Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 517.518.15+514.7

ПОВЕРХНОСТИ–ГРАФИКИ НАД ТРЕХМЕРНЫМИ ГРУППАМИ ЛИ С СУБРИМАНОВОЙ СТРУКТУРОЙ

М. Б. Карманова

Аннотация. Исследован класс отображений-графиков, определенных на некоторых трехмерных группах Ли, выведены «дифференциальные» свойства таких отображений и доказана формула площади для поверхностей-графиков.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.612

Ключевые слова: трехмерная группа Ли, поверхность-график, полиномиальная субриманова дифференцируемость, формула площади.

Введение

В работе исследован класс поверхностей-графиков над трехмерными группами Ли с субримановой структурой, представимыми в виде трехмерных пространств Карно — Каратеодори с достаточно гладкими векторными полями. Основной результат статьи — описание дифференциальных свойств отображений-графиков и формула площади для поверхностей-графиков.

Исследование параметризованных поверхностей в субримановой геометрии является трудной и малоизученной проблемой. Одним из примеров таких поверхностей является график отображения (или его более общие аналоги). Сложность задачи состоит в том, что из-за особенностей неголономной структуры отображение-«график» липшицева в субримановом смысле отображения в общем случае не является регулярным, следовательно, известные теоремы об аппроксимации отображением с «удобными» свойствами (иными словами, субримановым дифференциалом [1]) и вычислении площади неприменимы. Кроме того, в данной работе в прообразе и образе отображения-графика нет групповой структуры (в отличие от [2], где получены базовые свойства графиков над группами Карно), что не позволяет, во-первых, использовать групповую операцию и, во-вторых, требует тонких исследований характера аппроксимации как структур локальными группами Карно, так и самой поверхности-графика адекватными «регулярными» структурами. Изучение «графиков» отображений актуально, в частности, для развития теории минимальных поверхностей на неголономных структурах, имеющей приложения для решения разнообразных практических задач. Самой известной из них является построение моделей визуализации [3–5].

Некоторые свойства параметризованных поверхностей на группах Гейзенберга получены в [6, 7]. На группах Карно авторы работы [8] исследовали способы параметризации и основные свойства некоторых классов поверхностей и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–31063 мол_а) и гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

доказали формулу площади. В [9–11] обобщены некоторые результаты работы [8]. В частности, в [9] вычислена субриманова хаусдорфова размерность и доказана формула площади для одномерных поверхностей уровня на группах Гейзенберга функций $\varphi : \mathbb{H}^1 \to \mathbb{R}^2$, а в [11] получена субриманова хаусдорфова размерность и выведена формула площади для одномерных поверхностей уровня на пространствах Карно — Каратеодори. В [10] формула площади доказана для поверхностей уровня коразмерности 1 на группах Карно. Статья [2] содержит решение новой задачи для класса графиков липшицевых (относительно субримановых метрик) отображений, определенных на группах Карно. В частности, в ней изучены свойства минимальных поверхностей, которые могут быть графиками в $D \times \mathbb{R}$, где D — область в группе Карно $\mathbb{G}$, липшицевых отображений $\varphi : D \to \mathbb{R}$. Подчеркнем, что трехмерные группы Ли с левоинвариантной субримановой структурой в общем случае не являются группами Карно. Такие структуры полностью классифицированы и описаны в [12].

Отсутствие структуры группы Карно является принципиальным отличием задачи, решаемой в данной работе, от всех рассмотренных ранее. Из-за отсутствия групповой операции мы не всегда можем вычислять координаты одной точки относительно другой; кроме того, при выводе формулы площади требуется тонкий анализ аппроксимируемости поверхности-образа графика регулярными поверхностями, который не требовался для случая отображений групп Карно. Следовательно, методы, развитые в [2], к решаемой задаче либо неприменимы, либо требуют глубокой модернизации.

Для упрощения технических деталей мы рассматриваем графики отображений трехмерных многообразий Карно, принадлежащих классу C^1_H, т. е. производные которых вдоль горизонтальных векторных полей непрерывны. Этот класс является субримановым аналогом класса C^1. Однако для отображений класса C^1_H производные вдоль полей степени, большей единицы, могут не существовать, поэтому методы исследования классических отображений класса C^1 в субримановом случае использовать нельзя.

1. Предварительные сведения

Определение 1 ([13], ср. [14–16]). Фиксируем связное риманово C^∞-многообразие $\mathbb{M}$ топологической размерности N. Многообразие $\mathbb{M}$ называется *пространством Карно — Каратеодори*, если в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ существует фильтрация $H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq \ldots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \ldots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$ подрасслоениями такая, что для каждой точки $p \in \mathbb{M}$ найдется окрестность $U \subset \mathbb{M}$, $U \ni p$, с набором C^1-гладких базисных полей $X_1, \ldots, X_N$, обладающих следующими свойствами.

1. Во всякой точке $v \in U$ подпространство

$$H_i\mathbb{M}(v) = H_i(v) = \operatorname{span}\{X_1(v), \ldots, X_{\dim H_i}(v)\} \subset T_v\mathbb{M}$$

имеет размерность $\dim H_i$ независимо от v, $i = 1, \ldots, M$.

2. Справедливы включения $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$, $i, j = 1, \ldots, M-1$, $i + j \leq M$.

Пространство $\mathbb{M}$ называется *многообразием Карно*, если в дополнение к свойствам 1, 2 выполнено свойство

3. $H_{j+1} = \operatorname{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \ldots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \left[\frac{j+1}{2}\right]$, $j = 1, \ldots, M-1$.

Подрасслоение $H\mathbb{M}$ называется *горизонтальным*, число M — *глубиной* $\mathbb{M}$.

Степень поля $\deg X_k$ равна $\min\{m \mid X_k \in H_m\}$, $k = 1, \ldots, N$.

Замечание 2. Из условия 2 определения 1 следует, что

$$[X_i, X_j](v) = \sum_{k:\, \deg X_k \le \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(v) X_k(v), \quad v \in \mathscr{U},\ i, j = 1, \dots, N. \tag{1}$$

Описание 3. Мы исследуем поверхности-графики над пространствами Карно — Каратеодори $\mathbb{M}$ глубины $M = 2$, размерности $N = 3$ с базисными полями $\{X_1, X_2, X_4\}$, горизонтальное подрасслоение которых состоит из двух векторных полей X_1 и X_2. Мы изучаем модельный случай и считаем, что эти поля достаточно гладкие, и полагаем без ограничения общности, что $\mathbb{M}$ совпадает как множество точек с $\mathbb{R}^3$. Иными словами, рассмотрения носят локальный характер.

Предположим, что $\mathbb{M} \subset \widetilde{\mathbb{M}}$, где $\widetilde{\mathbb{M}}$ — пространство Карно — Каратеодори размерности 4 с достаточно гладкими базисными полями $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, причем $\widetilde{\mathbb{M}}$ совпадает с $\mathbb{R}^4$ как множество точек, поля X_1, X_2 и X_3 горизонтальны, причем поле X_3 таково, что

1) $[X_3, X_4] = 0$ всюду на $\widetilde{\mathbb{M}}$;

2) $[X_3, [X_1, X_3]] = 0$ и $[X_3, [X_2, X_3]] = 0$ всюду на $\widetilde{\mathbb{M}}$.

