*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6*

*УДК 512.563*

# КОНЕЧНО–АКСИОМАТИЗИРУЕМЫЕ СУПЕРАТОМНЫЕ БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ С ВЫДЕЛЕННОЙ ПЛОТНОЙ ПОДАЛГЕБРОЙ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

**Д. Е. Пальчунов, А. В. Трофимов**

**Аннотация.** Дано описание конечно-аксиоматизируемых суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Получены критерии элементарной эквивалентности суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины и разрешимости их элементарных теорий.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.613

**Ключевые слова:** булева алгебра, булева алгебра с выделенной подалгеброй, локальная алгебра, элементарная теория, конечно-аксиоматизируемая теория, разрешимая теория, элементарная эквивалентность.

## 1. Введение

Работа посвящена изучению теоретико-модельных свойств булевых алгебр с выделенной подалгеброй. Ю. Л. Ершов [1] привел достаточные условия разрешимости теории булевой алгебры с выделенным идеалом. С. С. Гончаров [2] дал полное описание типов изоморфизма счетных суператомных булевых алгебр. М. Рубин [3] доказал, что теория класса булевых алгебр с выделенной подалгеброй неразрешима. Авторами [4, 5] была изучена взаимосвязь между автоморфизмами булевых алгебр, определяемыми неподвижными элементами, и их неподвижными подалгебрами. Для атомных булевых алгебр было доказано, что автоморфизм булевой алгебры определяется неподвижными своими элементами тогда и только тогда, когда подалгебра неподвижных элементов является подалгеброй ширины 2. Однако не каждая подалгебра ширины 2 атомной булевой алгебры реализуется как неподвижная подалгебра некоторого автоморфизма. Для подалгебр атомных булевых алгебр получено достаточное условие того, чтобы подалгебра была подалгеброй неподвижных элементов некоторого автоморфизма. Для этого достаточно, чтобы она была плотной подалгеброй конечной ширины.

В [4] получена элементарная классификация локальных суператомных булевых алгебр с плотной подалгеброй конечной ширины. В частности, в [4] было доказано существование континуума элементарно не эквивалентных алгебраических систем в классе суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй ширины $n$ для каждого $n \geq 3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–07–00903-а).

В настоящей работе получено полное описание конечно-аксиоматизируемых суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Получены критерии элементарной эквивалентности суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины и разрешимости их элементарных теорий.

## 2. Основные определения и предварительные результаты

Будем рассматривать булевы алгебры в сигнатуре $\sigma = \langle \cup, \cap, C, 0, 1 \rangle$. Пусть $\sigma^* = \sigma \cup P$, где $P$ — символ унарного предиката, выделяющего подалгебру. Булевы алгебры с выделенными подалгебрами будем называть просто *алгебрами*. Через $P^{\mathfrak{A}} = \{a \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models P(a)\}$ обозначим основное множество выделенной подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная суператомная алгебра. Обозначим через $o(\mathfrak{A})$ наименьший ординал $\alpha$ такой, что единица алгебры принадлежит $(\alpha+1)$-му идеалу Фреше, т. е. $1 \in F_{\alpha+1}(\mathfrak{A})$. Пусть $\tau(\mathfrak{A}) = (o(\mathfrak{A}), n)$ — тип суператомности [6] алгебры $\mathfrak{A}$, где $n$ — число атомов в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/F_\alpha$ при $\alpha = o(\mathfrak{A})$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра и $a \in P^{\mathfrak{A}}$ — элемент выделенной подалгебры. Определим алгебру, порожденную элементом $a$:

$$(a) = \langle \{b \in \mathfrak{A} \mid b \leq a\}, \cup, \cap, C^a, 0, a, P^{\mathfrak{A}} \cap \{b \in \mathfrak{A} \mid b \leq a\} \rangle,$$

где $C^a(b) = a \cap C(b)$.

Прямая сумма $\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ определяется стандартным образом.

Определение 1 [4]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *подалгеброй ширины* $n$, если под любым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$ найдется не более $n$ атомов алгебры $\mathfrak{A}$, лежащих под ним, и любой атом алгебры $\mathfrak{A}$ лежит под некоторым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$.

Определение 2 [4]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *плотной*, если $\mathfrak{A} = \mathrm{sub}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}, F(\mathfrak{A}))$ — наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая в себе подалгебру $\mathfrak{B}$ и идеал Фреше $F(\mathfrak{A})$.

Обозначим [4] через $K_n$ класс суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй ширины $n$.

Определение 3 [4]. Обозначим $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, если найдется $\mathfrak{C}$ такая, что $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *неисчезающей*, если из $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ следует $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M}$ или $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$.

Определение 4 [4]. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *локальной*, если число попарно элементарно не эквивалентных неисчезающих алгебраических систем $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$ конечно, т. е. существуют $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$ такие, что для произвольной неисчезающей $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{A}$ выполнено $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{B}_i$ для некоторого $i \leq n$.

Следуя [4], приведем построение счетной последовательности формул $T_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, языка $\sigma^*$ с одной свободной переменной.

Пусть $\phi, \psi$ — формулы с одной свободной переменной языка $\sigma^*$, $T$ — теория класса булевых алгебр с выделенной подалгеброй. Определим

$$\phi \leq \psi \rightleftharpoons T \vdash (\psi(x) \to (\exists y \leq x)\phi(y));$$

$$\phi \# \psi \rightleftharpoons T \vdash (\psi(x) \to (\forall y \leq x)\neg\phi(y)).$$

Определим отношение линейного порядка на конечных подмножествах множества натуральных чисел без нуля. Пусть $A = \{a_1 > a_2 > \cdots > a_l\}$, $B = \{b_1 > b_2 > \cdots > b_m\} \subset \mathbb{N}\backslash\{0\}$ — два произвольных конечных подмножества множества натуральных чисел без нуля. Положим $A < B$, если $(a_1, a_2, \ldots, a_l, 0, \ldots, 0) < (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ в лексикографическом порядке, и $A \leq B$, если $A < B$ или $A = B$ (добавляем нули так, чтобы длины кортежей стали равными).

Обозначим $X = \{A \subset \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid 2 \leq \|A\| < \omega\}$. Занумеруем множество $X$ в порядке возрастания. А именно, пусть $\Omega : X \to \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение всех конечных не одноэлементных подмножеств множества натуральных чисел без нуля на множество натуральных чисел такое, что $\Omega(A) < \Omega(B) \iff A < B$.

Перейдем к построению последовательности формул $T_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Построение будем вести по индукции.

Базис индукции:

$$T_1(x) = (x \text{ — атом}) \& P(x);$$

$$T_l(x) = (x \text{ — объединение } l \text{ атомов}) \& P(x) \& (\forall y \leq x) \bigwedge_{i<l} \neg T_i(y) \text{ для } 2 \leq l \leq n.$$

При помощи формулы $Q(x) = \exists y \exists z (x = y \cup z \ \&\ y \cap z = 0 \& ((\forall 0 \neq w \leq y) \neg P(w)) \& ((\forall 0 \neq w \leq z) \neg P(w)))$ для $2 \leq j \leq n$ определим

$$T_{n+j-1}(x) = \neg Q(x) \& (\exists y \leq x) T_j(y) \& \bigwedge_{i \neq j,\, i \leq n} (\forall y \leq x) \neg T_i(y)$$
$$\& (\forall y_1, y_2 \leq x)(y_1 \cap y_2 = 0 \to (Q(y_1) \vee Q(y_2))).$$

Шаг индукции. Предположим, что формулы $T_1(x), \ldots, T_m(x)$ построены. Пусть $R \in X$, $R \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, такое, что $T_i \# T_j$ для различных $i, j \in R$ и есть наименьший номер $l = \Omega(R)$, который еще не был использован при построении формул $T_1(x), \ldots, T_m(x)$. Определим множество $R^*$ и вспомогательные формулы $\pi_R(x)$, $T_R(x)$ следующим образом:

$$R^* = \{i \leq m \mid (T_i \# T_j) \text{ для всех } j \in R\};$$

$$\pi_R(x) = \exists_{i \in R} x_i \Big( \bigwedge_{i \neq j} (x_i \cap x_j = 0) \& \Big( \bigcup_{i \in R} x_i = x \Big) \& \Big( \bigwedge_{i \neq j} (\forall z \leq x_i) \neg T_j(z) \Big) \Big);$$

$$T_R(x) = \neg \pi_R(x) \& P(x) \& (\forall y \leq x) \Big( \bigvee_{i \in R} (\forall z \leq y) \neg T_i(z) \to \pi_R(y) \Big)$$
$$\& \Big( (\forall y \leq x) \bigwedge_{i \in R^*} \neg T_i(y) \Big) \& (\forall y_1 \leq x)(\forall y_2 \leq x)(y_1 \cap y_2 = 0 \to (\pi_R(y_1) \vee \pi_R(y_2))).$$

Полагаем $T_{m+1}(x) = T_R(x)$. Обозначим $R_{m+1} = R$ и $R^*_{m+1} = R^*$.

Для формул $T_k(x)$, $n < k \leq 2n-1$, обозначим $T_R(x) = T_k(x)$ для множества $R = \{k + 1 - n\}$; $R^* = \{i \leq n \mid i \neq k + 1 - n\}$.

При помощи построенной последовательности формул для каждой алгебры $\mathfrak{A}$ и каждого элемента $a \in \mathfrak{A}$ характеристическая функция $w_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ определена следующим образом:

$w_a(0) = 0$, если $\mathfrak{A} \models P(a)$;

$w_a(0) = 1$, если $\mathfrak{A} \models \neg P(a)$;

$w_a(m) = 0$, если $\mathfrak{A} \models (\forall y \le a)\neg T_m(y)$, $m \ge 1$;

$$w_a(m) = \sup\Big\{k \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models (\exists x_1, \dots, \exists x_k \le a) \Big(\Big(\bigwedge_{i \ne j} x_i \cap x_j = 0\Big) \& \Big(\bigwedge_{i \le k} T_m(x_i)\Big)\Big)\Big\}, \quad m \ge 1.$$

Положим $w_{\mathfrak{A}} = w_{1^{\mathfrak{A}}}$.

Определение 5 [4]. Формула $\phi(x)$ с одной свободной переменной сигнатуры $\sigma^*$ называется *неисчезающей*, если

$$T \vdash ((x = y \cup z \& y \cap z = 0 \& \phi(x) \& P(y) \& P(z)) \to (\phi(y) \vee \phi(z))).$$

**Предложение 1** [4]. *Справедливы следующие утверждения:*

(а) *для любого числа $k \ge 1$ формула $T_k(x)$ — неисчезающая формула;*

(б) *для любого числа $k \ge 1$ формула $T_k(1)$ полная в теории $T$, т. е. любые две модели теории $T$, на которых истинна формула $T_k(1)$, элементарно эквивалентны;*

(в) *если $i < j$, то $T_j \# T_i$;*

(г) *для любых $i, j$ либо $T_i \le T_j$, либо $T_i \# T_j$.*

**Теорема 1** [4]. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — локальные булевы алгебры с выделенными подалгебрами, принадлежащими классу $K_n$. Для того чтобы $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы $w_{\mathfrak{A}} = w_{\mathfrak{B}}$.*

Рассмотрим обогащение сигнатуры $\sigma_1 = \sigma^* \cup \{c_1, \dots, c_k\}$ конечным числом константных символов. Через $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ обозначим булеву алгебру с выделенной подалгеброй в обогащенной константами сигнатуре, где $a_1, \dots, a_k$ — значения в модели $\mathfrak{A}$ константных символов $c_1, \dots, c_k$ соответственно.

Пусть $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ и $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ — булевы алгебры с выделенными подалгебрами в обогащенной константами сигнатуре $\sigma_1$, $A_0 \subseteq \mathfrak{A}$ и $B_0 \subseteq \mathfrak{B}$. Отображение $f : A_0 \to B_0$ назовем *частичным изоморфизмом* из $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ в $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, если множество $A_0$ определяет подалгебру в алгебре $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$, множество $B_0$ — подалгебру в алгебре $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ (в частности, $a_1, \dots, a_k \in A_0$ и $b_1, \dots, b_k \in B_0$) и отображение $f$ является изоморфизмом соответствующих подалгебр, т. е. для любых $a, b \in A_0$ выполнено

$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b), \quad f(a \cap b) = f(a) \cap f(b), \quad f(C(a)) = C(f(a)),$$

$$P(a) \iff P(f(a)), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(a_1) = b_1, \dots, f(a_k) = b_k.$$

Обозначим $\operatorname{dom} f = A_0$, $\operatorname{im} f = B_0$.

Отображение $f : A_0 \to B_0$ назовем *конечным частичным изоморфизмом*, если это отображение является частичным изоморфизмом и его область определения $\operatorname{dom} f$ конечна.

Будем говорить, что алгебра $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ *$m$-эквивалентна* алгебре $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ и обозначать $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k) \equiv_m (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, если существуют непустые множества $F_0, \dots, F_m$ конечных частичных изоморфизмов из $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ в $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, удовлетворяющие следующему условию: для любых $l < m$, $f \in F_l$, $a \in \mathfrak{A}$ и $b \in \mathfrak{B}$ найдутся $g_1, g_2 \in F_{l+1}$ такие, что $g_1, g_2 \supset f$, $a \in \operatorname{dom} g_1$ и $b \in \operatorname{im} g_2$.

Будем обозначать $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ для алгебр без выделенных констант, т. е. если $\sigma_1 = \sigma^*$.

Замечание 1. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — булевы алгебры с выделенной подалгеброй. Предположим, что $a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{A}$ и $b_1, \dots, b_k \in \mathfrak{B}$. Для того чтобы $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k) \equiv_{m+1} (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

(а) для любого $a \in \mathfrak{A}$ найдется $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k, b)$;

(б) для любого $b \in \mathfrak{B}$ найдется $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k, b)$.

**Теорема 2** [4]. *Булевы алгебры с выделенными подалгебрами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) тогда и только тогда, когда для любого $m$ выполнено $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная булева алгебра с выделенной подалгеброй и $a \in \mathfrak{A}$. Обозначим через $M(a) \rightleftharpoons \{m \neq 0 \mid w_a(m) \neq 0\}$ носитель характеристической функции $w_a$, через $N(a) \rightleftharpoons \{m \in M(a) \mid \forall n \in M(a)(T_m \leq T_n \to m = n)\}$ — множество максимальных элементов множества $M(a)$ относительно порядка $\leq$.

Обозначим $M(\mathfrak{A}) \rightleftharpoons M(1^{\mathfrak{A}})$ и $N(\mathfrak{A}) \rightleftharpoons N(1^{\mathfrak{A}})$.

Определение 6 [4]. Локальный элемент $a$ булевой алгебры с выделенной подалгеброй называется *$m$-простым*, если $N(a) = \{m\}$ и выполнено $P(a)$. Элемент $a$ называется *простым*, если он является $m$-простым для некоторого $m$ или $a \in F(\mathfrak{A})$. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *простой* (*$m$-простой*), если $1^{\mathfrak{A}}$ есть простой ($m$-простой) элемент.

**Предложение 2** [4]. *Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$ и $a \in \mathfrak{A}$. В алгебре $\mathfrak{A}$ выполнено $T_l(a)$ тогда и только тогда, когда элемент $a$ является $l$-простым и $w_a(l) = 1$.*

**Предложение 3** [4]. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — $l$-простые алгебры, принадлежащие классу $K_n$. Предположим, что $w_{\mathfrak{A}}(l), w_{\mathfrak{B}}(l) \geq 2^m$ и $l > n$. Тогда $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.*

**Предложение 4** [4]. *Для того чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ была локальной, необходимо и достаточно, чтобы множество $M(\mathfrak{A})$ было конечным.*

**Предложение 5** [4]. *Пусть $\mathfrak{A}$ — локальная алгебра, принадлежащая классу $K_n$. Алгебра $\mathfrak{A}$ неисчезающая тогда и только тогда, когда для некоторого $l \in \mathbb{N}$ алгебра $\mathfrak{A}$ является $l$-простой и либо $w_{\mathfrak{A}}(l) = 1$, либо $w_{\mathfrak{A}}(l) = \infty$.*

**Предложение 6** [4]. *Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная локальная булева алгебра с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу $K_n$. Тогда любой элемент алгебры $\mathfrak{A}$ есть объединение конечного числа попарно не пересекающихся простых элементов.*

## 3. Конечно-аксиоматизируемые суператомные булевы алгебры с выделенной подалгеброй конечной ширины

**Предложение 7.** *Для любых натуральных чисел $m, l \in \mathbb{N}$ найдется конечное множество формул от $l$ свободных переменных $X_{m,l}$ такое, что выполнены следующие три условия:*

*(1) для любой алгебры $\mathfrak{A} \in K_n$ и любых элементов $a_1, \dots, a_l \in \mathfrak{A}$ найдется формула $\psi \in X_{m,l}$ такая, что $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_l)$;*

*(2) для любой формулы $\psi \in X_{m,l}$, любых алгебр $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_n$ и любых элементов $a_1, \dots, a_l \in \mathfrak{A}$, $b_1, \dots, b_l \in \mathfrak{B}$ если $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_l)$ и $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_l) \equiv_m (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_l)$, то $\mathfrak{B} \models \psi(b_1, \dots, b_l)$;*

(3) *для любой формулы* $\psi \in X_{m,l}$, *любых алгебр* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_n$ *и любых элементов* $a_1, \dots, a_l \in \mathfrak{A}$, $b_1, \dots, b_l \in \mathfrak{B}$ *если* $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_l)$ *и* $\mathfrak{B} \models \psi(b_1, \dots, b_l)$,*то* $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_l) \equiv_m (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_l)$.

Доказательство проведем индукцией по $m$.

Базис индукции: $m = 0$. Зафиксируем произвольное натуральное число $l$. Пусть $x_1, \dots, x_l$ — переменные, обозначим $x = \langle x_1, \dots, x_l \rangle$. Для переменной $y$ обозначим $y^0 = C(y)$, $y^1 = y$. Пусть $\epsilon = \langle \delta_1, \dots, \delta_l \rangle \in \{0,1\}^l$. Обозначим $x^\epsilon = x_1^{\delta_1} \cap \dots \cap x_l^{\delta_l}$. Рассмотрим множество формул

$$X_{o,l} = \Big\{ \Big( \Big( \bigwedge_{\epsilon_i \in U} (x^{\epsilon_i} = 0) \Big) \& \Big( \bigwedge_{\epsilon_i \in V} (x^{\epsilon_i} \neq 0) \Big) \& \Big( \bigwedge_{\{\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_k}\} \in M} P(x^{\epsilon_{i_1}} \cup \dots \cup x^{\epsilon_{i_k}}) \Big) \\ \& \Big( \bigwedge_{\{\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_k}\} \in \mathscr{P}(V) \setminus M} \neg P(x^{\epsilon_{i_1}} \cup \dots \cup x^{\epsilon_{i_k}}) \Big) \Big) \mid \\ U \cup V = \{0,1\}^l,\ U \cap V = \varnothing,\ M \subseteq \mathscr{P}(V) \Big\},$$

где $\mathscr{P}(V)$ — множество всех подмножеств множества $V$.

Непосредственно проверяется, что указанное множество формул удовлетворяет требуемым условиям.

Шаг индукции. Предположим, что множества формул $X_{m,l}$, $l \in \mathbb{N}$, построены и удовлетворяют требуемым условиям. Зафиксируем число $l$. Пусть $\varnothing \neq Y \subseteq X_{m,l+1}$. Обозначим

$$\eta_Y(x_1, \dots, x_l) = \Big( \bigwedge_{\phi \in Y} \exists y \phi(x_1, \dots, x_l, y) \Big) \& \Big( \bigwedge_{\phi \in X_{m,l+1} \setminus Y} \neg \exists y \phi(x_1, \dots, x_l, y) \Big).$$

Положим $X_{m+1,l} = \{\eta_Y \mid \varnothing \neq Y \subseteq X_{m,l+1}\}$.

Из замечания 1 следует, что множество $X_{m+1,l}$ удовлетворяет всем условиям предложения 1. Предложение доказано.

**Следствие 1.** *Для любого натурального числа $m$ множество $m$-типов алгебраических систем из класса $K_n$ конечно.*

Доказательство. Для любого натурального числа $m$ множество $X_{m,0}$ конечно. Стало быть, количество $m$-типов в классе $K_n$ также конечно. Следствие 1 доказано.

Замечание 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная счетная суператомная булева алгебра с выделенной подалгеброй ширины $n$ и $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$. Тогда $P^{\mathfrak{B}}$ и $P^{\mathfrak{C}}$ образуют подалгебры ширины $n$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $P^{\mathfrak{B}} = |\mathfrak{B}| \cap P^{\mathfrak{A}}$ (при соответствующем отождествлении $d \in \mathfrak{B}$ с $(d, 0) \in \mathfrak{A}$). Докажем, что $P^{\mathfrak{B}}$ образует подалгебру ширины $n$. В самом деле, пусть $b \in At(\mathfrak{B})$ — атом алгебры $\mathfrak{B}$. Тогда в силу ширины $n$ подалгебры $P^{\mathfrak{A}}$ найдется атом $c \in At(P^{\mathfrak{A}})$ такой, что $b \leq c$. Так как $b \leq 1^{\mathfrak{B}}$, то $b \leq 1^{\mathfrak{B}} \cap c$ и $1^{\mathfrak{B}} \cap c \in P^{\mathfrak{A}}$. Стало быть, $c = 1^{\mathfrak{B}} \cap c$ и $c \in P^{\mathfrak{B}}$. Непосредственно проверяется, что $c$ является атомом подалгебры $P^{\mathfrak{B}}$. Далее, пусть $c \in At(P^{\mathfrak{B}})$. Тогда $c \in At(P^{\mathfrak{A}})$. Апеллируя к определению конечной ширины алгебры $P^{\mathfrak{A}}$, заключаем, что под атомом $c$ найдется не более $n$ атомов алгебры $\mathfrak{B}$.

Замечание 3. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$ и $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$. Тогда $\mathfrak{B} \in K_n$ и $\mathfrak{C} \in K_n$.

Доказательство. В силу предложения 2 из [4] так как $\mathfrak{A} \in K_n$, для любого элемента $b \in \mathfrak{B}$ найдутся элементы $d \in F(\mathfrak{B})$, $e \in P^{\mathfrak{B}}$ такие, что $b = d \cup e$. Отсюда следует плотность подалгебры $P^{\mathfrak{B}}$ в алгебре $\mathfrak{B}$. Апеллируя к замечанию 2, получаем требуемое.

Замечание 4. Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная суператомная булева алгебр типа суператомности $(\alpha, 1)$. Тогда найдутся суператомные булевы алгебры $\mathfrak{A}_i$ с типом суператомности $(\beta_i, 1)$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что $\mathfrak{A} \cong \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_i$ и

(а) $\alpha = \sup \beta_i$, если $\alpha$ — предельный ординал;
(б) $\alpha = \sup \beta_i + 1$, если $\alpha$ — непредельный ординал;

**Следствие 2.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная суператомная булева алгебра типа суператомности $(\alpha, k)$, $\alpha \geq 1$, с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу $K_n$. Тогда найдутся алгебры $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_k \in K_n$ такие, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_k$ и для каждого $i \leq k$ выполнено $\tau(\mathfrak{A}_i) = (\alpha, 1)$.*

Доказательство. Найдутся попарно не пересекающиеся элементы $a_1, \dots, a_k$ с типом суператомности $(\alpha, 1)$ такие, что $1^{\mathfrak{A}} = a_1 \cup \dots \cup a_k$ и $a_i \cap a_j = 0$ при $i \neq j$. В силу плотности выделенной подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$, для каждого $i \leq k$ найдется разложение $a_i = b_i \cup c_i$, для которого выполнено $b_i \cap c_i = 0$, $P(b_i)$, $c_i \in F(\mathfrak{A})$ и $\tau(b_i) = (\alpha, 1)$. Стало быть, в силу замечания 2 с учетом того, что $\alpha \geq 1$, заключаем, что $\mathfrak{A} \cong (b_1) \times \dots \times ((b_k) \cup (c_1 \cup \dots \cup c_k))$ — искомое разложение. Следствие доказано.

**Предложение 8.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная булева алгебра с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу $K_n$, $\tau(\mathfrak{A}) = (\alpha, 1)$ и $\alpha \geq 1$. Тогда*

(а) *если $\alpha = 1$, то найдутся конечные алгебры $\mathfrak{A}_i \in K_n$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что $\mathfrak{A} \cong \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_i$;*

(б) *если $\alpha > 1$ и $\alpha = \beta + 1$ — непредельный ординал, то найдутся алгебры $\mathfrak{A}_i \in K_n$, $i \in \mathbb{N}$, с типом суператомности $(\beta, 1)$ такие, что $\mathfrak{A} \cong \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_i$;*

(в) *если $\alpha$ — предельный ординал, то найдутся алгебры $\mathfrak{A}_i \in K_n$, $i \in \mathbb{N}$, с типом суператомности $(\beta_i, 1)$ такие, что $\mathfrak{A} \cong \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_i$ и $\sup \beta_i = \alpha$.*

Доказательство. Докажем утверждение (в), утверждения (а) и (б) доказываются аналогично.

Пусть $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям предложения и $\mathfrak{B} = \langle P^{\mathfrak{A}}, \sigma \rangle$ — выделенная подалгебра в алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда $\tau(\mathfrak{B}) = (\alpha, 1)$, поэтому в силу замечания 4 найдутся булевы алгебры $\mathfrak{B}_i$, $i \in \mathbb{N}$, с типом суператомности $(\beta_i, 1)$ такие, что $\mathfrak{B} \cong \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}_i$, $\sup \beta_i = \alpha$ и $\beta_i \geq 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Пусть $f : \mathfrak{B} \to \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}_i$ — изоморфизм между булевой алгеброй $\mathfrak{B}$ и булевой алгеброй $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}_i$. Обозначим $a_i = f^{-1}(1^{\mathfrak{B}_i})$. Тогда $a_i \in \mathfrak{A}$ и $a_i \in P^{\mathfrak{A}}$. Стало быть, булева алгебра $(a_i)^s = \langle \{b \mid b \in \mathfrak{B},\ b \leq a_i\}, \cup, \cap, C^{a_i}, 0, a_i \rangle$ изоморфна булевой алгебре $\mathfrak{B}_i$. Следовательно, существует изоморфизм $g : \mathfrak{B} \to \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} (a_i)^s$ булевой алгебры $\mathfrak{B}$ на булеву алгебру $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} (a_i)^s$.

Здесь использовали обозначение $(a_i)^s$, чтобы показать, что булева алгебра $(a_i)^s$ является прямым слагаемым *подалгебры* $\mathfrak{B}$ ($s$ — от *subalgebra*). Заметим, что алгебру $(a_i)^s$ можно рассматривать и в расширенной сигнатуре $\sigma^*$: в этом случае подалгебра совпадает с самой алгеброй, т. е. $P^{(a_i)^s} = |(a_i)^s|$.

Каждый элемент $a_i$ булевой алгебры $\mathfrak{B}$ — выделенной подалгебры в алгебре $\mathfrak{A}$ — очевидным образом является и элементом самой алгебры $\mathfrak{A}$. Поэтому элемент $a_i$ алгебры $\mathfrak{A}$ определяет прямое слагаемое этой алгебры:

$$(a_i) = \langle \{c \mid c \in \mathfrak{A},\ c \le a_i\}, \cup, \cap, C^{a_i}, 0, a_i, P^{a_i} \rangle,$$

где $P^{a_i} = \{c \mid c \in \mathfrak{A},\ c \le a_i,\ P(c)\} = \{c \mid c \in \mathfrak{A},\ c \le a_i\} \cap |\mathfrak{B}| = |(a_i)^s|$.

Таким образом, имеем проиндексированное множество $(a_i)$, $i \in \mathbb{N}$, прямых слагаемых алгебры $\mathfrak{A}$.

Покажем, что алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} (a_i)$. Построим отображение $g^* : \mathfrak{A} \to \sum\limits_{i \in N} (a_i)$, продолжающее отображение $g$. Для этого достаточно определить действие отображения $g^*$ на атомах булевой алгебры $\mathfrak{A}$, поскольку выполнено $\mathfrak{A} = \mathrm{sub}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}, F(\mathfrak{A}))$.

Пусть $a \in At(\mathfrak{A})$ — атом булевой алгебры $\mathfrak{A}$. В силу плотности подалгебры $\mathfrak{B}$ найдется атом $c \in At(\mathfrak{B})$ такой, что $a \le c$. Тогда $f(c)$ — атом булевой алгебры $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_i$. Поэтому при соответствующем отождествлении $f(c) \le 1^{\mathfrak{B}_i}$ для некоторого $i$. Следовательно, $c \le a_i$. Значит, $a \le a_i$ и $a \in (a_i)$. Тогда определим $g^*(a) = \langle q_j \rangle_{j \in \mathbb{N}} \in \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} (a_i)$, где $q_j = a$ при $j = i$ и $q_j = 0$ при $j \ne i$. Таким образом, определили действие отображения $g^*$ на атомах булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Предложение доказано.

Замечание 5. Пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ — счетные суператомные булевы алгебры с выделенной подалгеброй, $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$. Тогда $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.

Доказательство. Пусть $F_1^i \subseteq F_2^i \subseteq \dots \subseteq F_m^i$ — последовательность конечных частичных изоморфизмов, удовлетворяющих условиям определения $m$-эквивалентности для $\mathfrak{A}_i \equiv_m \mathfrak{B}_i$, $i = 1, 2$. Для $l \le m$, $f_1 \in F_l^1$ и $f_2 \in F_l^2$ рассмотрим отображение $(f_1, f_2) : \mathrm{dom}\, f_1 \times \mathrm{dom}\, f_2 \to \mathrm{im}\, f_1 \times \mathrm{im}\, f_2$, определенное следующим образом: $(f_1, f_2)(a_1, a_2) = (f_1(a_1), f_2(a_2))$. Легко заметить, что $(f_1, f_2)$ — конечный частичный изоморфизм из $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ в $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$. Тогда множества $F_j = \big\{(f_1, f_2) \mid f_1 \in F_j^1, f_2 \in F_j^2\big\}$, $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, образуют последовательность конечных частичных изоморфизмов, удовлетворяющих условиям из определения $m$-эквивалентности $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$. Замечание доказано.

Замечание 6. Пусть $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i$, $i \in \mathbb{N}$, — счетные суператомные булевы алгебры с выделенной подалгеброй и $\mathfrak{A}_i \equiv_m \mathfrak{B}_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i \equiv_m \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_i$.

Доказательство. Определим частичный изоморфизм $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} f_i : \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i \to \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_i$, действующий покомпонентно. Далее доказательство аналогично доказательству замечания 5. Замечание доказано.

**Предложение 9.** *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — локальные алгебры, принадлежащие $K_n$. Тогда прямое произведение алгебр $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ — локальная алгебра.*

Доказательство. В силу предложения 4 алгебра $\mathfrak{M} \in K_n$ локальна в том и только том случае, когда множество $\{k \mid \mathfrak{M} \models \exists x T_k(x)\}$ конечно. Пусть $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \models \exists x T_k(x)$. В силу предложения 1 формула $T_k(x)$ неисчезающая. Стало быть, $\mathfrak{A} \models \exists x T_k(x)$ или $\mathfrak{B} \models \exists x T_k(x)$. Следовательно, $\{k \mid \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \models \exists x T_k(x)\} \subseteq \{k \mid \mathfrak{A} \models \exists x T_k(x)\} \cup \{k \mid \mathfrak{B} \models \exists x T_k(x)\}$. Так как алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ локальны, множества $\{k \mid \mathfrak{A} \models \exists x T_k(x)\}$ и $\{k \mid \mathfrak{B} \models \exists x T_k(x)\}$ конечны. Отсюда следует, что алгебра $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ локальная. Предложение доказано.

**Предложение 10.** *Пусть $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k$ — локальные алгебры, принадлежащие классу $K_n$, $\mathfrak{A} = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i$ — прямая сумма алгебр и для каждого $i \in \mathbb{N}$ алгебра $\mathfrak{A}_i$ изоморфна одной из алгебр $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k$. Тогда $\mathfrak{A}$ — локальная алгебра.*

Доказательство. Пусть $j \leq k$ и множество $I = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{B}_j\}$ конечно. Тогда $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_j^l \times \sum\limits_{i \in \mathbb{N} \setminus I} \mathfrak{A}_i$, где $l$ — число элементов в множестве $I$. В силу предложения 9 алгебра $\mathfrak{B}_j^l$ локальна. Поэтому необходимо доказать лишь локальность алгебры $\sum\limits_{i \in \mathbb{N} \setminus I} \mathfrak{A}_i$. Стало быть, без ограничения общности можно считать, что каждая алгебра $\mathfrak{B}_j$ входит в прямую сумму бесконечное число раз.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{B}_j$ для $j \leq k$. Она локальна, следовательно, любой ее элемент есть объединение конечного числа попарно не пересекающихся простых элементов. Каждый $l$-простой элемент с конечной характеристикой $w(l) < \infty$ разлагается в объединение конечного числа $l$-простых элементов с характеристикой $w(l) = 1$. Стало быть, $\mathfrak{B}_j \cong \mathfrak{C}_1 \times \dots \times \mathfrak{C}_s$, где $N(\mathfrak{C}_i) = \{l_i\}$, $w_{\mathfrak{C}_i}(l_i) = 1$ или $w_{\mathfrak{C}_i}(l_i) = \infty$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что для любого $j \leq k$ найдется $l_j$ такое, что $N(\mathfrak{B}_j) = \{l_j\}$, т. е. $\mathfrak{B}_j$ — $l_j$-простая алгебра и при этом $w_{\mathfrak{B}_j}(l_j) = 1$ или $w_{\mathfrak{B}_j}(l_j) = \infty$.

Далее, пусть для некоторых $i, j \leq k$, $i \neq j$, выполнено $T_{l_i} \leq T_{l_j}$ и $l_i \neq l_j$. Тогда $N(\mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}_j) = \{l_j\}$ и $w_{\mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}_j}(l_j) = w_{\mathfrak{B}_j}(l_j)$. Тем самым алгебра $\mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}_j$ является $l_j$-простой и при этом $w_{\mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}_j}(l_j) = 1$ либо $w_{\mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}_j}(l_j) = \infty$. Поскольку $\mathfrak{B}_i$ и $\mathfrak{B}_j$ входят в прямую сумму бесконечное число раз, можно переставить слагаемые так, чтобы вместо алгебр $\mathfrak{B}_i$ и $\mathfrak{B}_j$ бесконечное число раз в прямой сумме присутствовало их произведение $\mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}_j$. Стало быть, без ограничения общности в силу предложения 1 можно считать, что для любых $i, j \leq k$ выполнено $T_{l_i} \# T_{l_j}$.

Положим $R = \{l_1, \dots, l_k\}$. Докажем, что $\mathfrak{A} \models T_R(1)$. Пусть $\beta = \max\{o(\mathfrak{B}_1), \dots, o(\mathfrak{B}_k)\}$. Тогда $\tau(\mathfrak{A}) = (\beta + 1, 1)$. Обозначим $\alpha = \beta + 1 = o(\mathfrak{A})$. Несложно доказать следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть элемент $a_i \in \mathfrak{A}$ соответствует элементу $1^{\mathfrak{A}_i}$ алгебры $\mathfrak{A}_i$. Рассмотрим элемент $a \in \mathfrak{A}$. Тогда*

(а) *если $o(a) < \alpha$, то найдется число $m$ такое, что $a \leq a_1 \cup \dots \cup a_m$;*

(б) *если $o(a) = \alpha$, то найдется число $m$ такое, что $a_i < a$ для любого $i \geq m$.*

Рассмотрим $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $o(a) = \alpha$. Тогда для любого числа $l \in R$ выполнено $\mathfrak{A} \models (\exists z \leq a) T_l(z)$. Стало быть, $\mathfrak{A} \models \neg \pi_R(a)$, откуда $\mathfrak{A} \models \neg \pi_R(1)$. Далее, пусть для некоторого элемента $b \in \mathfrak{A}$ и для $l \in R$ имеет место $\mathfrak{A} \models (\forall z \leq b) \neg T_l(z)$. Докажем, что $\mathfrak{A} \models \pi_R(b)$. В самом деле, если $o(b) = \alpha = o(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{A} \models (\exists z \leq b) T_l(z)$. Отсюда следует, что $o(b) < \alpha$. Тогда для некоторого натурального числа $m$ выполнено $b \leq a_1 \cup \dots \cup a_m$, где $a_i$ соответствует $1^{\mathfrak{A}_i}$ — единичному элементу алгебры $\mathfrak{A}_i$. Так как $\mathfrak{A}_i \models \pi_R(a_i)$, то $\mathfrak{A} \models \pi_R(b)$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{A} \models \forall y \neg T_i(y)$ для всех $i \in R^*$. Докажем, что $\mathfrak{A} \models \forall y \forall z (y \cap z = 0 \to (\pi_R(y) \vee \pi_R(z)))$. В самом деле, по построению $\tau(\mathfrak{A}) = (\alpha, 1)$. Следовательно, для любых непересекающихся элементов $a, b \in \mathfrak{A}$ либо $o(a) < \alpha$, либо $o(b) < \alpha$. Стало быть, $\mathfrak{A} \models \pi_R(a)$ или $\mathfrak{A} \models \pi_R(b)$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{A} \models T_R(1)$ и, следовательно, для некоторого номера $l$ выполнено $\mathfrak{A} \models T_l(1)$. Значит, алгебра $\mathfrak{A}$ локальная. Предложение доказано.

**Предложение 11.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу $K_n$. Тогда для любого натурального числа $m$ найдется локальная алгебра $\mathfrak{B} \in K_n$ такая, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям предложения. Утверждение докажем индукцией по ординальному типу алгебры $\mathfrak{A}$.

Базис индукции: $o(\mathfrak{A}) = 0$. В этом случае $\mathfrak{A}$ — конечная алгебра и, следовательно, она локальная.

Шаг индукции: предположим, что для всех ординалов $\beta < o(\mathfrak{A})$ предложение доказано. Так как $\mathfrak{A}$ суператомная и принадлежит классу $K_n$, то $\mathfrak{A}$ есть прямое произведение конечного числа алгебр, принадлежащих классу $K_n$, с типом суператомности $(o(\mathfrak{A}), 1)$. Поэтому в силу предложения 9 без ограничения общности можно считать, что $\tau(\mathfrak{A}) = (o(\mathfrak{A}), 1)$. Тогда по предложению 8 найдется разложение алгебры $\mathfrak{A}$ в прямую сумму алгебр $\mathfrak{A}_i$, $i \in \mathbb{N}$, принадлежащих классу $K_n$, ординальный тип которых меньше ординального типа алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A} \cong \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_i$, $o(\mathfrak{A}_i) = (\beta_i, 1)$, $\beta_i < \alpha$. По индукционному предположению для каждого числа $i \in \mathbb{N}$ найдется локальная алгебра $\mathfrak{C}_i$ такая, что $\mathfrak{A}_i \equiv_m \mathfrak{C}_i$. Так как число $m$-типов конечно, без ограничения общности можно считать, что найдутся локальные алгебры $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k$ такие, что для любого $i \in \mathbb{N}$ алгебра $\mathfrak{C}_i$ изоморфна алгебре $\mathfrak{B}_l$ для некоторого $l \leq k$. В силу замечания 6 $\mathfrak{A} \equiv_m \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}_i$, причем каждая алгебра $\mathfrak{C}_i$ изоморфна одной из $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k$. Поэтому в силу предложения 10 алгебра $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}_i$ локальна и исходная алгебра $\mathfrak{A}$ $m$-эквивалентна локальной алгебре $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}_i$. Предложение доказано.

**Предложение 12.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — локальная суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема тогда и только тогда, когда $w_{\mathfrak{A}}(l) < \infty$ для всех $l \in N(\mathfrak{A})$.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{A}$ — локальная алгебра и $w_{\mathfrak{A}}(l) < \infty$ для всех $l \in N(\mathfrak{A})$. Докажем, что элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема. Рассмотрим следующее множество предложений:

$$\Big\{\mu_{l,k}(x) = (\exists x_1 \leq x)\dots(\exists x_k \leq x)\Big(\Big(\bigwedge_{i\neq j}(x_i \cap x_j = 0)\Big)\& \bigwedge_{i\leq k} T_l(x_i)\Big) \mid l, k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Обозначим $s = \max N(\mathfrak{A})$.

Докажем, что конечное множество предложений

$$\{\nu_l = (\mu_{l,k}(1)\&\neg\mu_{l,k+1}(1)) \mid l \in N(\mathfrak{A}),\ k = w_{\mathfrak{A}}(l)\} \cup \Big\{\phi = \Big(\forall z \bigwedge_{i\in R^*} \neg T_i(z)\Big)\Big\},$$

где $R^* = \{i \leq s + 2^s \mid T_i \# T_l$ для любого $l \in N(\mathfrak{A})\}$, аксиоматизирует элементарную теорию $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Заметим, что $\mathfrak{A} \models \big(\big(\bigwedge\limits_{l\in N(\mathfrak{A})} \nu_l\big)\&\phi\big)$.

Пусть $\mathfrak{B} \in K_n$ и $\mathfrak{B} \models \big(\big(\bigwedge\limits_{l\in N(\mathfrak{A})} \nu_l\big)\&\phi\big)$. Докажем, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Пусть $R_1, \dots, R_m \subseteq \{1, \dots, s\}$ — все конечные множества, удовлетворяющие следующим условиям:

а) для любого $i \le m$ мощность множества $|R_i|$ не меньше 2;

б) для любых $i \le m$, $u, v \in R_i$ выполнено $T_u \# T_v$.

Тогда найдется число $k > s$ такое, что

$$\{T_1(x), \ldots, T_k(x)\} = \{T_1(x), \ldots, T_s(x), T_{R_1}(x), \ldots, T_{R_m}(x)\}.$$

Ясно, что $m \le 2^s$ и, следовательно, $k \le s + 2^s$.

Предположим, что найдется $l > s + 2^s$ — наименьшее число такое, что $\mathfrak{B} \models \exists x T_l(x)$. Тогда найдется множество $R \subseteq \mathbb{N}$ такое, что $T_l(x) = T_R(x)$. Так как $l > s + 2^s$, то $R \nsubseteq \{1, \ldots, s\}$. Стало быть, найдется число $t > s$ такое, что $t \in R$. Следовательно, $\mathfrak{B} \models \exists x T_t(x)$. В силу минимальности числа $l$ получаем, что $t \le s + 2^s$. Однако так как $\mathfrak{B} \models \phi$, то $\mathfrak{B} \models \forall z \neg T_t(z)$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{B} \models \forall z \neg T_l(z)$ для всех $l > s + 2^s$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{B}$ локальна.

Рассмотрим значение характеристической функции $w_{\mathfrak{A}}(l)$. Возможны следующие случаи.

Случай 1: $l > s + 2^s$.

В этом случае по доказанному $\mathfrak{B} \models \forall z \neg T_l(z)$. Стало быть, $w_{\mathfrak{B}}(l) = 0$. Так как $s = \max N(\mathfrak{A}) = \max M(\mathfrak{A})$, то $w_{\mathfrak{A}}(l) = 0$.

Случай 2: $s < l \le s + 2^s$.

Так как $\mathfrak{B} \models \phi$ и $l > \max N(\mathfrak{A}) = \max M(\mathfrak{A})$, то $w_{\mathfrak{A}}(l) = 0 = w_{\mathfrak{B}}(l)$.

Случай 3: $l \le s$, $l \notin M(\mathfrak{A})$.

Тогда по определению $w_{\mathfrak{A}}(l) = 0$. Следовательно, $l \in R^*$. Отсюда из $\mathfrak{B} \models \phi$ следует $w_{\mathfrak{B}}(l) = 0$.

Случай 4: $l \le s$, $l \in M(\mathfrak{A}) \setminus N(\mathfrak{A})$.

В этом случае найдется число $p \in N(\mathfrak{A})$ такое, что $T_l \le T_p$ и $l \ne p$. Так как $\mathfrak{A} \models \nu_p$ и $\mathfrak{B} \models \nu_p$, то $w_{\mathfrak{A}}(p) \ne 0$ и $w_{\mathfrak{B}}(p) \ne 0$. Значит, $w_{\mathfrak{A}}(l) = \infty = w_{\mathfrak{B}}(l)$.

Случай 5: $l \le s$, $l \in N(\mathfrak{A})$.

Тогда так как $\mathfrak{A} \models \nu_l$ и $\mathfrak{B} \models \nu_l$, имеем $w_{\mathfrak{A}}(l) = w_{\mathfrak{B}}(l)$.

Таким образом, алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ локальны, а их характеристические функции совпадают. Следовательно, в силу теоремы 1 их элементарные теории совпадают. Стало быть, формула $\big((\bigwedge\limits_{l \in N(\mathfrak{A})} \nu_l) \& \phi\big)$ аксиоматизирует элементарную теорию $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.

($\Rightarrow$) Рассмотрим локальную алгебру $\mathfrak{A}$. Пусть ее элементарная теория $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ аксиоматизируема предложением $\phi$. Докажем, что $w_{\mathfrak{A}}(l) < \infty$ для всех $l \in N(\mathfrak{A})$.

Предположим, напротив, что $w_{\mathfrak{A}}(l) = \infty$ и $l \in N(\mathfrak{A})$. Так как $\mathfrak{A}$ локальна, она является прямым произведением конечного числа простых алгебр. Следовательно, найдутся $l$-простая алгебра $\mathfrak{B}$ и алгебра $\mathfrak{C}$ такие, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, причем $w_{\mathfrak{B}}(l) = \infty$ и $w_{\mathfrak{C}}(l) = 0$. Если $l \le n$, то в силу п. (д) предложения 10 из [4] $w_{\mathfrak{A}}(l) < \infty$. Стало быть, $l > n$. Пусть $m$ — число кванторов в предложении $\phi$, аксиоматизирующем теорию $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Рассмотрим $l$-простую алгебру $\mathfrak{B}_1$ такую, что $w_{\mathfrak{B}_1}(l) = 2^m$. Апеллируя к предложению 11 в [4], заключаем, что $\mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{B}_1$. Стало быть, $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{C}$. Последнее влечет $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{C} \models \phi$. Следовательно, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{C}$, при этом $w_{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{C}}(l) = 2^m \ne w_{\mathfrak{A}}(l)$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

**Следствие 3.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — локальная суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Тогда для любого натурального числа $m$ найдется $\mathfrak{B}$ — конечно-аксиоматизируемая локальная суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины такая, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.*

Доказательство вытекает из предложения 12 и предложения 11 из [4].

**Теорема 3.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ локальна и $w_{\mathfrak{A}}(l) < \infty$ для всех $l \in N(\mathfrak{A})$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема. Докажем, что $\mathfrak{A}$ локальна. Пусть $m$ — длина предложения $\phi$, аксиоматизирующего $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Тогда по предложению 11 найдется локальная алгебра $\mathfrak{B}$ такая, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B} \models \phi$, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Стало быть, $\mathfrak{A}$ локальна. Далее, апеллируя к предложению 12, получаем требуемое. Теорема доказана.

**Следствие 4.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу $K_n$. Тогда для любого натурального числа $m$ найдется конечно-аксиоматизируемая алгебра $\mathfrak{B} \in K_n$ такая, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.*

Доказательство следует из предложения 11 и следствия 3.

**Следствие 5.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — суператомная булева алгебра с выделенной подалгеброй конечной ширины. Элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ является конечно-аксиоматизируемой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ представима в виде прямого произведения $\mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_k$ конечного числа алгебр $\mathfrak{A}_i$, на каждой из которых реализуется некоторая формула $T_{j_i}(1)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{A}_i \models T_{j_i}(1)$. Тогда следующее предложение аксиоматизирует элементарную теорию $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$:

$$(\exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_k)\Big(\Big(\Big(\bigwedge_{i \neq j}(y_i \cap y_j = 0)\Big) \& T_{j_1}(y_1) \& \dots \& T_{j_k}(y_k)\Big) \& (y_1 \cup \dots \cup y_k = 1)\Big).$$

Обратно, пусть элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема. Тогда в силу теоремы 3 $\mathfrak{A}$ локальна и $w_{\mathfrak{A}}(l) < \infty$ для всех $l \in N(\mathfrak{A})$. Следовательно, $\mathfrak{A}$ представима в виде прямого произведения конечного числа простых алгебр с конечной характеристикой, а именно $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_k$, $N(\mathfrak{A}_i) = \{l_i\}$, $N(\mathfrak{A}) = \{l_1, \dots, l_k\}$ и $w_{\mathfrak{A}_i}(l_i) < \infty$ для $i \leq k$. Отсюда следует существование требуемого разложения. Следствие доказано.

Определение 7. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *идемпотентной*, если $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, и *неидемпотентной*, если $\mathfrak{A}$ не является идемпотентной.

Замечание 7. Пусть $\mathfrak{A}$ — локальная неисчезающая суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Алгебра $\mathfrak{A}$ неидемпотентна тогда и только тогда, когда найдется число $l$ такое, что $N(\mathfrak{B}) = \{l\}$ и $w_{\mathfrak{B}}(l) = 1$.

Замечание 8. Пусть $\mathfrak{A}$ — локальная неисчезающая неидемпотентная суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Тогда элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям замечания. Так как $\mathfrak{A}$ неисчезающая и локальная, $N(\mathfrak{A}) = \{l\}$ для некоторого натурального числа $l$.

Предположим, что $w_{\mathfrak{A}}(l) = \infty$. Тогда $w_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}}(l) = \infty$ и $N(\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}) = \{l\}$. Стало быть, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$. Полученное противоречие доказывает, что $w_{\mathfrak{A}}(l) = 1 < \infty$. Стало быть, $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема.

**Теорема 4.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_k$ для некоторых локальных неисчезающих неидемпотентных алгебр $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_k$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_k$ для некоторых локальных неисчезающих неидемпотентных $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_k$. Тогда в силу замечания 8 для каждого $i \le k$ элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_i)$ конечно-аксиоматизируема. Так как алгебры $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_k$ локальны, $\mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_k$ — локальная алгебра. Докажем, что теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема. Предположим противное. Тогда найдется число $l \in N(\mathfrak{A})$ такое, что $w_{\mathfrak{A}}(l) = \infty$. В силу неисчезаемости алгебр $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_k$ найдется число $i \le k$ такое, что $w_{\mathfrak{A}_i}(l) = \infty$ и $l \in N(\mathfrak{A}_i)$. Полученное противоречие доказывает конечную аксиоматизируемость теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.

Пусть $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема. Тогда $\mathfrak{A}$ локальна. Из следствия 5 вытекает, что алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_k$ представима в виде прямого произведения конечного числа локальных неисчезающих алгебр, на каждой из которых реализуется некоторая формула $T_i(1)$. В силу замечания 7 каждая алгебра $\mathfrak{A}_i$, $i \le k$, неидемпотентна. Теорема доказана.

**Следствие 6.** *Пусть $\mathfrak{A},\mathfrak{B} \in K_n$ и теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}), \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ конечно-аксиоматизируемы. Тогда теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})$ конечно-аксиоматизируема.*

## 4. Критерии элементарной эквивалентности и разрешимости элементарных теорий

Ранее авторами [4] были получены критерии элементарной эквивалентности для локальных алгебр из $K_n$. Подкласс локальных алгебр класса $K_n$ содержит ровно счетное число элементарно не эквивалентных алгебраических систем, в то время как сам класс $K_n$ для $n \ge 3$, как следует из [4], содержит ровно континуум элементарно не эквивалентных алгебраических систем. В настоящем разделе получены критерии элементарной эквивалентности произвольных алгебраических систем, принадлежащих классу $K_n$, и разрешимости их элементарных теорий.

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечно-аксиоматизируемая алгебра, принадлежащая классу $K_n$. Тогда $\mathfrak{A}$ локальна и, следовательно, множество $M(\mathfrak{A})$ конечно. Пусть $s = \max M(\mathfrak{A})$. Обозначим $K(\mathfrak{A}) = \langle l_0,\dots,l_s\rangle$, где для $i \le s$ выполнено

а) $l_i = 0$, если $i \notin M(\mathfrak{A})$;

б) $l_i = 1$, если $i \in M(\mathfrak{A}) \setminus N(\mathfrak{A})$;

в) $l_i = w_{\mathfrak{A}}(i)$, если $i \in N(\mathfrak{A})$.

Замечание 9. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — конечно-аксиоматизируемые алгебры, принадлежащие классу $K_n$. $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $K(\mathfrak{A}) = K(\mathfrak{B})$.

Рассмотрим произвольную алгебру $\mathfrak{A}$, принадлежащую классу $K_n$.

Определение 8. *Спектром относительно $m$-эквивалентности* ($m$*-спектром*) назовем множество $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) \leftrightharpoons \{\langle m, \max M(\mathfrak{B}), c^{\max M(\mathfrak{B})+1}(K(\mathfrak{B}))\rangle \mid \mathfrak{B}$ конечно-аксиоматизируема и $\mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{A}\}$, где $c^k$ — канторовская нумерация кортежей длины $k$.

**Теорема 5.** *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебры, принадлежащие классу $K_n$. Выполнено $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$.

Доказательство. Если $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то, как следует из определения $m$-спектра, $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$.

Обратно, пусть $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$. Пусть $\phi$ — предложение языка $\sigma^*$, $m$ — длина предложения $\phi$ и $\mathfrak{A} \models \phi$. Тогда найдется конечно-аксиоматизируемая алгебра $\mathfrak{C}$ такая, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{C}$. Стало быть, $\mathfrak{C} \models \phi$. Так как $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{C}$, то $\langle m, \max M(\mathfrak{C}), C^{\max M(\mathfrak{C})+1}(K(\mathfrak{C}))\rangle \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$. Отсюда следует, что $\mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{C}$ и, стало быть, $\mathfrak{B} \models \phi$. Таким образом, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Теорема доказана.

Исходя из теоремы 3, а также из синтаксического определения последовательности формул $T_k(x)$, $k \geq 1$, и характеристики $w$, несложно доказать следующие утверждения.

Замечание 10. Множество $X_n = \{\langle l, k\rangle \mid$ существует конечно-аксиоматизируемая алгебра $\mathfrak{B} \in K_n$ такая, что $\max M(\mathfrak{B}) = l$ и $c^{l+1}(K(\mathfrak{B})) = k\}$ перечислимо.

Замечание 11. Для любой упорядоченной пары $\langle l, k\rangle \in X_n$ существует и единственна с точностью до элементарной эквивалентности конечно-аксиоматизируемая алгебра $\mathfrak{B}$ такая, что $\max M(\mathfrak{B}) = l$ и $c^{l+1}(K(\mathfrak{B})) = k$.

**Теорема 6.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, принадлежащая классу $K_n$. Элементарная теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ *разрешима тогда и только тогда, когда $m$-спектр алгебры $\mathfrak{A}$ перечислим, т. е. когда множество* $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$ *перечислимо.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ разрешима. Рассмотрим тройку $\langle m, l, k\rangle$ такую, что $\langle l, k\rangle \in X_n$. В этом случае найдется конечно-аксиоматизируемая алгебра $\mathfrak{B} \in K_n$ такая, что $l = \max M(\mathfrak{B})$ и $C^{l+1}(K(\mathfrak{B})) = k$. Следовательно, $\langle m, l, k\rangle \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) \iff \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$. Таким образом, чтобы эффективно определить $\langle m, l, k\rangle \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$ или $\langle m, l, k\rangle \notin \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$, достаточно эффективно проверить $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$. В предложении 1 построено конечное множество формул $X_{m,0}$ такое, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда для любой формулы $\psi \in X_{m,0}$ выполнено $\mathfrak{A} \models \psi \iff \mathfrak{B} \models \psi$. Стало быть, $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ эффективно проверяется в силу конечности множества $X_{m,0}$, разрешимости элементарной теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ и полноты предложения, аксиоматизирующего $\mathrm{Th}\,\mathfrak{B}$, которое эффективно строится по кортежу $\langle l, k\rangle$. Таким образом, эффективно проверили $\langle m, l, k\rangle \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$ или $\langle m, l, k\rangle \notin \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$. Последнее вместе с перечислимостью множества $X_n$ влечет перечислимость $m$-спектра алгебры $\mathfrak{A}$.

($\Leftarrow$) Пусть множество $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$ перечислимо. Рассмотрим произвольное предложение $\phi$ языка $\sigma^*$. Пусть $m$ — длина предложения $\phi$. В силу следствия 3 и перечислимости $m$-спектра $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$ эффективно найдем числа $l, k \in \mathbb{N}$ такие, что $\langle m, l, k\rangle \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$. Рассмотрим конечно-аксиоматизируемую алгебру $\mathfrak{C}$ такую, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{C}$, $\mathrm{Max}\, M(\mathfrak{C}) = l$ и $C^{l+1}(K(\mathfrak{C})) = k$. Тогда $\mathfrak{A} \models \phi \iff \mathfrak{C} \models \phi$. Таким образом, вопрос $\phi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ или $\phi \notin \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ сводится к вопросу $\phi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{C})$ или $\phi \notin \mathrm{Th}(\mathfrak{C})$, что эффективно проверяется, как доказано ранее. Следовательно, элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ разрешима. Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Ершов Ю. Л.* Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 3. С. 17–38.

**2.** *Гончаров С. С.* Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 31–40.
**3.** *Rabin M.* The theory of Boolean algebras with a distinguished subalgebra is undecidable // Ann. Sci. Univ. Clermont 60, Math. 1976. V. 13. P. 129–134.
**4.** *Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В.* Локальные и неисчезающие суператомные булевы алгебры с выделенной плотной подалгеброй // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 6. С. 822–847.
**5.** *Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В.* Автоморфизмы булевых алгебр, определяемые неподвижными элементами // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 5. С. 623–637.
**6.** *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Науч. книга, 1996.

*Статья поступила 24 марта 2016 г.*

Пальчунов Дмитрий Евгеньевич, Трофимов Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
palch@math.nsc.ru