3-v^j_1v^j_3\big)-F^4_{23}\big(w_2w_3-v^j_2v^j_3\big)+F^4_{12}\big(w_1v^j_2-w_2v^j_1\big), $$

поэтому

$$ \widetilde{w}^j_1=\overline{w}_1,\quad \widetilde{w}^j_2=\overline{w}_2,\quad \widetilde{w}_3=\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_1,\overline{w}_2\rangle, $$

$$ \widetilde{w}_4=\overline{w}_4+F^4_{13}\big(w_1-v^j_1\big)\big(w_3+v^j_3\big)+F^4_{23}\big(w_2-v^j_2\big)\big(w_3+v^j_3\big). $$

Преобразуем выражение для координаты $\widetilde{w}_4$:

$$ \begin{aligned} \widetilde{w}_4&=\overline{w}_4+F^4_{13}\big(w_1-v^j_1\big)\big(w_3+v^j_3\big)+F^4_{23}\big(w_2-v^j_2\big)\big(w_3+v^j_3\big)\\ &=\overline{w}_4+\big(F^4_{13}\overline{w}_1+F^4_{23}\overline{w}_2\big)\big(w_3+v^j_3\big)\\ &=\overline{w}_4+\big(F^4_{13}\overline{w}_1+F^4_{23}\overline{w}_2\big)\widehat{D}\varphi(v)\big\langle w_1+v^j_1,w_2+v^j_2\big\rangle. \end{aligned} $$

Так как по определению ${}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меры для каждого шара из покрытия нужно рассматривать адаптированный относительно прообраза центра шара базис, координаты нужно вычислить в базисе $\big\{X+2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F^4_{13}Z,Y+2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F^4_{23}Z,$

$T, Z\}$ относительно $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle$. В этом случае получаем следующее выражение для координат $\left(\widehat{w}_1^j, \widehat{w}_2^j, \widehat{w}_3^j, \widehat{w}_4^j\right)$ точки w:

$$\begin{gathered}\widehat{w}_1^j = \overline{w}_1, \quad \widehat{w}_2^j = \overline{w}_2, \quad \widehat{w}_3 = \widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_1, \overline{w}_2\rangle, \\ \widehat{w}_4 = \overline{w}_4 + \widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_1, \overline{w}_2\rangle\left(F_{13}^4\overline{w}_1 + F_{23}^4\overline{w}_2\right).\end{gathered} \tag{15}$$

Запишем дифференциал отображения ψ, действующего из нормальных координат относительно v_j в нормальные координаты относительно точки $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle$ (в базисе $\left\{X+2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{13}^4 Z, Y+2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{23}^4 Z, T, Z\right\}$), следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{w} = (\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_4) \\ \mapsto \left(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_1, \overline{w}_2\rangle, \overline{w}_4 + \widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_1, \overline{w}_2\rangle\left(F_{13}^4\overline{w}_1 + F_{23}^4\overline{w}_2\right)\right).\end{aligned}$$

Из непосредственных вычислений следует, что

$$D\psi(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ X\varphi(v) & Y\varphi(v) & 0 \\ D_1 & D_2 & 1 \end{pmatrix},$$

где $D_1 = X\varphi(v)\left(F_{13}^4\overline{w}_1 + F_{23}^4\overline{w}_2\right) + F_{13}^4\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_1, \overline{w}_2\rangle$ и $D_2 = Y\varphi(v)\left(F_{13}^4\overline{w}_1 + F_{23}^4\overline{w}_2\right) + F_{23}^4\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_1, \overline{w}_2\rangle$. Тогда $\sqrt{\det(D\psi^*(\overline{w})D\psi(\overline{w}))} = \sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(v)|^2}$. Следовательно, якобиан в точке v_j отображения $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)$, действующего из $\mathscr{U}$ в $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$ как

$$\begin{aligned} w = \exp(\overline{w}_1 X + \overline{w}_2 Y + \overline{w}_4 Z)(v_j) \mapsto \exp\bigl(\overline{w}_1(X + 2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{13}^4 Z) \\ + \overline{w}_2\left(Y + 2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{23}^4 Z\right) + (\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_1, \overline{w}_2\rangle)T \\ + \left(\overline{w}_4 + \widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_1, \overline{w}_2\rangle\left(F_{13}^4\overline{w}_1 + F_{23}^4\overline{w}_2\right)\right)Z\bigr)(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle), \end{aligned}$$