Одним из простейших примеров таких пространств $\mathbb{M}$ и $\widetilde{\mathbb{M}}$ является случай, когда поля X_1, X_2, X_4 зависят только от переменных x_1, x_2, x_4 на $\mathbb{M}$, а поле X_3 совпадает с ∂_{x_3}. Еще один пример — случай, когда $\widetilde{\mathbb{M}}$ является двуступенчатой группой Карно с горизонтальными векторными полями X_1, X_2, X_3.

Приведем более сложный

Пример 4. Пусть поле X_3 зависит только от переменной x_3, т. е. имеет вид $X_3 = a_{33}(x_3)\partial_{x_3}$, а поля X_1, X_2 и X_4 на $\mathbb{M}$ зависят только от x_1, x_2 и x_4. Продолжим поля X_1 и X_2 с $\mathbb{M}$ на $\widetilde{\mathbb{M}}$ следующим образом: если

$$X_i(x_1, x_2, x_4) = a_{i1}(x_1, x_2, x_4)\partial_{x_1} + a_{i2}(x_1, x_2, x_4)\partial_{x_2} + a_{i4}(x_1, x_2, x_4)\partial_{x_4},$$

то положим

$$X_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{i1}(x_1, x_2, x_4)k_{i1}(x_3)\partial_{x_1} + a_{i2}(x_1, x_2, x_4)k_{i2}(x_3)\partial_{x_2} + a_{i4}(x_1, x_2, x_4)k_{i4}(x_3)\partial_{x_4},$$

где величины $a_{33}(x_3)\frac{dk_{ij}(x_3)}{dx_3}$ не зависят от x_3, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 4$, а поле X_4 оставим без изменений. Тогда получим $[X_3, X_4] = 0$; коммутаторы $[X_1, X_3]$ и $[X_2, X_3]$ не будут зависеть от переменной x_3 (но в общем случае не будут нулевыми), поэтому всюду на $\widetilde{\mathbb{M}}$ будет справедливо $[X_3, [X_1, X_3]] = 0$ и $[X_3, [X_2, X_3]] = 0$.

Введем понятие графика отображения.

Определение 5. Пусть $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. Определим *отображение-график* $\varphi_\Gamma : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ следующим образом:

$$\mathbb{M} \ni x \mapsto \exp\bigl(\varphi(x)X_3\bigr)(x).$$

Предположение 6. *Предполагаем, что φ принадлежит классу C^1_H, т. е. горизонтальные производные $X_1\varphi$ и $X_2\varphi$ отображения φ непрерывны. Кроме того, базисные поля таковы, что все значения экспоненциальных отображений, используемых в статье, определены корректно. Отметим, что в этом случае не требуется глобальной определенности таких отображений, а область допустимых значений параметра t при определении соответствующей однопараметрической группы диффеоморфизмов определяется значениями $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{M}$.*

Далее нам понадобятся следующие определения и результаты.

Определение 7. Пусть $\mathbb{M}$ — произвольное пространство Карно — Каратеодори топологической размерности N с базисными полями $\{X_i\}_{i=1}^N$, $u, v \in \mathbb{M}$, и $v = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^N v_i X_i\Bigr)(u)$. Набор $(v_1, \dots, v_N)$ называется *координатами первого рода* точки v относительно u. Отображение, определенное при фиксированной точке u как

$$(v_1, \dots, v_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u),$$

при условии, что правая часть имеет смысл, будем обозначать символом θ_u.

Замечание 8. Отображение θ_u используется для локальных рассуждений и достаточно малых значений $(v_1, \dots, v_N)$, поэтому можно считать, что оно всегда корректно определено.

Теорема 9 [16]. *Пусть $\mathbb{M}$ — пространство Карно — Каратеодори, базисные векторные поля которого принадлежат классу C^1. Фиксируем $u \in \mathbb{M}$. Коэффициенты $\{c_{ijk}(u) \mid i, j, k : \deg X_i + \deg X_j = \deg X_k\}$ из соотношения* (1) *определяют структуру нильпотентной градуированной алгебры Ли.*

Алгебра Ли из теоремы 9 реализуется как набор полей $\bigl\{\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'\bigr\}_{i=1}^N$ в окрестности нуля в $\mathbb{R}^N$ таких, что $\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'(0) = e_i$, $i = 1, \dots, N$, и отображение

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'\right)$$

тождественно. На соответствующей этой алгебре Ли группе Ли вводится групповая операция таким образом, что эти поля левоинвариантны относительно нее. Далее, поля $\bigl\{\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'\bigr\}_{i=1}^N$ (и групповая операция) переносятся с помощью отображения θ_u на окрестность точки $u \in \mathbb{M}$ таким образом, что θ_u является (локальным) групповым изоморфизмом.

Определение 10. Окрестность точки $u \in \mathbb{M}$ пространства Карно — Каратеодори $\mathbb{M}$ с набором базисных векторных полей $\bigl\{\widehat{X}_i^u\bigr\}_{i=1}^N$, где $\widehat{X}_i^u = D\theta_u\bigl\langle\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'\bigr\rangle$, $i = 1, \dots, N$, и (локальной) групповой операцией называется *локальной однородной группой* к $\mathbb{M}$ в точке u и обозначается символом $\mathscr{G}^u\mathbb{M}$.

В статье будем использовать следующую функцию для измерения расстояний.

Определение 11. Пусть $\mathbb{M}$ — произвольное пространство Карно — Каратеодори с базисными полями $\{X_i\}_{i=1}^N$, $w, v \in \mathbb{M}$, и $v = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^N v_i X_i\Bigr)(w)$. Тогда

$$d_\infty(w, v) = \max_{i=1,\dots,N}\{|v_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}.$$

Значение $d_\infty^u(w, v)$ определяется аналогично с использованием базиса $\bigl\{\widehat{X}_i^u\bigr\}_{i=1}^N$ вместо $\{X_i\}_{i=1}^N$.

Известно (см., например, [14, 17]), что d_∞ является квазиметрикой, т. е. локально верно обобщенное неравенство треугольника: для всякой точки $p \in \mathbb{M}$ существуют окрестность $U \ni p$, $U \Subset \mathbb{M}$, и константа $c = c(U)$ такие, что для произвольных точек $u, v, w \in U$ верно

$$d_\infty(u, v) \le c(d_\infty(u, w) + d_\infty(w, v)).$$

Напомним понятие субримановой дифференцируемости, или hc-дифференцируемости.

Определение 12 [1]. Отображение $\varphi : U \to \widetilde{\mathbb{L}}$, $U \subset \mathbb{L}$, где $\mathbb{L}$ и $\widetilde{\mathbb{L}}$ — произвольные пространства Карно — Каратеодори, *hc-дифференцируемо в точке* $x \in U$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_x : \mathscr{G}^x\mathbb{L} \to \mathscr{G}^{\varphi(x)}\widetilde{\mathbb{L}}$ локальных однородных групп Карно такой, что

$$d_\infty(\varphi(w), \mathscr{L}_x\langle w\rangle) = o(d_\infty(x, w)), \quad U \ni w \to x.$$

hc-Дифференциал $\mathscr{L}_x$ в точке x обозначается символом $\widehat{D}\varphi(x)$.

Теорема 13 [1]. *Пусть $\mathbb{L}$ — многообразие Карно, $D \subset \mathbb{L}$ — открытое множество, $\widetilde{\mathbb{L}}$ — пространство Карно — Каратеодори и $\varphi \in C^1_H(D, \widetilde{\mathbb{L}})$. Тогда φ непрерывно hc-дифференцируемо всюду на D.*

2. Основные результаты

Введем понятие полиномиальной hc-дифференцируемости, обобщающее для случая трехмерных групп определение, данное в [2].

Определение 14. Пусть $\mathbb{L}, \widetilde{\mathbb{L}}$ — произвольные пространства Карно — Каратеодори, $E \subset \mathbb{L}$, $\varphi : E \to \widetilde{\mathbb{L}}$, а функция $\widetilde{\mathfrak{d}} : \varphi(E) \times \widetilde{\mathbb{L}} \to \mathbb{R}_+$ является квазиметрикой. Отображение φ полиномиально hc-дифференцируемо в точке $x \in E$ относительно $\widetilde{\mathfrak{d}}$, если существует отображение локальных однородных групп $\mathscr{L}_x : \mathscr{G}^x\mathbb{L} \to \mathscr{G}^{\varphi(x)}\widetilde{\mathbb{L}}$ такое, что

1) $\widetilde{\mathfrak{d}}(\varphi(w), \mathscr{L}_x\langle w\rangle) = o(d_\infty(x, w))$, $E \ni w \to x$, $w = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} w_i X_i\right)(x)$;

2) $\mathscr{L}_x(w) = \theta_{\varphi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w)$; L_x — оператор с полиномиальными по $\{w_i\}_{i=1}^N$ коэффициентами.

Сформулируем и докажем первый результат исследования.

Теорема 15. *Пусть $D \subset \mathbb{M}$ — открытое множество и $\varphi \in C^1_H(D, \mathbb{R})$. Тогда в условиях описания 3 отображение-график $\varphi_\Gamma : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ непрерывно полиномиально hc-дифференцируемо всюду.*

Доказательство. Пусть $x, y \in D$, $y = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{4} y_i X_i\right)(x)$, $y_3 = 0$ и $d_\infty(x, y) = \varepsilon$. Выразим координаты точки $\varphi_\Gamma(y)$ относительно $\varphi_\Gamma(x)$. Так как базисные поля достаточно гладкие, воспользуемся формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа. Поскольку

$$x = \exp\big(-\varphi(x)X_3\big)(\varphi_\Gamma(x)) \quad \text{и} \quad y = \exp\left(\sum_{i=1}^{4} y_i X_i\right)(x),$$

в силу требований на поле X_3 и его коммутаторы получаем

$$y = \exp(X_{\varphi_\Gamma(x),y})(\varphi_\Gamma(x)),$$

где

$$X_{\varphi_\Gamma(x),y} = \sum_{i=1}^{4} y_i X_i - \varphi(x)X_3 + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{4} y_i X_i, \varphi(x)X_3\right] + \frac{1}{12}\left[\left[\sum_{i=1}^{4} y_i X_i, \varphi(x)X_3\right], \sum_{i=1}^{4} y_i X_i\right] + O(\varepsilon^3).$$

Вывод последней оценки дословно повторяет доказательство теоремы 15.4.1 из [18] с учетом того, что все коммутаторы из пяти и более полей, содержащие менее трех раз поле $\sum\limits_{i=1}^{4} y_i X_i$, нулевые. Кроме того, из тождества Якоби, примененного к полям X_3, $\sum\limits_{i=1}^{4} y_i X_i$ и $\left[\sum\limits_{i=1}^{4} y_i X_i, \varphi(x) X_3\right]$, следует, что

$$\left[X, \left[\sum_{i=1}^{4} y_i X_i, \left[\sum_{i=1}^{4} y_i X_i, \varphi(x) X_3\right]\right]\right] = 0.$$

Преобразуем коммутаторы с учетом условий на X_3:

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{4} y_i X_i, \varphi(x) X_3\right] &= \sum_{i=1}^{2} y_i \varphi(x)[X_i, X_3] = \varphi(x) \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} y_i c_{i3j} X_j \\ &= \sum_{j=1}^{4} \varphi(x)(y_1 c_{13j} + y_2 c_{23j}) X_j;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[\left[\sum_{i=1}^{4} y_i X_i, \varphi(x) X_3\right], \sum_{i=1}^{4} y_i X_i\right] = \left[\sum_{j=1}^{4} \varphi(x)(y_1 c_{13j} + y_2 c_{23j}) X_j, \sum_{i=1}^{4} y_i X_i\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{4} \varphi(x) y_i (y_1 c_{13j} + y_2 c_{23j})[X_j, X_i] - \sum_{i,j=1}^{4} y_i \varphi(x)(X_i(y_1 c_{13j} + y_2 c_{23j})) X_j \\ &= \varphi(x) \sum_{m,i,j=1}^{4} y_i c_{jim}(y_1 c_{13j} + y_2 c_{23j}) X_m \\ &\quad - \varphi(x) \sum_{m=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{4} y_i (X_i(y_1 c_{13m} + y_2 c_{23m}))\right) X_m \\ &= \varphi(x) \sum_{m=1}^{4} \left(\sum_{i,j=1}^{4} y_i c_{jim}(y_1 c_{13j} + y_2 c_{23j}) - y_i (X_i(y_1 c_{13m} + y_2 c_{23m}))\right) X_m.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{4} y_i c_{jim}(y_1 c_{13j} + y_2 c_{23j}) - y_i (X_i(y_1 c_{13m} + y_2 c_{23m})) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{4} y_i c_{jim}(y_1 c_{13j} + y_2 c_{23j}) - y_i (X_i(y_1 c_{13m} + y_2 c_{23m}))\right) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$X_{\varphi_\Gamma(x),y} = \sum_{i=1}^{4} y_i X_i - \varphi(x) X_3 + \varphi(x) \sum_{m=1}^{4} a_m X_m + O(\varepsilon^3), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}a_m &= \frac{1}{2}(y_1 c_{13m} + y_2 c_{23m}) \\ &\quad + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{4} y_i c_{jim}(y_1 c_{13j} + y_2 c_{23j}) - y_i (X_i(y_1 c_{13m} + y_2 c_{23m}))\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично предыдущему случаю применим формулу Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа и схему доказательства теоремы 15.4.1 из [18] к полям $X_{\varphi_\Gamma(x),y}$ и $\varphi(y)X_3$. Получим

$$\varphi_\Gamma(y) = \exp\bigl(X_{\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y)}\bigr)(\varphi_\Gamma(x)),$$

где с учетом тождества Якоби для полей X_3, $X_{\varphi_\Gamma(x),y}$ и $[X_3, X_{\varphi_\Gamma(x),y}]$ имеем

$$\begin{aligned}
X_{\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y)} &= X_{\varphi_\Gamma(x),y} + \varphi(y)X_3 + \frac{1}{2}[X_{\varphi_\Gamma(x),y}, \varphi(y)X_3] \\
&\quad + \frac{1}{12}[X_{\varphi_\Gamma(x),y}, [X_{\varphi_\Gamma(x),y}, \varphi(y)X_3]] + O(\varepsilon^3) \\
&= (\varphi(y) - \varphi(x))X_3 + \sum_{i=1}^{4} y_i X_i + \varphi(x)\sum_{m=1}^{4} a_m X_m + \frac{1}{2}[X_{\varphi_\Gamma(x),y}, \varphi(y)X_3] \\
&\quad + \frac{1}{12}[X_{\varphi_\Gamma(x),y}, [X_{\varphi_\Gamma(x),y}, \varphi(y)X_3]] + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Учитывая (2), выводим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[X_{\varphi_\Gamma(x),y}, \varphi(y)X_3] - \frac{1}{12}[[X_{\varphi_\Gamma(x),y}, \varphi(y)X_3], X_{\varphi_\Gamma(x),y}] \\
&\quad = \varphi(y)\sum_{m=1}^{4} \tilde{a}_m X_m + \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{2}\left[\sum_{m=1}^{4} a_m X_m, X_3\right] \\
&\qquad - \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{12}\left[\left[\sum_{m=1}^{4} a_m X_m, X_3\right], X_{\varphi_\Gamma(x),y}\right] \\
&\qquad - \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{12}\left[\left[\sum_{i=1}^{2} y_i X_i, X_3\right], \sum_{m=1}^{4} a_m X_m\right] + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

где $\tilde{a}_m = \frac{1}{2}(y_1 c_{13m} + y_2 c_{23m}) - \frac{1}{12}\sum\limits_{i=1}^{2}\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{4} y_i c_{jim}(y_1 c_{13j} + y_2 c_{23j}) - y_i(X_i(y_1 c_{13m} + y_2 c_{23m}))\Bigr)$. Так как φ липшицево, $|\varphi(y) - \varphi(x)| = O(\varepsilon)$, поэтому из предположений на коммутаторы поля X_3 и соотношения (3) вытекает

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[X_{\varphi_\Gamma(x),y}, \varphi(y)X_3] - \frac{1}{12}[[X_{\varphi_\Gamma(x),y}, \varphi(y)X_3], X_{\varphi_\Gamma(x),y}] \\
&\quad = \varphi(y)\sum_{m=1}^{4} \tilde{a}_m X_m + \frac{\varphi(x)(\varphi(x) + \widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)}{2}\left[\sum_{m=1}^{4} a_m X_m, X_3\right] \\
&\qquad - \frac{\varphi(x)^2}{12}\left[\left[\sum_{m=1}^{4} a_m X_m, X_3\right], X_{\varphi_\Gamma(x),y}\right] \\
&\qquad - \frac{\varphi(x)^2}{12}\left[\left[\sum_{i=1}^{2} y_i X_i, X_3\right], \sum_{m=1}^{4} a_m X_m\right] + o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$X_{\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y)} = (\varphi(y) - \varphi(x))X_3 + \sum_{i=1}^{4} y_i X_i + \widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle \sum_{m=1}^{4} \tilde{a}_m X_m$$

$$+\varphi(x)\sum_{m=1}^{4}(a_m+\tilde a_m)X_m$$
$$+\frac{\varphi(x)(\varphi(x)+\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)}{2}\left[\sum_{m=1}^{4}a_mX_m,X_3\right]$$
$$-\frac{\varphi(x)^2}{12}\left[\left[\sum_{m=1}^{4}a_mX_m,X_3\right],X_{\varphi_\Gamma(x),y}\right]$$
$$-\frac{\varphi(x)^2}{12}\left[\left[\sum_{i=1}^{2}y_iX_i,X_3\right],\sum_{m=1}^{4}a_mX_m\right]+o(\varepsilon^2).$$

Заметим, что

$$\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle\sum_{m=1}^{4}\tilde a_mX_m+\frac{\varphi(x)\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle}{2}\left[\sum_{m=1}^{4}a_mX_m,X_3\right]$$
$$-\frac{\varphi(x)^2}{12}\left[\left[\sum_{m=1}^{4}a_mX_m,X_3\right],X_{\varphi_\Gamma(x),y}\right]$$
$$-\frac{\varphi(x)^2}{12}\left[\left[\sum_{i=1}^{2}y_iX_i,X_3\right],\sum_{m=1}^{4}a_mX_m\right]=\sum_{k=1}^{4}b_kX_k,$$

где b_k — полином степени 3 от y_1 и y_2, не содержащий первой и нулевой степеней, поэтому $|b_k|=O(\varepsilon^2)$, $k=1,\dots,4$. Отсюда получаем

$$X_{\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y)}=(\varphi(y)-\varphi(x))X_3+\sum_{i=1}^{4}y_iX_i+\varphi(x)\sum_{m=1}^{4}(a_m+\tilde a_m)X_m$$
$$+\frac{\varphi(x)^2}{2}\left[\sum_{m=1}^{4}a_mX_m,X_3\right]+\sum_{k=1}^{4}b_kX_k+o(\varepsilon^2).$$

В силу соотношения (3) выводим

$$X_{\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y)}=(\varphi(y)-\varphi(x))X_3$$
$$+\sum_{i=1}^{4}y_iX_i+\varphi(x)\sum_{m=1}^{4}(y_1c_{13m}+y_2c_{23m})X_m$$
$$+\frac{\varphi(x)^2}{4}\left[\sum_{m=1}^{4}(y_1c_{13m}+y_2c_{23m})X_m,X_3\right]+\sum_{k=1}^{4}c_kX_k+o(\varepsilon^2),$$

где c_k — полином степени 3 от y_1 и y_2, не содержащий первой и нулевой степеней, поэтому $|c_k|=O(\varepsilon^2)$, $k=1,\dots,4$. Далее, имеем

$$\left[\sum_{m=1}^{4}(y_1c_{13m}+y_2c_{23m})X_m,X_3\right]=[[y_1X_1+y_2X_2,X_3],X_3]=0.$$

Аналогично получаем $\left[\sum\limits_{m=1}^{4}a_mX_m,X_3\right]=0$, поэтому $c_k=b_k$, $k=1,\dots,4$. Из полученных выражений видно, что при полях второй степени есть коэффициенты, сравнимые с ε, но не с ε^2. Построим вспомогательный базис на $\widetilde{\mathbb{M}}$:

$${}^x\widetilde{X}_1=X_1+\varphi(x)\sum_{m=1}^{4}c_{13m}X_m,$$

$$
\begin{aligned}
{}^x\widetilde{X}_2 &= X_2 + \varphi(x)\sum_{m=1}^{4} c_{23m}X_m,\\
{}^x\widetilde{X}_3 &= X_3,\\
{}^x\widetilde{X}_4 &= X_4.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
X_{\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y)} = (\varphi(y)-\varphi(x))({}^x\widetilde{X}_3) + \sum_{i=1}^{4} y_i({}^x\widetilde{X}_i) + \sum_{k=1}^{4}\tilde{b}_k^x({}^x\widetilde{X}_k) + o(\varepsilon^2),
$$

где для $\tilde{b}_k^x$ на достаточно малой окрестности справедливы те же оценки, что и для b_k: $\bigl|\tilde{b}_k^x\bigr| = O(\varepsilon^2)$, $k=1,\dots,4$.

Для полей $\{{}^x\widetilde{X}_k\}_{k=1}^4$ запишем соотношения вида (1) в точке $\varphi_\Gamma(x)$, применим теорему 1 и получим набор полей $\bigl\{{}^x\widehat{X}_k^{\varphi_\Gamma(x)}\bigr\}_{k=1}^4$, составляющих базис нильпотентной градуированной алгебры Ли. Тогда в силу результатов в [19], методов из [17] и того, что слагаемое $o(\varepsilon^2)$ не будет влиять на оценку, получаем

$$
{}^x\hat{d}_\infty^{\varphi_\Gamma(x)}\Biggl(\varphi_\Gamma(y), \exp\Biggl((\varphi(y)-\varphi(x))\bigl({}^x\widehat{X}_3^{\varphi_\Gamma(x)}\bigr) + \sum_{i=1}^{4} y_i\bigl({}^x\widehat{X}_i^{\varphi_\Gamma(x)}\bigr) + \sum_{k=1}^{4}\tilde{b}_k^x\bigl({}^x\widehat{X}_k^{\varphi_\Gamma(x)}\bigr)\Biggr)(\varphi_\Gamma(x))\Biggr) = o(d_\infty(x,y)),
$$

где ${}^x\hat{d}_\infty^{\varphi_\Gamma(x)}$ — квазиметрика d_∞, построенная по базису $\bigl\{{}^x\widehat{X}_k^{\varphi_\Gamma(x)}\bigr\}_{k=1}^4$. При замене полиномов $\tilde{b}_k^x$ полиномами $\hat{b}_k^x$, где значения коэффициентов при y_1 и y_2 положены равными значениям соответствующих коэффициентов полиномов $\tilde{b}_k^x$ в точке $\varphi_\Gamma(x)$, оценка будет также равна $o(d_\infty(x,y))$ (достаточно применить оценку на $\bigl|\tilde{b}_k^x\bigr|$, непрерывность коэффициентов, оценку длины интегральной линии поля $X_{\varphi_\Gamma(x),\varphi_\Gamma(y)}$, которая сравнима с ε, и групповую операцию). Непосредственными вычислениями с помощью групповой операции проверяется, что оценка расстояния ${}^x\hat{d}_\infty^{\varphi_\Gamma(x)}$ не изменится, если вместо величины $\varphi(y)-\varphi(x)$ рассмотреть $\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle$, а также не учитывать слагаемое $\sum\limits_{k=1}^{3}\tilde{b}_k^x\bigl({}^x\widehat{X}_k^{\varphi_\Gamma(x)}\bigr)$. Применяя локальную аппроксимационную теорему, получаем, что и

$$
{}^x d_\infty\Biggl(\varphi_\Gamma(y), \exp\Biggl((\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)\bigl({}^x\widehat{X}_3^{\varphi_\Gamma(x)}\bigr) + \sum_{i=1}^{4} y_i\bigl({}^x\widehat{X}_i^{\varphi_\Gamma(x)}\bigr) + \hat{b}_4^x\bigl({}^x\widehat{X}_4^{\varphi_\Gamma(x)}\bigr)\Biggr)(\varphi_\Gamma(x))\Biggr) = o(d_\infty(x,y)),
$$

где ${}^x d_\infty$ — квазиметрика d_∞, построенная по базису $\{{}^x\widetilde{X}_k\}_{k=1}^4$. Таким образом, построили полиномиальный дифференциал $\widehat{D}_P\varphi(x)$, сопоставляющий в нормальных координатах точке (y_1,y_2,y_4) точку

$$
\bigl(y_1, y_2, \widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle, y_4 + \hat{b}_4^x\bigr). \tag{4}
$$

Кроме того, величина $o(1)$ на достаточно малых компактных окрестностях равномерна, так как все величины $o(1)$, встречающиеся в доказательстве (в формуле Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа, определении hc-дифференцируемости, непрерывности структурных функций $\{c_{ijk}\}_{i,j,k}$ и результате о расхождении кривых [19]), обладают таким свойством. Непрерывность полиномиального дифференциала следует из непрерывности hc-дифференциала $\widehat{D}\varphi$, а также структурных функций $\{c_{ijk}\}_{i,j,k}$ и их производных. Теорема доказана.

Таким образом, исходя из доказательства теоремы можно дать следующее

Определение 16. В условиях описания 3 для $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ построим новый базис на $\widetilde{\mathbb{M}}$ в окрестности точки $\varphi_\Gamma(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^x\widetilde{X}_1 &= X_1 + \varphi(x) \sum_{m=1}^{4} c_{13m} X_m, \\ {}^x\widetilde{X}_2 &= X_2 + \varphi(x) \sum_{m=1}^{4} c_{23m} X_m, \\ {}^x\widetilde{X}_3 &= X_3, \\ {}^x\widetilde{X}_4 &= X_4. \end{aligned}$$

Набор $\{{}^x\widetilde{X}_k\}_{k=1}^4$ называется *адаптированным*, или *внутренним*, *базисом* в точке $\varphi_\Gamma(x)$.

Напомним определение квазирасстояния в новом базисе.

Определение 17. Если $y, z \in \widetilde{\mathbb{M}}$ и $y = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{4} y_k({}^x\widetilde{X}_k)\right)(z)$, то

$${}^x d_\infty(y, z) = \max_{k=1,\dots,4} \{|y_k|^{\frac{1}{\deg X_k}}\}.$$

Если $\{{}^x\widehat{X}_k^s\}_{k=1}^4$ — базис алгебры Ли векторных полей, определенных значениями структурных функций базиса $\{{}^x\widetilde{X}_k\}_{k=1}^4$ в точке s, и $w = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{4} w_k({}^x\widehat{X}_k^s)\right)(v)$, то

$${}^x\hat{d}_\infty^s(w, v) = \max_{k=1,\dots,4} \{|w_k|^{\frac{1}{\deg X_k}}\}.$$

Далее для вычисления площади поверхности-графика будем использовать следующие квазиметрики, эквивалентные введенным в определении 17.

Определение 18. Если $y, z \in \widetilde{\mathbb{M}}$ и $y = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{4} y_k({}^x\widetilde{X}_k)\right)(z)$, то

$${}^x d_2(y, z) = \max\left\{ \left(\sum_{k=1}^{3} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, |y_4|^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Положим шар в квазиметрике d_2^x равным

$${}^x \operatorname{Box}_2(y, r) = \{z \in \widetilde{\mathbb{M}} : {}^x d_2(y, z) < r\}.$$

Если $\{{}^x\widehat{X}_k^s\}_{k=1}^4$ — базис алгебры Ли векторных полей, определенных значениями структурных функций базиса $\{{}^x\widetilde{X}_k\}_{k=1}^4$ в точке s, и

$$w = \exp\left(\sum_{i=1}^{4} w_k ({}^x\widehat{X}_k^s) \right)(v),$$

то

$$
{}^{x}\hat{d}_2^s(w,v)=\max\biggl\{\biggl(\sum_{k=1}^{3}w_k^2\biggr)^{\frac{1}{2}},|w_4|^{\frac{1}{2}}\biggr\}.
$$

Положим шар в квазиметрике ${}^{x}\hat{d}_2^s$ равным

$$
{}^{x}\widehat{\mathrm{Box}}_2^s(w,r)=\bigl\{v\in\widetilde{\mathbb{M}}:{}^{x}\hat{d}_2^s(w,v)<r\bigr\}.
$$

Построим адаптированную *внутреннюю* меру, согласованную с этим базисом.

Определение 19. В условиях описания 3 пусть $D\subset\mathbb{M}$ — открытое множество и $\varphi:D\to\mathbb{R}$. Определим значение *адаптированной*, или *внутренней*, *меры* $\mathscr{H}_\Gamma^4$ для подмножеств поверхности-графика $\varphi_\Gamma(D)$ как

$$
\mathscr{H}_\Gamma^4(A)=2\omega_2\lim_{\delta\to 0}\Bigl\{\sum_{i\in\mathbb{N}}r_i^4:\bigcup_{i\in\mathbb{N}}{}^{\varphi_\Gamma^{-1}(x_i)}\mathrm{Box}_2(x_i,r_i)\supset A,\ x_i\in A,\ r_i<\delta\Bigr\},
$$

где $A\subset\varphi_\Gamma(D)$, и точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества $A\subset\varphi_\Gamma(D)$.

Следующий результат — формула площади для подсчета внутренней меры.

Теорема 20. *Пусть $\mathbb{M}$ — многообразие Карно глубины $M=2$ и размерности $N=3$ с гладкими базисными полями $\{X_1,X_2,X_4\}$, горизонтальное подрасслоение которого состоит из векторных полей X_1 и X_2. Пусть, кроме того, $\mathbb{M}\subset\widetilde{\mathbb{M}}$, где $\widetilde{\mathbb{M}}$ — пространство Карно — Каратеодори размерности 4 с достаточно гладкими базисными полями $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$, причем поля X_1, X_2 и X_3 горизонтальны. Пусть поле X_3 таково, что*

1) $[X_3,X_4]=0$ *всюду на* $\widetilde{\mathbb{M}}$;

2) $[X_3,[X_1,X_3]]=0$ *и* $[X_3,[X_2,X_3]]=0$ *всюду на* $\widetilde{\mathbb{M}}$.

Если $\varphi:D\to\mathbb{R}$ — отображение открытого множества $D\subset\mathbb{M}$ класса C_H^1, то для отображения-графика φ_Γ справедлива следующая формула для вычисления внутренней меры образа:

$$
\int_D\sqrt{1+\langle\widehat{D}\varphi(x),\widehat{D}\varphi(x)\rangle}\,d\mathscr{H}^4(x)=\int_{\varphi_\Gamma(D)}d\mathscr{H}_\Gamma^4(y). \tag{5}
$$

Доказательство. Схема доказательства представляет собой модернизацию вывода формулы площади для графиков над группами Карно из [2]. Определим функцию множества

$$
\Phi:A\mapsto\mathscr{H}_\Gamma^4(\varphi_\Gamma(A\cap D)).
$$

Эта функция абсолютно непрерывна относительно меры на D, а также аддитивна на отдаленных шарах. Так как доказываем локальное свойство, достаточно рассмотреть шары, находящиеся в окрестности $\mathscr{U}\cap D$, $\mathscr{U}\Subset\mathbb{M}$, на которой значение величины $o(1)$ из определения полиномиальной hc-дифференцируемости не превосходит заданного $\varepsilon>0$. Рассмотрим два шара, лежащие в этой окрестности. Пусть x,y — точки, принадлежащие разным шарам. Тогда при действии отображения $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)$ на них, учитывая выражение (4) и то, что $\hat{b}_4^x$ — полином конечной степени, получаем оценку $\bigl|y_4+\hat{b}_4^x\bigr|<Kd_\infty(x,y)$, где величина K конечна и определяется коэффициентами в полиноме $\hat{b}_4^x$. Обратно, рассмотрим

точки $\varphi_\Gamma(x)$ и $\varphi_\Gamma(y)$, лежащие в образах разных шаров, и выразим координаты прообразов при отображении $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)$ точек $\varphi_\Gamma(x)$ и $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle y\rangle$. Из выражения (4) видно, что оценка аналогична:

$$d_2(x,y) \le K\ {}^x d_2(\varphi_\Gamma(x), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle y\rangle).$$

Так как ${}^x d_2$-расстояние между $\varphi_\Gamma(y)$ и $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle y\rangle$ не превосходит $\varepsilon d_2(x,y)$, в силу обобщенного неравенства треугольника имеем

$$^x d_2(\varphi_\Gamma(x), \varphi_\Gamma(y)) \ge K' d_2(x,y), \tag{6}$$

поэтому образы отдаленных шаров будут находиться на положительном расстоянии. Отсюда вытекает аддитивность Φ на отдаленных шарах.

Докажем теперь абсолютную непрерывность Φ относительно меры $\mathscr{H}^4$ на $\mathbb{M}$. Рассмотрим снова окрестность $\mathscr{U} \cap D$, на которой значение величины $o(1)$ из определения полиномиальной hc-дифференцируемости не превосходит заданного $\varepsilon > 0$. Абсолютная непрерывность будет следовать из условия на $\mathscr{U}$, соотношения (4) и того, что $\hat{b}_4^x$ — полином конечной степени переменных y_1 и y_2. Действительно, в силу этих условий и обобщенного неравенства треугольника справедливы соотношения ${}^x d_2(\varphi_\Gamma(x), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle y\rangle) \le L' d_2(x,y)$ и

$$^x d_2(\varphi_\Gamma(x), \varphi_\Gamma(y)) \le L d_2(x,y). \tag{7}$$

Осталось рассмотреть для произвольного множества нулевой меры на $\mathbb{M}$ покрытие из определения функции $\mathscr{H}^4_\delta$, затем каждый шар покрытия заменить шаром, радиус которого увеличен в $\max\{1, 1/L\}$ раз, с центром в точке покрываемого множества. Тогда их образы будут лежать в шарах, радиусы которых сравнимы с радиусами шаров исходного покрытия. Это свойство обеспечивает абсолютную непрерывность Φ.

Таким образом,

$$\Phi(A) = \int\limits_{D\cap A} \Phi'(x)\, d\mathscr{H}^4(x).$$

Покажем, что

$$\Phi'(x) = \sqrt{1 + \langle \widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\varphi(x)\rangle}$$

всюду на D. Для этого фиксируем точку $x \in D$ и $\varepsilon > 0$ и рассмотрим окрестность $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$, $\mathscr{U} \ni x$, на которой величина из определения полиномиальной hc-дифференциуемости не превосходит $\varepsilon > 0$. Пусть $\mathrm{Box}_2(x,r) \subset \mathscr{U}$. Рассмотрим его образ $\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}_2(x,r))$ и покрытие $\{{}^{x_i}\mathrm{Box}_2(\varphi_\Gamma(x_i), r_i)\}_{i\in\mathbb{N}, r_i<\delta}$ для некоторого фиксированного $\delta > 0$.

Заметим, что каждое отображение $y \mapsto \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle y\rangle$, $i \in \mathbb{N}$, является гладким (но не контактным) отображением локальных однородных групп $\mathscr{G}^{x_i}\mathbb{M}$ и $\mathscr{G}^{\varphi_\Gamma(x_i)}_{x_i}\widetilde{\mathbb{M}}$, где $\mathscr{G}^{\varphi_\Gamma(x_i)}_{x_i}\widetilde{\mathbb{M}}$ — локальная группа Карно, построенная по базису $\{{}^{x_i}\widetilde{X}_k\}_{k=1}^4$ в точке $\varphi_\Gamma(x_i)$. Фиксируем точку x_i и перейдем в нормальные координаты относительно $\varphi_\Gamma(x_i)$ (в базисе $\{{}^{x_i}\widetilde{X}_k\}_{k=1}^4$, см. [16]). Заметим [16], что

$$^{x_i}\mathrm{Box}_2(\varphi_\Gamma(x_i), r_i) = {}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}}_2^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i), r_i).$$

Тогда непосредственными рассуждениями получается, что в нормальных координатах мера множества $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle D\rangle \cap {}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}}_2^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i), r_i)$ равна $2\omega_2 r_i^4$ (см., например, [16]). Иными словами,

$$2\omega_2 r_i^4 = \frac{\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle D\rangle \cap {}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}}_2^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i), r_i)\big)}{|{}^{x_i}\tilde{g}(\varphi_\Gamma(x_i))|}(1 + o(1)), \tag{8}$$

где символом ${}^{x_i}\tilde{g}$ обозначен риманов тензор в базисе $\{{}^{x_i}\widetilde{X}_k\}_{k=1}^4$, ограниченный на $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle D\rangle$, мера $\mathscr{H}^3$ вычисляется в этом же базисе и $o(1)\to 0$ при $r_i\to 0$ равномерно на $\mathscr{U}$.

В силу справедливости соотношений вида (8) для всех $i\in\mathbb{N}$ и выражений полей $\{{}^{x_i}\widetilde{X}_k\}_{k=1}^4$ через нильпотентизированные [19] имеем

$$2\omega_2\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^4=(1+o(1))\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{\mathscr{H}_i^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle D\rangle\cap{}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}_2}^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i),r_i)\big)}{|{}^{x_i}\tilde{g}(\varphi_\Gamma(x_i))|},$$

где мера $\mathscr{H}_i^3$ вычисляется в базисе $\big\{{}^{x_i}\widehat{X}_k^{\varphi_\Gamma(x_i)}\big\}_{k=1}^4$, $i\in\mathbb{N}$. Ввиду (4) якобиан отображения $y\mapsto\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle y\rangle$ в точке x_i равен $\sqrt{1+\langle\widehat{D}\varphi(x_i),\widehat{D}\varphi(x_i)\rangle}\,\frac{|{}^{x_i}\tilde{g}(\varphi_\Gamma(x_i))|}{|g(x_i)|}$, поэтому

$$\begin{aligned}2\omega_2\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^4&=(1+o(1))\\&\times\sum_{i\in\mathbb{N}}\sqrt{1+\langle\widehat{D}\varphi(x_i),\widehat{D}\varphi(x_i)\rangle}\,\frac{\widehat{\mathscr{H}}_{x_i}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\big({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}_2}^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i),r_i)\big)\big)}{|g(x_i)|},\end{aligned}$$

где мера $\widehat{\mathscr{H}}_{x_i}^3$ вычисляется в базисе $\big\{\widehat{X}_k^{x_i}\big\}_{k=1}^3$. Так как полиномиальный hc-дифференциал $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(y)$ непрерывен по $y\in D$, в силу результатов из [19] правую часть последнего соотношения можно представить в виде

$$\begin{aligned}&(1+o(1))\sqrt{1+\langle\widehat{D}\varphi(x),\widehat{D}\varphi(x)\rangle}\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{\widehat{\mathscr{H}}_{x_i}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\big({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}_2}^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i),r_i)\big)\big)}{|g(x_i)|}\\&=(1+o(1))\frac{\sqrt{1+\langle\widehat{D}\varphi(x),\widehat{D}\varphi(x)\rangle}}{|g(x)|}\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\big({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}_2}^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i),r_i)\big)\big),\end{aligned}$$

где $o(1)\to 0$ при $r_i\to 0$, $i\in\mathbb{N}$. Таким образом, значение суммы $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} r_i^4$ близко к точной нижней грани тогда и только тогда, когда значение

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\big({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}_2}^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i),r_i)\big)\big)$$

близко к точной нижней грани. Покажем, что эта точная нижняя грань равна $\mathscr{H}^3(\mathrm{Box}_2(x,r))$ с точностью до множителя $1+o(1)$, где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на $\mathscr{U}$.

Фиксируем $i\in\mathbb{N}$ и сравним прообразы $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\big({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}_2}^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i),r_i)\big)$ и $\varphi_\Gamma^{-1}\big({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}_2}^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i),r_i)\big)$. Пусть $y\in\varphi_\Gamma^{-1}\big({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}_2}^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i),r_i)\big)$. В силу (4)

$${}^{x_i}d_2(\varphi_\Gamma(y),\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle y\rangle)=o(d_2(x_i,y)).$$

Ввиду оценок (6), (7), которые верны и для φ_Γ, и для $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)$, имеем $d_2(x_i,y)\le\frac{1}{K'}r_i$. Тогда с учетом обобщенного неравенства треугольника получаем, что

$$y\in\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\big({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}_2}^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i),r_i(1+o(1)))\big),$$

где $o(1)\to 0$ при $r_i\to 0$.

Пусть теперь

$$y \in \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\bigl({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}}_2^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i), r_i)\bigr)$$

(напомним, что $o(1)$ из определения полиномиальной hc-дифференцируемости не превосходит ε; предположим также без ограничения общности, что $o(1)$ из локальной аппроксимационной теоремы не превосходит ε). Покажем, что ${}^{x_i}d_\infty(\varphi_\Gamma(x_i), \varphi_\Gamma(y)) < r_i$ с точностью до слагаемого $O(\varepsilon)\cdot r_i$. В силу обобщенного неравенства треугольника на локальных группах и локальной аппроксимационной теоремы имеем ${}^{x_i}d_2(\varphi_\Gamma(x_i), \varphi_\Gamma(y)) \le {}^{x_i}d_2(\varphi_\Gamma(x_i), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle y\rangle) + C\,{}^{x_i}d_2(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle y\rangle, \varphi_\Gamma(y)) + \mathscr{L}\varepsilon r_i$, где C — константа из обобщенного неравенства треугольника, и $\mathscr{L} < \infty$ зависит только от $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$. По выбору y выполняется ${}^{x_i}d_2(\varphi_\Gamma(x_i), \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle y\rangle) < r_i$. Кроме того, $d_2(x_i, y) < \frac{1}{K'}r_i$ и потому ${}^{x_i}d_2(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)\langle y\rangle, \varphi_\Gamma(y)) \le \varepsilon\frac{1}{K'}r_i$. Следовательно, $y \in \varphi_\Gamma^{-1}\bigl({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}}_2^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i), (1+\mathscr{S}\varepsilon)r_i)\bigr)$, где $\mathscr{S} < \infty$ зависит только от $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$.

Отсюда в силу непрерывности отображений $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)$, $i \in \mathbb{N}$, вытекает, что в сумме

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^3(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\bigl({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}}_2^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i), r_i))\bigr)$$

каждое слагаемое

$$\mathscr{H}^3\bigl(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\bigl({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}}_2^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i), r_i))\bigr)$$

можно заменить на $\mathscr{H}^3\bigl(\varphi_\Gamma^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(\varphi_\Gamma(x_i), r_i))\bigr)$, $i \in \mathbb{N}$.

Найдем точную нижнюю грань значений сумм

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^3\bigl(\varphi_\Gamma^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(\varphi_\Gamma(x_i), r_i))\bigr). \tag{9}$$

Так как шары $\{{}^{x_i}\mathrm{Box}_2(\varphi_\Gamma(x_i), r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ покрывают множество $\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}_2(x,r))$, точная нижняя грань сумм (9) будет не меньше чем $\mathscr{H}^3(\mathrm{Box}_2(x,r))$. Действительно, в силу соотношений

$$\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\bigl({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}}_2^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i), (1-o(1))r_i)\bigr) \subset \varphi_\Gamma^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(\varphi_\Gamma(x_i), r_i))$$
$$\subset \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x_i)^{-1}\bigl({}^{x_i}\widehat{\mathrm{Box}}_2^{\varphi_\Gamma(x_i)}(\varphi_\Gamma(x_i), (1+o(1))r_i)\bigr)$$

мера $\mathscr{H}^3$ на «шарах» $\varphi_\Gamma^{-1}({}^{x_i}\mathrm{Box}_2(\varphi_\Gamma(x_i), r_i))$ удовлетворяет условию удвоения. Поэтому к ним применима теорема Витали [20, 21], т. е. можно выбрать счетный дизъюнктный набор «шаров», покрывающий $\mathrm{Box}_2(x,r)$ с точностью до множество нулевой меры. Для оставшегося множества нулевой меры, так как верны соотношения (6) и (7), можно снова применить теорему Витали (к его покрытию) и найти набор шаров, покрывающий его, сумма мер которых не превосходит некоторого малого $\tau > 0$. Отсюда следует, что точная нижняя грань сумм (9) равна $\mathscr{H}^3(\mathrm{Box}_2(x,r))$. Тогда при $\delta \to 0$ получаем

$$\mathscr{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}_2(x,r))) = \sqrt{1 + \langle\widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\varphi(x)\rangle}\,\frac{\mathscr{H}^3(\mathrm{Box}_2(x,r))}{|g(x)|}(1+o(1))$$
$$= \sqrt{1 + \langle\widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\varphi(x)\rangle}\,\mathscr{H}^4(\mathrm{Box}_2(x,r))(1+o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно на $\mathscr{U}$, $g(x)$ — риманов тензор, и $\Phi'(x) = \sqrt{1 + \langle\widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\varphi(x)\rangle}$. Из этого соотношения следует [22, 23] формула площади (5). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 247–301. (Contemp. Math.; V. 424).
2. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
3. *Citti G., Sarti A.* A cortical based model of perceptual completion in the rototranslation space // Lect. Notes Sem. Interdisciplinare Mat. 2004. V. 3. P. 145–161.
4. *Hladky R. K., Pauls S. D.* Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging Vis. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
5. *Petitot J.* Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionelles // Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
6. *Vittone D.* Submanifolds in Carnot groups. Pisa: Eduzioni della Normale, 2008.
7. *Bigolin F.* Intrinsic regular hypersurfaces in Heisenberg groups and weak solutions of non linear first-order PDEs: PhD Thesis. Trento: Università Degli Studi di Trento, 2008.
8. *Franchi B., Serapioni R., Serra Cassano F.* Regular hypersurfaces, intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups // Comm. Anal. Geom. 2003. V. 5. P. 909–944.
9. *Kozhevnikov A.* Rugosité des lignes de niveau des applications différentiables sur le groupe d'Heisenberg. Palaiseau, France: Ecole Polytechnique, 2011. (Preprint).
10. *Басалаев С. Г.* Параметризации поверхностей уровня вещественнозначных отображений групп Карно // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 2. С. 3–29.
11. *Басалаев С. Г.* Одномерные поверхности уровня hc-дифференцируемых отображений на пространствах Карно — Каратеодори // Вестн. НГУ. 2013. Т. 13, № 4. С. 16–36.
12. *Agrachev A., Barilari D.* Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // J. Dynam. Control Syst. 2012. V. 18, N 1. P. 21–44.
13. *Basalaev S. G., Vodopyanov S. K.* Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Eurasian Math. J. 2013. V. 4, N 2. P. 10–48.
14. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkh. Verl., 1996. P. 79–318.
15. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155, N 1–2. P. 103–147.
16. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and mathematical physics. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.
17. *Karmanova M., Vodopyanov S.* On local approximation theorem on equiregular Carnot–Carathéodory spaces // Proc. INDAM meeting on geometric control and sub-Riemannian geometry (Cortona, May 2012). New York: Springer-Verl., 2014. P. 241–262. (INDAM Ser.; V. 5).
18. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.
19. *Карманова М. Б.* Тонкие свойства базисных векторных полей на пространствах Карно — Каратеодори в условиях минимальной гладкости // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 87–99.
20. *Водопьянов С. К.* Интегрирование по Лебегу: Уч. пособие [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://math.nsc.ru/~matanalyse/Lebesgue.pdf.
21. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978. (Математика. Новое в зарубежной науке; Вып. 9).
22. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
23. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II // Sib. Adv. Math. 2005. V. 15, N 1. P. 91–125.

Статья поступила 25 января 2015 г.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru