Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 517.53

О ПОДЧИНЕНИИ НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р. Каргар, А. Эбадян, Я. Сокол

Аннотация. Определяется новый подкласс

$$\mathscr{V}(\alpha,\beta) := \left\{ f \in \mathscr{A} : \alpha < \operatorname{Re}\left\{ \left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 f'(z) \right\} < \beta \right\}, \quad \alpha < 1,\ \beta > 1,$$

класса аналитических функций с ограниченной положительной частью. Устанавливаются некоторые свойства этого класса. Также изучается класс $\mathscr{U}(\gamma)$ $(\gamma > 0)$, определяемый следующим образом:

$$\mathscr{U}(\gamma) := \left\{ f \in \mathscr{A} : \left| \left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 f'(z) - 1 \right| < \gamma \right\},$$

где $\mathscr{A}$ — класс нормированных функций.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.404

Ключевые слова: аналитическая функция, подчинение, ограниченная положительная вещественная часть, задача Фекете — Сегё.

1. Введение

Пусть $\mathscr{A}$ — класс функций $f(z)$ вида

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.1}$$

аналитичных в открытом единичном круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Подкласс класса $\mathscr{A}$, состоящий из всех однолистных функций $f(z)$ в Δ, обозначается символом $\mathscr{S}$. Символом $\mathscr{P}$ обозначим известный класс аналитических функций $p(z)$ таких, что $p(0) = 1$ и $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$, $z \in \Delta$. Пусть $\mathscr{B}$ — класс аналитических функций $w(z)$ в Δ со свойствами $w(0) = 0$ и $|w(z)| < 1$, $z \in \Delta$. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в Δ. Говорят, что функция $f(z)$ *подчинена функции* $g(z)$ *в* Δ, и пишут $f(z) \prec g(z)$, $z \in \Delta$, если существует функция $w(z) \in \mathscr{B}$ такая, что $f(z) = g(w(z))$. Идея подчинения использовалась для определения многих классов геометрической теории функций. Для получения основного результата будем использовать дифференциальные подчинения. Основные результаты теории дифференциальных подчинений были получены Миллером и Мокану в [1, 2].

Символом $\mathscr{V}(\alpha)$ обозначим класс всех функций $f \in \mathscr{A}$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\{\mathscr{U}_f(z)\} > \alpha$ для некоторого фиксированного $\alpha < 1$ и для всех $z \in \Delta$, где

$$\mathscr{U}_f(z) := \left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 f'(z). \tag{1.2}$$

© 2016 Каргар Р., Эбадян А., Сокол Я.

Класс $\mathscr{V}(\alpha)$ изучался Обрадовичем и Поннусами в [3]. Будучи мотивированными классом $\mathscr{V}(\alpha)$, мы определяем новый класс аналитических функций.

Определение 1.1. Пусть α и β — вещественные числа такие, что $\alpha < 1$ и $\beta > 1$. Будем говорить, что функция $f \in \mathscr{A}$ *принадлежит классу* $\mathscr{V}(\alpha, \beta)$, если f удовлетворяет неравенству

$$\alpha < \operatorname{Re}\{\mathscr{U}_f(z)\} < \beta, \quad z \in \Delta,$$

где $\mathscr{U}_f(z)$ определено формулой (1.2).

Определение 1.2. Пусть $\gamma > 0$. Функция $f \in \mathscr{A}$ *принадлежит классу* $\mathscr{U}(\gamma)$, если f удовлетворяет неравенству

$$|\mathscr{U}_f(z) - 1| < \gamma, \quad z \in \Delta,$$

где $\mathscr{U}_f(z)$ определено формулой (1.2).

Таким образом, функции из $\mathscr{U}(\gamma)$ однолистны, если $0 < \gamma \le 1$, но необязательно однолистны при $\gamma > 1$ (см. [4]). Заметим, что $f \in \mathscr{V}(\alpha, \beta)$ для данных α, β $(0 \le \alpha < 1,\ \beta > 1)$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет следующим условиям подчинения:

$$\mathscr{U}_f(z) \prec \frac{1 + (1 - 2\alpha)z}{1 - z} \quad \text{и} \quad \mathscr{U}_f(z) \prec \frac{1 - (1 - 2\beta)z}{1 + z}.$$

Поскольку функции $(1 + (1 - 2\alpha)z)/(1 - z)$ и $(1 - (1 - 2\beta)z)/(1 + z)$ отображают Δ на правую полуплоскость чисел, у которых вещественная часть больше α, и левую полуплоскость чисел, у которых вещественная часть меньше β соответственно, определим аналитическую функцию $P_{\alpha,\beta} : \Delta \to \mathbb{C}$ формулой

$$P_{\alpha,\beta}(z) = 1 + \frac{\beta - \alpha}{\pi} i \log\left(\frac{1 - e^{2\pi i \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}} z}{1 - z}\right). \tag{1.3}$$

Заметим, что функция $P_{\alpha,\beta}(z)$, определенная формулой (1.3), выпукла (однолистна) в Δ и имеет вид

$$P_{\alpha,\beta}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n, \tag{1.4}$$

где

$$B_n = \frac{\beta - \alpha}{n\pi} i (1 - e^{2n\pi i \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}}), \quad n = 1, 2, \dots. \tag{1.5}$$

Функция $P_{\alpha,\beta}(z)$ была введена Куроки и Овой [5]; они показали, что $P_{\alpha,\beta}(z)$ отображает Δ на выпуклую область $\Omega = \{w : \alpha < \operatorname{Re}\{w\} < \beta\}$ конформно. Пользуясь этим фактом и определением подчинения, непосредственно убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 1.1. *Пусть $f \in \mathscr{A}$, $0 \le \alpha < 1$ и $\beta > 1$. Имеем $f \in \mathscr{V}(\alpha, \beta)$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathscr{U}_f(z) \prec 1 + \frac{\beta - \alpha}{\pi} i \log\left(\frac{1 - e^{2\pi i \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}} z}{1 - z}\right), \quad z \in \Delta.$$

Для доказательства основных результатов нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1.2 [2, с. 35]. *Пусть Ξ — множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и пусть b — комплексное число такое, что $\operatorname{Re}(b) > 0$. Предположим, что функция $\psi : \mathbb{C}^2 \times \Delta \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию*

$$\psi(i\rho, \sigma; z) \notin \Xi$$

для всех вещественных $\rho, \sigma \le -|b - i\rho|^2/(2\operatorname{Re} b)$ и всех $z \in \Delta$. Если функция $p(z) = b + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ аналитична в Δ и

$$\psi(p(z), zp'(z); z) \in \Xi,$$

то $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ в Δ.

Лемма 1.3 [1; 2, с. 24]. *Пусть $\mathscr{Q}$ — множество аналитических функций, инъективных на $\overline{\Delta} \setminus E(f)$, где $E(f) := \{\zeta : \zeta \in \partial\Delta, \lim\limits_{z\to\zeta} f(z) = \infty\}$, и таких, что $f'(\zeta) \ne 0$, $\zeta \in \partial(\Delta) \setminus E(f)$. Пусть $\psi \in \mathscr{Q}$, $\psi(0) = a$, и пусть функция $\varphi(z) = a + a_m z^m + \dots$ аналитична в Δ, причем $\varphi(z) \not\equiv a$ и $m \in \mathbb{N}$. Если $\varphi \not\prec \psi$ в Δ, то существуют точки $z_0 = r_0 e^{i\theta} \in \Delta$ и $\zeta_0 \in \partial\Delta \setminus E(\psi)$, для которых*

$$\varphi(|z| < r_0) \subset \psi(\Delta), \quad \varphi(z_0) = \psi(\zeta_0)$$

и $z_0\varphi'(z_0) = s\zeta_0\psi'(\zeta_0)$ для некоторого $s \ge m$.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Если $f \in \mathscr{A}$ и $\operatorname{Re}\{\mathscr{U}_f(z)\} > \alpha$ для $0 < \alpha \le 1/2$, то*

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} > \xi(\alpha) := 1 - \frac{1}{\alpha}, \quad z \in \Delta.$$

Доказательство. Будем писать $\xi(\alpha) := \xi$ и заметим, что $\xi \le -1$ для $0 < \alpha \le 1/2$. Пусть $f(z) \ne 0$ для $z \ne 0$. Определим $p(z)$ следующим образом:

$$p(z) = \frac{1}{1-\xi}\left(\frac{f(z)}{z} - \xi\right), \quad z \in \Delta.$$

Тогда функция $p(z)$ аналитична в Δ, $p(0) = 1$ и

$$\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 f'(z) = \frac{(1-\xi)p(z) + \xi + (1-\xi)zp'(z)}{[(1-\xi)p(z) + \xi]^2} = \psi(p(z), zp'(z)),$$

где

$$\psi(r, s) = \frac{1}{(1-\xi)r + \xi} + \frac{(1-\xi)s}{[(1-\xi)r + \xi]^2}.$$

Далее,

$$\{\psi(p(z), zp'(z)) : z \in \Delta\} \subset \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > \alpha\} =: \Omega_\alpha.$$

Для всех вещественных ρ, $\sigma \le -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$ имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\psi(i\rho, \sigma)) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1-\xi)i\rho + \xi} + \frac{(1-\xi)\sigma}{[(1-\xi)i\rho + \xi]^2}\right) \\
&= \frac{\xi}{\xi^2 + (1-\xi)^2\rho^2} + \frac{(1-\xi)\sigma[\xi^2(1-\rho^2) + (2\xi-1)\rho^2]}{[\xi^2 + (1-\xi)^2\rho^2]^2} \\
&\le \frac{\xi}{\xi^2 + (1-\xi)^2\rho^2} - \frac{(1+\rho^2)(1-\xi)[\xi^2(1-\rho^2) + (2\xi-1)\rho^2]}{2[\xi^2 + (1-\xi)^2\rho^2]^2} \\
&= \frac{\xi}{\xi^2 + (1-\xi)^2\rho^2} - \frac{(1-\xi)}{2}\frac{[\xi^2 + (2\xi-1)\rho^2 - (1-\xi)^2\rho^4]}{[\xi^2 + (1-\xi)^2\rho^2]^2} \\
&= f_1(\rho) - \frac{(1-\xi)}{2}[f_2(\rho) + f_3(\rho) + f_4(\rho)],
\end{aligned}$$

где

$$f_1(\rho) = \frac{\xi}{\xi^2 + (1-\xi)^2\rho^2}, \quad f_2(\rho) = \frac{\xi^2}{[\xi^2 + (1-\xi)^2\rho^2]^2},$$

$$f_3(\rho) = \frac{(2\xi-1)\rho^2}{[\xi^2 + (1-\xi)^2\rho^2]^2}, \quad f_4(\rho) = \frac{-(1-\xi)^2\rho^4}{[\xi^2 + (1-\xi)^2\rho^2]^2}.$$

Вычисляя производную каждой из упомянутых выше функций и используя соотношения

$$\lim f_1(\rho) = 0, \quad \lim f_2(\rho) = 0, \quad \lim f_3(\rho) = 0, \quad \rho \to \pm\infty,$$

$$\lim f_4(\rho) = -\frac{1}{(1-\xi)^2}, \quad \rho \to \pm\infty,$$

получим

$$\frac{1}{\xi} \le f_1(\rho) < 0, \quad 0 < f_2(\rho) \le \frac{1}{\xi^2},$$

$$f_3\biggl(\pm\frac{\xi}{1-\xi}\biggr) = \frac{2\xi-1}{4(1-\xi)^2\xi^2} \le f_3(\rho) \le 0, \quad -\frac{1}{(1-\xi)^2} < f_4(\rho) \le 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}(\psi(i\rho,\sigma)) < \frac{4\xi^2 - 2\xi + 1}{8\xi^2(1-\xi)} < 2\biggl(\frac{4\xi^2}{8\xi^2(1-\xi)}\biggr) < \frac{1}{1-\xi} =: \alpha.$$

Тем самым $\operatorname{Re}(\psi(i\rho,\sigma)) \notin \Omega_\alpha$. В силу леммы 1.2 имеем $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ в Δ. Это равносильно тому, что

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} > \xi, \quad z \in \Delta,$$

и доказательство теоремы 2.1 завершено. $\square$

Замечание 2.1. Пусть $f \in \mathscr{A}$ и $\operatorname{Re}\{\mathscr{U}_f(z)\} < \beta$ для $\beta > 1$. Далее, $f(z) \ne 0$. Для $z \ne 0$ определим $p(z)$ формулой

$$p(z) = \frac{1}{1-\delta}\biggl(\frac{f(z)}{z} - \delta\biggr), \quad z \in \Delta,$$

где $\delta > 1$. Тогда $p(z)$ аналитична в Δ, $p(0) = 1$ и

$$\biggl(\frac{z}{f(z)}\biggr)^2 f'(z) = \frac{(1-\delta)p(z) + \delta + (1-\delta)zp'(z)}{[(1-\delta)p(z) + \delta]^2} = \psi(p(z), zp'(z)),$$

где

$$\psi(r,s) = \frac{1}{(1-\delta)r + \delta} + \frac{(1-\delta)s}{[(1-\delta)r + \delta]^2}.$$

Кроме того,

$$\{\psi(p(z), zp'(z)) : z \in \Delta\} \subset \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) < \beta\} =: \Omega_\beta.$$

Так как $\delta > 1$, то

$$0 < f_1(\rho) \le \frac{1}{\delta}, \quad 0 < f_2(\rho) \le \frac{1}{\delta^2},$$

$$0 \le f_3(\rho) \le \frac{2\delta-1}{4(1-\delta)^2\delta^2} = f_3\biggl(\pm\frac{\delta}{1-\delta}\biggr), \quad -\frac{1}{(1-\delta)^2} < f_4(\rho) \le 0,$$

где $f_1(\rho), f_2(\rho), f_3(\rho)$ и $f_4(\rho)$ определены в доказательстве теоремы 2.1. Для всех вещественных ρ, $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$, имеем

$$\mathrm{Re}(\psi(i\rho,\sigma)) \geq \frac{1}{2-2\delta}.$$

Поскольку $\frac{1}{2-2\delta} < 0$ и $\beta > 1$, в результате получим $\frac{1}{2-2\delta} \not> \beta$. Следовательно,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} < \infty, \quad z \in \Delta.$$

Из теоремы 2.1 и замечания 2.1 вытекает

Теорема 2.2. *Пусть $f \in \mathscr{A}$, $0 < \alpha \leq 1/2$ и $\beta > 1$. Для $f \in \mathscr{V}(\alpha,\beta)$ имеет место неравенство*

$$1 - \frac{1}{\alpha} < \mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} < \infty, \quad z \in \Delta.$$

Задача нахождения точных верхних границ для коэффициентного функционала $\left|a_3 - \mu a_2^2\right|$ $(\mu \in \mathbb{C})$ для различных подклассов класса нормированных аналитических функций $\mathscr{A}$ известна как задача Фекете — Сегё. Здесь оценим $\left|a_3 - \mu a_2^2\right|$ для классов $\mathscr{V}(\alpha,\beta)$ и $\mathscr{U}(\gamma)$, где $\mu = 1$.

Теорема 2.3. *Пусть $0 \leq \alpha < 1$, $\beta > 1$, и пусть функция f, определенная формулой* (1.1), *лежит в классе $\mathscr{V}(\alpha,\beta)$. Тогда*

$$\left|a_3 - a_2^2\right| \leq \frac{2(\beta-\alpha)}{\pi}\sin\frac{\pi(1-\alpha)}{\beta-\alpha}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Поскольку $f \in \mathscr{V}(\alpha,\beta)$, по определению подчинения существует $w \in \mathscr{B}$ такое, что

$$\mathscr{U}_f(z) = P_{\alpha,\beta}(w(z)), \tag{2.2}$$

где $\mathscr{U}_f(z)$ и $P_{\alpha,\beta}(z)$ определяются формулами (1.2) и (1.3) соответственно. Положим

$$p(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots. \tag{2.3}$$

Так как $w \in \mathscr{B}$, то $p(z) \in \mathscr{P}$. Из (2.3) и (1.4) имеем

$$P_{\alpha,\beta}(w(z)) = 1 + \frac{1}{2}B_1 p_1 z + \left(\frac{1}{4}B_2 p_1^2 + \frac{1}{2}B_1\left(p_2 - \frac{1}{2}p_1^2\right)\right)z^2 + \dots. \tag{2.4}$$

Приравнивая коэффициенты при z и z^2 в обеих частях (2.2), получаем

$$\frac{1}{2}B_1 p_1 = 0,$$

откуда следует, что $p_1 = 0$ и

$$a_3 - a_2^2 = \frac{1}{4}B_2 p_1^2 + \frac{1}{2}B_1\left(p_2 - \frac{1}{2}p_1^2\right) = \frac{1}{2}B_1 p_2.$$

Поскольку $p(z) \in \mathscr{P}$, то $|p_i| \leq 2$ для каждого $i = 1, 2, \dots$ (см. [6]), стало быть,

$$\left|a_3 - a_2^2\right| \leq |B_1|,$$

где $|B_1| = \frac{2(\beta-\alpha)}{\pi}\sin\frac{\pi(1-\alpha)}{\beta-\alpha}$. Доказательство теоремы 2.3 завершено. □

Замечание 2.2. Пусть $0 \leq \alpha < 1$ и $\beta > 1$. Тогда

$$|B_1| = \frac{2(\beta-\alpha)}{\pi}\sin\frac{\pi(1-\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \frac{2(\beta-\alpha)}{\pi}\frac{\pi(1-\alpha)}{\beta-\alpha} = 2(1-\alpha) \leq 2.$$

Поэтому в силу (2.1) и $|B_1| \leq 2$ получаем $\left|a_3 - a_2^2\right| \leq 2$, откуда видно, что оценка вторых коэффициентов для функций, принадлежащих классу $\mathscr{V}(\alpha,\beta)$, связана с гипотезой Бибербаха.

Теорема 2.4. *Предположим, что $h \in \mathscr{U}(\gamma)$, $0 < \gamma \leq 1$, и h имеет вид*

$$h(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, \quad z \in \Delta.$$

Тогда

$$\left| c_3 - c_2^2 \right| \leq \gamma. \tag{2.5}$$

Оценка (2.5) *точна.*

Доказательство. Если $0 < \gamma \leq 1$, то функции из $\mathscr{U}(\gamma)$ однолистны (см. [4]) и потому $h(z) \neq 0$ для $z \neq 0$. Положим

$$p(z) = \frac{z}{h(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad z \in \Delta. \tag{2.6}$$

Простые вычисления показывают, что

$$b_1 = -c_2, \quad b_2 = c_2^2 - c_3 \tag{2.7}$$

и что $f \in \mathscr{U}(\gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$|p(z) - zp'(z) - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (1-n) b_n z^n \right| < \gamma, \quad z \in \Delta.$$

Поэтому $h \in \mathscr{U}(\gamma)$, если и только если

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{\gamma} b_n z^n \right| < 1, \quad z \in \Delta.$$

Известно, что функции-коэффициенты ограниченных функций имеют модуль, ограниченный 1, и потому

$$\left| \frac{1}{\gamma} b_2 \right| \leq 1. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) легко получаем (2.5). Рассмотрим функцию

$$h_0(z) = \frac{z}{1 - \gamma z^2} = z + \gamma z^3 + \gamma^2 z^5 + \dots, \quad z \in \Delta. \tag{2.9}$$

Имеем

$$\left(\frac{z}{h_0(z)} \right)^2 h_0'(z) = (1 - \gamma z^2)^2 \frac{1 + \gamma z^2}{(1 - \gamma z^2)^2} = 1 + \gamma z^2$$

и, следовательно,

$$\left| \left(\frac{z}{h_0(z)} \right)^2 h_0'(z) - 1 \right| = |\gamma z^2| < \gamma, \quad z \in \Delta.$$

Поэтому $h_0 \in \mathscr{U}(\gamma)$ и оценка (2.5) точна. $\square$

Рассмотрим функцию

$$h_1(z) = \frac{z}{1 - cz} = z + cz^2 + c^2 z^3 + \dots, \quad |c| \leq 1.$$

Тогда

$$\left\{ \frac{z}{h_1(z)} \right\}^2 h_1'(z) = (1 - cz)^2 \frac{1}{(1 - cz)^2} = 1.$$

Поэтому $h_1(z) \in \mathscr{V}(\alpha, \beta)$ и $h_1(z) \in \mathscr{U}(\gamma)$ для всех комплексных C со свойством $|c| \leq 1$.

Теорема 2.5. *Предположим, что* $f \in \mathscr{U}(1/2)$ *имеет вид*

$$f(z) = z + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \dots, \quad z \in \Delta.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z}{f(z)}\right\} > 0, \quad z \in \Delta.$$

Доказательство. Положим

$$p(z) = \frac{z}{f(z)} \quad \text{и} \quad q(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \Delta.$$

Функция $p(z)$ аналитична в Δ, потому что функции в $\mathscr{U}(\gamma)$, $0 < \gamma \leq 1$, однолистны [4], а тогда $f(z) \neq 0$ для $z \neq 0$. Кроме того,

$$p(z) = 1 - a_4 z^3 + \dots.$$

Значит, $f \in \mathscr{U}(1/2)$ эквивалентно

$$|p(z) - zp'(z) - 1| < 1/2, \quad z \in \Delta.$$

Докажем, что $p(z) \prec q(z)$. Если $p(z) \not\prec q(z)$, то существуют точки z_0, $|z_0| < 1$, и $\zeta_0 \neq 1$, для которых

$$p(z_0) = q(\zeta_0), \quad p(|z| < |z_0|) \subset q(\Delta), \quad |\zeta_0| = 1.$$

Если $\zeta_0 = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$, то

$$q(\zeta_0) = \frac{2i\sin\theta}{1-\cos\theta}, \quad \zeta_0 q'(\zeta_0) = -\frac{1}{1-\cos\theta}.$$

Из леммы 1.3 следует, что

$$p(z_0) - z_0 p'(z_0) = q(\zeta_0) - s\zeta_0 q'(\zeta_0) = \frac{2i\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{s}{1-\cos\theta},$$

где $s \geq 3$. Имеем

$$\begin{aligned} |p(z) - zp'(z) - 1| &= \left|\frac{2i\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{s-1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right| = \frac{1}{1-\cos\theta}|2i\sin\theta + s - 1 + \cos\theta| \\ &= \frac{1}{1-\cos\theta}\sqrt{3\sin^2\theta + 2(s-1)\cos\theta + s^2 + 2(1-s)} \\ &\geq \frac{1}{2}\sqrt{-2(s-1) + s^2 + 2(1-s)} = \frac{1}{2}\sqrt{(s-2)^2} \geq 1/2; \end{aligned}$$

противоречие с тем, что $f \in \mathscr{U}(1/2)$. Поэтому $p(z) \prec q(z)$, или

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z}{f(z)}\right\} > 0, \quad z \in \Delta. \quad \square$$

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за ценные комментарии и наблюдения, способствовавшие улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miller S. S., Mocanu P. T.* Differential subordinations and univalent functions // Michigan Math. J. 1981. V. 28. P. 151–171.
2. *Miller S. S., Mocanu P. T.* Differential subordinations. Theory and applications. New York; Basel: Marcel Dekker Inc., 2000. (Ser. Monogr. Textb. Pure Appl. Math.; V. 225).
3. *Obradović M., Ponnusamy S.* Radius of univalence of certain class of analytic functions // Filomat. 2013. V. 27, N 6. P. 1085–1090.
4. *Aksentiev L. A.* Sufficient conditions for univalence of regular functions // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat. 1958. V. 3. P. 3–7.
5. *Kuroki K., Owa S.* New class for certain analytic functions concerned with the strip domains // Adv. Math. 2013. V. 2, N 2. P. 63–70.
6. *Goodman A. W.* Univalent functions. Tampa, FA: Mariner Publ. Comp. Inc., 1983.

Статья поступила 2 февраля 2015 г.

Rahim Kargar (Каргар Рахим)
Young Researchers and Elite Club,
Urmia Branch, Islamic Azad University,
Urmia, Iran
rkargar1983@gmail.com

Ali Ebadian (Эбадян Али)
Department of Mathematics, Payeme Noor University (PNU),
Tehran, Iran
ebadian.ali@gmail.com, aebadian@pnu.ac.ir

Janusz Sokół (Сокол Януш)
Department of Mathematics, Rzeszów University of Technology,
Al. Powstańców Warszawy 12, 35-959 Rzeszów, Poland
jsokol@prz.edu.pl