равен

$$\mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v), v_j) = \sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(v)|^2}\,\frac{|g|_{T\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle)|}{|g|_{\mathbb{H}}(v_j)|}$$

(здесь риманов тензор в образе считается для базиса $\bigl\{X + 2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{13}^4 Z$, $Y + 2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{23}^4 Z, T, Z\bigr\}$). В силу оценок (6) и (7) прообразы всех шаров $\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)$ при отображении $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)$ лежат в $\mathrm{Box}(v_j, (2+2K)r_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Таким образом, для них применимы все оценки, когда длины в прообразе равномерно сравнимы с r_j. Кроме того, заметим, что в силу соотношений (15) $\mathscr{H}^3$-мера множества $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, \tau)$ в нормальных координатах (здесь и далее на этом шаге построенных в базисе $\bigl\{X + 2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{13}^4 Z, Y + 2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{23}^4 Z, T, Z\bigr\}$) относительно $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle$ также вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} &\frac{8\tau^4\sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(v)|^2}}{\sqrt{1 - (X\varphi)^2(v)}\sqrt{1 - (Y\varphi)^2(v)}}\left(\frac{1}{3} + \frac{2 - |\widehat{D}\varphi(v)|^2}{3(1 - (X\varphi)^2(v))(1 - (Y\varphi)^2(v))}\right) \\ &\quad = 8\tau^4\frac{\sqrt{1 + |\widehat{D}\varphi(v)|^2}}{\sqrt{1 - (X\varphi)^2(v)}\sqrt{1 - (Y\varphi)^2(v)}}\,\frac{(2 - (X\varphi)^2(v))(2 - (Y\varphi)^2(v)) - 1}{3(1 - (X\varphi)^2(v))(1 - (Y\varphi)^2(v))}. \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда, полагая $\mathscr{H}_j^3$ равной мере Хаусдорфа, которая строится по базису $\{X + 2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{13}^4 Z, Y + 2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{23}^4 Z, T, Z\}$, $j \in \mathbb{N}$, имеем

$$
\begin{aligned}
8\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^4 &= \sum_{j\in\mathbb{N}} (1+o(1)) \frac{\mathscr{H}_j^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)\big)}{|g_j|_{T\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle)|} \\
&\quad\times \frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}{\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(v)|^2}} \frac{3(1-(X\varphi)^2(v))(1-(Y\varphi)^2(v))}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2(v))-1} \\
&= (1+o(1)) \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v), v_j) \frac{\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)\big\rangle\big)}{|g_j|_{T\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle)|} \\
&\quad\times \frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}{\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(v)|^2}} \frac{3(1-(X\varphi)^2(v))(1-(Y\varphi)^2(v))}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2(v))-1} \\
&= \frac{\mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v), v)}{|g_j|_{T\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(v))|} \frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}{\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(v)|^2}} \\
&\quad\times \frac{3(1-(X\varphi)^2(v))(1-(Y\varphi)^2(v))}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2(v))-1} \\
&\quad\times (1+o(1)) \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)\big\rangle\big) \\
&= \frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}{|g|_{\mathbb{H}}(v_j)|} \frac{3(1-(X\varphi)^2(v))(1-(Y\varphi)^2(v))}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2(v))-1} \\
&\quad\times (1+o(1)) \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)\big\rangle\big) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

(здесь римановы тензоры g_j в образе рассматриваются в соответствующих адаптированных базисах $\{X + 2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{13}^4 Z, Y + 2\widehat{D}\varphi(v)\langle v_j\rangle F_{23}^4 Z, T, Z\}$, $j \in \mathbb{N}$). Множества $\{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$ образуют покрытие $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\rangle$.

Так как $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)$ билипшицево, из (16) следует, что мера $\mathscr{H}^3$ в прообразе удовлетворяет условию удвоения на множествах

$$\big\{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle u\rangle, \tau)\big\rangle\big\}_{u\in\mathscr{U},\,\tau>0}.$$

Кроме того, $w \in \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)$, поэтому из (15), (6) и (7), во-первых, вытекает оценка для координат прообраза $\max\{\overline{w}_1^2, \overline{w}_2^2, |\overline{w}_4|\} < 2(1+K)r_j^2$, $j \in \mathbb{N}$, при $c > 1 - \sqrt{2}/2 + \xi$ и, во-вторых, следует, что если $\max\{\overline{w}_1^2, \overline{w}_2^2, |\overline{w}_4|\} < \frac{r_j^2}{1+K}$, то образ этой точки будет лежать в шаре $\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)$. Рассмотрим покрытие Витали

$$
\begin{aligned}
&\big\{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle u\rangle, \tau)\big\rangle \mid u \in \mathscr{U},\ \tau > 0, \\
&\qquad \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle u\rangle, \tau)\big\rangle \subset \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big\rangle\big\}
\end{aligned}
$$

и по теореме Витали [21, 22] выберем из него дизъюнктную систему, которая покрывает прообраз $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\rangle$ с точностью до множества

$\mathscr{H}^3$-меры нуль. Обозначим объединение множеств из этой системы символом $\mathscr{B}$.

Для множества меры нуль $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\rangle\setminus\mathscr{B}$ и произвольного $\sigma'>0$ существует покрытие шарами $\{\mathrm{Box}(u_k,\tau_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ такое, что сумма $\mathscr{H}^3$-мер этих шаров не превосходит σ'. Из (15), (6) и (7) следует, что каждый из шаров $\mathrm{Box}(u_k,\tau_k)$ лежит в прообразе $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle u_k\rangle,\sqrt{1+K}\tau_k)\rangle$, $k\in\mathbb{N}$, и сумма мер как этих прообразов, так и их образов при отображении $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)$ не превосходит $\sigma=L\sigma'$ для некоторого $L<\infty$.

Таким образом, для всякого $\sigma>0$ существует такое покрытие прообраза $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)$ множествами

$$\big\{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle,r_j)\big)\big\}_{j\in\mathbb{N}},$$

что сумма их $\mathscr{H}^3$-мер не превосходит $\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\big)+\sigma$. Тогда из (17), (12) и (14) имеем

$$\begin{aligned}
&{}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\\
&\quad=\frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}}{|g|_{\mathbb{H}}(v_j)|}\frac{3(1-(X\varphi)^2(v))(1-(Y\varphi)^2(v))}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2(v))-1}\\
&\qquad\times(1+o(1))\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\big)=(1+o(1))8r^4,
\end{aligned}$$

где $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}$.

Шаг 6. Далее схема доказательства повторяет схему, приведенную в [18] (см. также [23]). Фиксируем $\mathscr{U}\subset\Omega$, рассмотрим $\mathrm{Box}(v,r)\subset\mathscr{U}$ и его образ $\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(v,r))$ и оценим величину ${}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(v,r)))$. Фиксируем $\delta>0$ и произвольное покрытие из определения функции множества $({}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma)_\delta$. По выбору $\mathscr{U}$ для всякого $A\subset\mathscr{U}$ справедливо

$$\mathscr{H}^3(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(w)\langle A\rangle)=(1+o(1))\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(w)|^2}\cdot\frac{|g|_{T\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(w)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(w))|}{|g|_{\mathbb{H}}(w)|}\cdot\mathscr{H}^3(A),$$

где $w\in A$ и $o(1)\to0$, если радиус A стремится к нулю (здесь мера в образе считается относительно адаптированного базиса $\{\widetilde{X}^w,\widetilde{Y}^w,T,Z\}$ в точке $\varphi_\Gamma(w)$). Тогда, полагая

$$\begin{aligned}
D_j&=\frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2(v_j)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v_j)}|g|_{\mathbb{H}}(v_j)|}{\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(v_j)|^2}|g_j|_{T\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v_j)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(v_j))|}\\
&\qquad\times\frac{3(1-(X\varphi)^2(v_j))(1-(Y\varphi)^2(v_j))}{(2-(X\varphi)^2(v_j))(2-(Y\varphi)^2(v_j))-1}=D\,{}^{SL}\mathscr{H}^4_{\Gamma\ \mathscr{H}^3}(\varphi_\Gamma(v_j)),
\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{N}}8r_j^4=(1+o(1))\sum_{j\in\mathbb{N}}{}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma\big(\,\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j),r_j)\cap\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v_j)\langle\mathscr{U}\rangle\big)\\
&\quad=(1+o(1))\sum_{j\in\mathbb{N}}D\,{}^{SL}\mathscr{H}^4_{\Gamma\ \mathscr{H}^3}(\varphi_\Gamma(v_j))\mathscr{H}^3\big(\,\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j),r_j)\cap\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v_j)\langle\mathscr{U}\rangle\big)\\
&\qquad=(1+o(1))\sum_{j\in\mathbb{N}}D_j\left(\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(v_j)|^2}\frac{|g_j|_{T\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v_j)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(v_j))|}{|g|_{\mathbb{H}}(v_j)|}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v_j)^{-1}\big\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), r_j)\big\rangle\big)\\
&= (1+o(1))\bigg(D^{\,SL}\mathscr{H}^4_{\Gamma\,\mathscr{H}^3}(\varphi_\Gamma(v))\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(v)|^2}\,\frac{|g|_{T\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(v))|}{|g|_{\mathbb{H}}(v)|}\bigg)\\
&\quad\times\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v_j)^{-1}\big\langle \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), r_j)\big\rangle\big)\\
&= \bigg(D^{\,SL}\mathscr{H}^4_{\Gamma\,\mathscr{H}^3}(\varphi_\Gamma(v))\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(v)|^2}\,\frac{|g|_{T\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(v))|}{|g|_{\mathbb{H}}(v)|}\bigg)\\
&\quad\times(1+o(1))\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), r_j)\big)\big),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}$, а символ g_j, как и ранее, обозначает риманов тензор в соответствующем адаптированном базисе. Следовательно, точная нижняя грань сумм $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} 8r_j^4$ достигается тогда и только тогда, когда значение $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), r_j)\big)\big)$ близко к точной нижней грани.

Шаг 7. Покажем, что инфимум сумм

$$
\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), r_j)\big)\big)
$$

равен $\mathscr{H}^3(\mathrm{Box}(v,r))$, и найдем производную функции множества Φ в точке v.

Из шагов 2–5 следует, что мера $\mathscr{H}^3$ на «шарах» $\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), r_j)\big)$ удовлетворяет условию удвоения и что к покрытию такими «шарами» множества $\mathrm{Box}(v,r)$ можно применить теорему Витали [21, 22], а оставшееся множество нулевой $\mathscr{H}^3$-меры покрыть «шарами» такого же вида так, что сумма мер не превосходит некоторого $\tau>0$. Отсюда вытекает, что точная нижняя грань сумм в правой части (18) равна $\mathscr{H}^3(\mathrm{Box}(v,r)) = 8r^4|g|_{\mathbb{H}}(v)|$.

Тогда в силу (18) имеем

$$
\begin{aligned}
&{}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(v,r)))\\
&\qquad= (1+o(1))\bigg(\frac{3(1-(X\varphi)^2(v))^{3/2}(1-(Y\varphi)^2(v))^{3/2}}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2(v))-1}\bigg)\cdot 8r^4\\
&\qquad= (1+o(1))\bigg(\frac{3(1-(X\varphi)^2(v))^{3/2}(1-(Y\varphi)^2(v))^{3/2}}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2(v))-1}\bigg)\mathscr{H}^4(\mathrm{Box}(v,r)),
\end{aligned}
$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}$. Поэтому

$$
\Phi'(v) = \lim_{r\to 0}\frac{{}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(v,r)))}{\mathscr{H}^4(\mathrm{Box}(v,r))} = \frac{3(1-(X\varphi)^2(v))^{3/2}(1-(Y\varphi)^2(v))^{3/2}}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2(v))-1}.
$$

Следовательно [24, 25],

$$
\int\limits_{\mathscr{U}}\frac{3(1-(X\varphi)^2(v))^{3/2}(1-(Y\varphi)^2(v))^{3/2}}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2)-1}\,d\mathscr{H}^4(v) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(\mathscr{U})} d\,{}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(y).
$$

Для общего случая множества Ω достаточно рассмотреть разбиение на подмножества, обладающие свойствами множества $\mathscr{U}$. Напомним, что на образах элементов таких разбиений ${}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4$-мера аддитивна по определению. Следовательно,

$$\int\limits_\Omega \frac{3(1-(X\varphi)^2(v))^{3/2}(1-(Y\varphi)^2(v))^{3/2}}{(2-(X\varphi)^2(v))(2-(Y\varphi)^2)-1}\,d\mathscr{H}^4(v) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\ {}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4(y).$$

Теорема доказана. □

Выведем формулу площади для случая, когда «лоренцева часть» расстояния вводится только на горизонтальном подрасслоении.

Определение 28. Пусть $v=\exp(xX+yY+tT+zZ)(w)$. Положим *горизонтальное сублоренцево расстояние* d_∞^{SLH} равным

$$d_\infty^{SLH}(v,w)=d_\infty^{SLH}(w^{-1}v,\mathbf{0})$$
$$=\begin{cases}\max\{\sqrt{\max\{x^2,y^2\}-t^2},\sqrt{|z|}\}, & \max\{x^2,y^2\}-t^2>0,\\ |z|^{1/2}, & \max\{x^2,y^2\}-t^2=0,\\ i\sqrt{|\max\{x^2,y^2\}-t^2|}, & \max\{x^2,y^2\}-t^2<0 \text{ и } |\max\{x^2,y^2\}-t^2|>|z|,\\ |z|^{1/2}, & \max\{x^2,y^2\}-t^2<0 \text{ и } |\max\{x^2,y^2\}-t^2|\le|z|,\end{cases}$$

где $\mathbf{0}=(0,0,0,0)$.

Свойство 29. *Из определения* d_∞^{SLH} *следует, что открытый шар*

$$\mathrm{Box}^{SLH}(v,r)=\{y\in{}^s\mathbb{L}:\big(d_\infty^{SLH}\big)^2(v,y)<r^2\},$$

где $\big(d_\infty^{SLH}\big)^2(v,w)=\max\{\max\{x^2,y^2\}-t^2,|z|\}$ *в условиях определения 28, радиуса* r *с центром в точке* v *в координатах первого рода относительно этой точки равен декартову произведению множества* $\{(x,y,t):\max\{x^2,y^2\}-t^2<r^2\}$ *и интервала* $(-r^2,r^2)$.

Определение 30. Пусть $\Omega\subset\mathbb{H}$ — открытое множество и $\varphi\in C_H^1(\Omega,\mathbb{R})$. Рассмотрим точку $v\in\Omega$ и такую ее окрестность $\mathscr{U}\subset\Omega$, что величина $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости не превосходит фиксированного $\varepsilon>0$. Пусть $S\subset\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ и $\delta>0$. Положим

$$\big({}^{SLH}\mathscr{H}_\Gamma^4\big)_\delta(S)=8\inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}r_j^4:\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathrm{Box}_\Gamma^{SLH}(x_j,r_j)\supset S,\ x_j\in S,\ r_j<\delta,\ j\in\mathbb{N}\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества S,

$$\mathrm{Box}_\Gamma^{SLH}(x_j,r_j)=\{y\in{}^s\mathbb{L}:\big(\tilde d_\infty^{SLH}(x_j,y)\big)^2<r^2\},$$

$$\tilde d_\infty^{SLH}(v,w)$$
$$=\begin{cases}\max\{\sqrt{\max\{x^2,y^2\}-t^2},\sqrt{|z|}\}, & \max\{x^2,y^2\}-t^2>0,\\ |z|^{1/2}, & \max\{x^2,y^2\}-t^2=0,\\ i\sqrt{|\max\{x^2,y^2\}-t^2|}, & \max\{x^2,y^2\}-t^2<0 \text{ и } |\max\{x^2,y^2\}-t^2|>|z|,\\ |z|^{1/2}, & \max\{x^2,y^2\}-t^2<0 \text{ и } |\max\{x^2,y^2\}-t^2|\le|z|,\end{cases}$$

для $w=\exp(x\widetilde{X}^v+y\widetilde{Y}^v+tT+zZ)(v)$ и ${}^{SLH}\mathscr{H}_\Gamma^4(S)=\lim\limits_{\delta\to0}\big({}^{SLH}\mathscr{H}_\Gamma^4\big)_\delta(S)$.

Определение 31. Для каждой точки $x \in \varphi_\Gamma(\Omega)$ рассмотрим окрестность $\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x)\right)$, на которой величина $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости равномерна (не превосходит некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$). Рассмотрим такое $\delta > 0$, что любой шар радиуса $r < L\delta$ полностью лежит хотя бы в одной такой окрестности, где L — константа из неравенства

$$\frac{1}{L} d_\infty(v_j, w) \leq \tilde{d}_\infty^{SLH}(\varphi_\Gamma(v_j), \varphi_\Gamma(w)) \leq L d_\infty(v_j, w)$$

(если $\varphi \in C_H^1$ таково, что $|\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \leq (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\}$, $c > 0$, то $L < \infty$ существует; доказательство аналогично приведенному на шаге 6 теоремы 26). Определим функцию множества на $\varphi_\Gamma(\Omega)$ следующим образом:

$$\left({}^{SLH}\mathscr{H}_\Gamma^4\right)_\delta(S) = 8 \inf\Big\{\sum_{j \in \mathbb{N}} r_j^4 : \\ \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{Box}_\Gamma^{SLH}(x_j, r_j) \cap \varphi_\Gamma\big(\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)\big) \supset S,\ x_j \in S,\ r_j < \delta,\ j \in \mathbb{N}\Big\},$$

где $\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)$ — окрестность, содержащая $\varphi_\Gamma^{-1}\big(\operatorname{Box}_\Gamma^{SLH}(x_j, r_j)\big)$. Далее определение ${}^{SLH}\mathscr{H}_\Gamma^4$ на Ω повторяет определение 30.

Замечание 32. Мы рассматриваем систему окрестностей на Ω, чтобы избежать многократных пересечений поверхности $\varphi_\Gamma(\Omega)$ с шарами радиуса r с центрами в ее точках.

Свойство 33. *Функция $\Phi^H : A \mapsto {}^{SLH}\mathscr{H}_\Gamma^4(\varphi_\Gamma(A))$ обладает следующими свойствами:*

1) *абсолютно непрерывна относительно меры $\mathscr{H}^3$ на $\mathbb{H}$;*

2) *аддитивна на отдаленных шарах.*

Доказательство аналогично доказательству для функции Φ (см. свойство 23).

Теорема 34. *Пусть $\mathbb{H} = \mathbb{H}^1$ — группа Гейзенберга, $\Omega \subset \mathbb{H}$ — открытое множество; $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ — отображение класса C_H^1; $|\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \leq (1 - c)\max\{|w_1|, |w_2|\}$, $c > 0$, во всех точках $v \in \Omega$.*

Тогда горизонтальная сублоренцева ${}^{SLH}\mathscr{H}_\Gamma^4$-мера образа открытого множества

$\varphi_\Gamma(\Omega) \subset {}^s\mathbb{L}$ вычисляется по формуле

$$\int\limits_{\Omega} \sqrt{1 - (X\varphi)^2(v)}\sqrt{1 - (Y\varphi)^2(v)}\, d\mathscr{H}^4(v) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\ {}^{SLH}\mathscr{H}_\Gamma^4(y).$$

Доказательство с очевидными изменениями следует схеме доказательства теоремы 26. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миклюков В. М., Клячин А. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского // http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf.
2. *Берестовский В. Н., Гичев В. М.* Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 1–34.
3. *Grochowski M.* Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // J. Dyn. Control Syst. 2006. V. 12, N 2. P. 145–160.

4. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // J. Geom. Phys. 2009. V. 59, N 7. P. 885–900.

5. *Grochowski M.* Normal forms and reachable sets for analytic Martinet sub-Lorentzian structures of Hamiltonian type // J. Dyn. Control Syst. 2011. V. 17, N 1. P. 49–75.

6. *Grochowski M.* Reachable sets for contact sub-Lorentzian metrics on $\mathbb{R}^3$. Application to control affine systems with the scalar input // J. Math. Sci. 2011. V. 177, N 3. P. 383–394.

7. *Grochowski M.* The structure of reachable sets for affine control systems induced by generalized Martinet sub-Lorentzian metrics // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2012. V. 18, N 4. P. 1150–1177.

8. *Grochowski M.* The structure of reachable sets and geometric optimality of singular trajectories for certain affine control systems in $\mathbb{R}^3$. The sub-Lorentzian approach // J. Dyn. Control Syst. (to appear).

9. *Grochowski M.* Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 2002. V. 50, N 2. P. 161–178.

10. *Grochowski M.* Some remarks on the global sub-Lorentzian geometry // Anal. Math. Phys. (to appear).

11. *Korolko A., Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // J. Geom. Anal. 2009. V. 19, N 4. P. 864–889.

12. *Korolko A., Markina I.* Geodesics on H-type quaternion groups with sub-Lorentzian metric and their physical interpretation // Complex Anal. Oper. Theory. 2010. V. 4, N 3. P. 589–618.

13. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2007. № 1. С. 62–70.

14. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2008. № 3. С. 68–80.

15. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and mathematical physics. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.

16. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. (2). 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.

17. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Contemporary mathematics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.

18. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.

19. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 3. С. 259–264.

20. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.

21. *Водопьянов С. К.* Интегрирование по Лебегу: учебное пособие // http://math.nsc.ru/~matanalyse/Lebesgue.pdf.

22. *Guzmán M.* Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$. Berlin: Springer-Verl., 1975.

23. *Карманова М. Б.* Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.

24. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.

25. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II // Sib. Adv. Math. 2005. V. 15, N 1. P. 91–125.

Статья поступила 25 января 2015 г.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru