Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 517.54

УСЛОВИЕ ПРОДОЛЖИМОСТИ БИЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Д. А. Троценко

Аннотация. Дано новое определение λ-относительно связных множеств, обобщение равномерно совершенных множеств. Это определение эквивалентно старому при больших λ, но позволяет получать устойчивые свойства при малых λ. Доказана λ-относительная связность канторовых множеств при соответствующих λ. Основной результат: *множество $A \subset \mathbb{R}$ допускает продолжение всех M-билипшицевых функций $f : A \to \mathbb{R}$ до M-билипшицевых функций $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда A λ-относительно связно*. Приведены точные оценки зависимости M и λ.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.615

Ключевые слова: билипшицево отображение, продолжение отображения.

1. Введение

λ-Связные множества были определены автором и Вяйсяля в [1]. Понятие λ-связности — естественное обобщение связности: любое множество, ε-близкое в метрике Громова — Хаусдорфа к связному, будет λ-связным при $\lambda > 2\varepsilon$. В [1] для произвольного метрического пространства определено множество непустых сфер, названное *верхним множеством*. Оно играет важную роль в теории билипшицевых и квазисимметрических отображений. В частности, здесь доказано, что любое η-квазисимметрическое отображение метрического пространства является степенным тогда и только тогда, когда его верхнее множество λ-связно, а также сформулировано условие на множество, равносильное λ-связности множества сфер. Оно названо λ-*относительной связностью* (см. неравенство (1) определения). Нетрудно заметить, что λ-связность — свойство, квазиинвариантное при билипшицевых отображениях, а λ-относительная связность квазисохраняется при квазисимметрических отображениях.

2. Обозначения и определения

Через $a \wedge b$ и $a \vee b$ обозначаем $\min\{a, b\}$ и $\max\{a, b\}$ соответственно, через $|x - y|$ — расстояние между x и y — элементами произвольного метрического пространства, $\overline{B}(x, r)$ — замкнутый шар радиуса r с центром x. Биективное отображение $f : A \to f(A)$ метрических пространств называем *M-билипшицевым* (пишем M-BL), если для любых $x, y \in A$ выполнены неравенства $M^{-1}|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Определение 2.1. Последовательность $(x_1, \dots, x_k)$ точек метрического пространства называется *α-относительной в смысле* [1], или *последовательностью класса α-R_1*, если $x_i \neq x_{i-1}$ для любого $i = 1, \dots, k - 1$ и выполнены неравенства

$$\alpha^{-1} \le \frac{|x_{i-1} - x_i|}{|x_i - x_{i+1}|} \le \alpha. \tag{1}$$

Здесь назовем последовательность λ-*относительной*, или *последовательностью класса* λ-R, или λ-R-*последовательностью*, если вместо (1) она удовлетворяет неравенству

$$\frac{|x_{i-1} - x_{i+1}|}{|x_i - x_{i-1}| \wedge |x_i - x_{i+1}|} \le \lambda. \tag{2}$$

Лемма 2.2 (об эквивалентности определений). *Последовательность класса α-R_1 является λ-R-последовательностью при $\lambda = 1 + \alpha$. Обратно, λ-R-последовательность является последовательностью класса α-R_1 при $\alpha = 1 + \lambda$.*

Доказательство. Действительно,

$$\frac{|x_{i-1} - x_{i+1}|}{|x_i - x_{i-1}| \wedge |x_i - x_{i+1}|} \le \frac{|x_{i-1} - x_i| + |x_i - x_{i+1}|}{|x_i - x_{i-1}| \wedge |x_i - x_{i+1}|} \le \alpha + 1,$$

$$\frac{|x_{i-1} - x_i|}{|x_i - x_{i+1}|} \le \frac{|x_{i-1} - x_{i+1}| + |x_i - x_{i+1}|}{|x_i - x_{i+1}|} \le \lambda + 1.$$

Аналогично

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_i - x_{i-1}|} \le \lambda + 1.$$

Замечание 2.3. Параметр λ может принимать малые значения, а α — нет. Значит, мы получили более тонкий инструмент, при помощи которого можно ставить и решать вопросы устойчивости.

Определение 2.4. Последовательность $(x_0, \dots, x_k)$ в $\mathbb{R}$ назовем *ориентированной*, если для каждого $i = 1, \dots, k-1$ выполнены неравенства $x_i < x_{i\pm 1}$ или $x_i > x_{i\pm 1}$, т. е. знаки неравенств чередуются.

Лемма 2.5. *Пусть $\lambda < 2$. Тогда любая λ-R-последовательность в $\mathbb{R}$ ориентирована.*

Лемма 2.6. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и последовательность $(x_0, \dots, x_k)$ λ-относительна в A. Если она не ориентирована, то ее можно включить как подпоследовательность ориентированной λ-R-последовательности в A с теми же начальной и конечной парами.*

Доказательство. При $\lambda < 2$ последовательность ориентирована. Считаем $\lambda \ge 2$. Пусть $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$. Меняем последовательность (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) на ориентированную $(x_{i-1}, x_i, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+1})$. Надо проверить выполнение неравенства (2) для четырех троек. Нетрудно видеть, что одно из них выполнено с константой 0, два из них — с константой 1, четвертое — с константой $\lambda - 1$. Первая и последняя пары этой последовательности совпадают с соответствующими парами исходной тройки, но четность числа шагов изменилась. Применив эту замену конечное число раз, получаем требуемую последовательность. □

Лемма 2.7 (процесс максимизации). *Пусть $(x_0, \dots, x_k)$ — ориентированная λ-R-последовательность, $x_0 < x_1$. Тогда последовательность $(y_0, \dots, y_k)$ с $y_{2i} = \min\{x_0, \dots, x_{2i}\}$, $y_{2i+1} = \max\{x_0, \dots, x_{2i+1}\}$ будет ориентированной и λ-относительной.*

Доказательство. Имеем

$$|y_{i-1} - y_{i+1}| \le |x_{i-1} - x_{i+1}|,$$

$$|y_{i-1} - y_i| \wedge |y_i - y_{i+1}| \geq |x_{i-1} - x_i| \wedge |x_i - x_{i+1}|.$$

Отсюда сразу следует оценка (2). $\square$

Замену последовательности $(x_0, \dots, x_k)$ на $(y_0, \dots, y_k)$ назовем *процессом максимизации последовательности* $(x_0, \dots, x_k)$. Заметим, что последовательность $|y_j - y_{j+1}|$ неубывающая.

Определение 2.8. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$. Через $P(A)$ обозначим множество упорядоченных пар из A, т. е. $P(A) = \{(x, y) \in A \times A : x < y\}$.

λ-Компонентой, или *компонентой λ-относительной связности*, назовем подмножество γ пар из $P(A)$ такое, что любые две пары в γ можно соединить конечной λ-R-последовательностью. (Очевидно, что установлено отношение эквивалентности на $P(A)$.)

Определение 2.9 (проекции). Положим $\pi L((x, y)) = x$, $\pi R((x, y)) = y$, $\pi((x, y)) = \{x, y\}$. *Проекция* $\pi(U)$ подмножества $U \subset P(A)$ есть объединение проекций всех пар из подмножества.

Будем говорить, что $U \subseteq P(A)$ *ограничено*, если $\pi(U)$ ограничена. Заметим, что мы не задали метрику на $P(A)$.

Лемма 2.10. *Пусть $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3]$. Если пары (a_1, b_1) и (a_3, b_3) лежат в одной λ-компоненте, то (a_2, b_2) лежит в той же λ-компоненте $P(A)$.*

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0, \dots, x_k, y_k)$ — ориентированная λ-R-последовательность, $x_0 = a_1$, $y_0 = b_1$, $x_k = a_3$, $y_k = b_3$. Для $i = 0, \dots, k$ положим $u_i = x_i \wedge a_2$, $v_i = y_i \vee b_2$. Последовательность $u_0, v_0, \dots, u_k, v_k$ ориентированная и, как легко заметить, λ-относительная, при этом $(u_k, v_k) = (a_2, b_2)$. $\square$

Исследование относительно связных множеств продолжено в [2, 3].

Теорема 2.11 (о неограниченной λ-компоненте). *Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$. Найдется не более одной неограниченной λ-компоненты $P(A)$.*

Доказательство. Случай 1: $\inf A = a > -\infty$. Пусть γ — неограниченная λ-компонента $P(A)$. Выберем в ней пары (x_i, y_i) такие, что $y_i \to +\infty$ при $i \to \infty$. Соединив эти пары последовательно λ-относительными последовательностями и применив процесс максимизации из леммы 2.7, получим бесконечную λ-относительную последовательность $(u_1, v_1, \dots, u_k, v_k, \dots)$ такую, что $v_i \nearrow +\infty$, $u_i \searrow u \geq a$.

Выберем k такое, что $|u_k - u| < |u - a|$ и $|v_k - u_k| > 2|u - a|/\lambda$. Тогда для любого $x \in A \cap [a, u_k]$

$$\frac{|x - u_k|}{|v_k - u_k|} \leq \lambda.$$

Значит, пары (x, u_k) лежат в γ.

Предположим, что нашлась другая неограниченная λ-компонента γ_1. Возьмем пару $(x_1, y_1) \in \gamma$ такую, что $|x_1 - a| \leq 1$. Выберем $(x_2, y_2) \in \gamma_1$ такую, что $y_2 > y_1$. Используя предыдущие рассуждения, можем считать, что $x_2 = x_1$. Теперь выберем $y_3 > y_2$ такую, что $(x_1, y_3) \in \gamma$. По лемме 2.10 $(x_1, y_2) \in \gamma$, т. е. $\gamma_1 = \gamma$.

Случай, когда A ограничено сверху, но не снизу, аналогичен рассмотренному.

Случай 2: A не ограничено ни сверху, ни снизу. Докажем, что в γ — неограниченной λ-компоненте $P(A)$ — найдется последовательность $(x_0, y_0, , \dots,$

$x_k, y_k, \dots)$ такая, что $x_i \searrow -\infty$, $y_i \nearrow +\infty$. Как и в первом случае, найдем последовательность пар (u_i, v_i) такую, что $v_i \nearrow +\infty$, $u_i \searrow u$. Если $u = -\infty$, то утверждение доказано. Если $u > -\infty$, то

$$\frac{|x - u_i|}{|v_i - u_i|} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и по любому $x_j \in A$, $x_j < u$, найдем $v_i = v_{i(j)}$ такое, что

$$\frac{|x_j - u_i|}{|v_i - u_i|} < \alpha,$$

а значит, пара $(x_j, v_{i(j)})$ принадлежит γ. Осталось построить последовательность $x_j \searrow -\infty$ и λ-R-последовательность пар $(x_j, v_{j(i)})$. Соединяя последовательно построенные пары и применяя в очередной раз процесс максимизации, получаем искомую последовательность.

Предположим, что γ_1 — другая неограниченная λ-компонента $P(A)$. В ней так же найдем последовательность $(u_0, v_0, , \dots, u_k, v_k, \dots)$ такую, что $u_i \searrow -\infty$, $v_i \nearrow +\infty$. По любой паре $(x, y) \in \gamma$ найдем i такое, что $u_i < x$, $v_i > y$. По этому i находим j такое, что $x_j < u_i$, $y_j > v_i$. Лемма 2.10 утверждает, что в этом случае $(u_i, v_i) \in \gamma$, а значит, $\gamma_1 = \gamma$. $\square$

3. Равномерно совершенные множества

Определение 3.1. Метрическое пространство A называется *c-равномерно совершенным*, если из условия $\overline{B(x,r)} \neq A$ следует, что $\overline{B(x,r)} \setminus \overline{B(x,r/c)} \neq \varnothing$.

Класс равномерно совершенных множеств введен в [4] для замкнутых неограниченных множеств в $\mathbb{R}^2$ и затем нашел многочисленные применения в различных вопросах анализа (см., например, [5, 6]). В [7] З. Ш. Ибрагимов подробно рассматривает условия метрической плотности множества, используя условие Поммеренке. В [1, теорема 4.13] доказана

Теорема 3.2. *Пусть A — c-равномерно совершенное метрическое пространство. Оно α-R_1-связно для всех $\alpha > c$. Обратно, если пространство A α-R_1-связно и не имеет изолированных точек, то оно c-равномерно совершенно с константой $c = 2\alpha + 1$.*

Заметим, что в определении 2.1 $\alpha \geq 1$, а значит, $c \geq 3$, что отсекает рассмотрение узких колец. Замена свойства α-R_1-связности λ-относительной связностью позволяет естественно усилить условие непустого кольца, использованное выше. λ-Относительная связность при малых λ равносильна наличию непустой малой окрестности любого ограниченного множества.

Определение 3.3. Метрическое пространство A будем называть *ε-равномерно совершенным*, если для любого его подмножества $P \neq A$ диаметра d его εd-окрестность в A не совпадает с P.

Ясно, что достаточно рассматривать замкнутые ограниченные подмножества P. Можно сказать, что в отличие от совершенных множеств, не имеющих изолированных точек, ε-равномерно совершенные множества не имеют изолированных (в указанном выше смысле) множеств. Определение ε-равномерно совершенных множеств будет использовано автором в следующих работах при изучении устойчивости ряда свойств.

4. Канторовы множества

Под канторовым α-множеством C_α будем понимать

$$C_\alpha = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i p^i \right\},$$

где $i \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \{0,1\}$, $p = (1-\alpha)/2$, $0 < \alpha < 1$.

Положим $d = \operatorname{diam}\ C_\alpha = p/(1-p) = (1-\alpha)/(1+\alpha)$.

Так как свойство λ-R-связности инвариантно при преобразованиях подобия, не требуем стандартной нормировки, т. е. $\operatorname{diam} C_\alpha = 1$. Множество C_α строим, выбрасывая из отрезка длины d отрезок длины αd. Таким образом, C_α — объединение двух подобных ему множеств с коэффициентами подобия $p = (1-\alpha)/2$. В некотором смысле α есть *мера несвязности* C_α.

Теорема 4.1 (об относительной связности канторовых множеств). *Множество C_α λ-относительно связно тогда и только тогда, когда $\lambda \geq 2\alpha/(1-\alpha)$.*

Доказательство. Возьмем пару $(0,\ p^2/(1-p))$. Докажем, что при $\lambda < 2\alpha/(1-\alpha)$ ее нельзя соединить с парой $(0,\ p)$. Действительно, так как $\sum\limits_{i=2}^{\infty} p^i = p^2/(1-p)$, то $(p^2/(1-p), p) \cap C_\alpha = \varnothing$. Предположим, что $(x_0, \dots, x_N)$ соединяет в C_α эти пары и $i \leq N$ — наименьший номер такой, что $x_i \geq p$. Тогда $|x_i - x_{i-2}| \geq (p-2p^2)/(1-p)$, $|x_{i-1} - x_{i-2}| \leq p^2/(1-p)$ и

$$\frac{|x_{i-2} - x_i|}{|x_{i-1} - x_{i-2}| \wedge |x_{i-1} - x_i|} \geq \frac{1-2p}{p} = \frac{2\alpha}{1-\alpha}. \tag{3}$$

Докажем обратное утверждение: при $\lambda = 2\alpha/(1-\alpha)$ любую пару точек $u \in P(C_\alpha)$ можно соединить с парой $(0,d)$. Предположим противное. Пусть C_α не λ-R-связно. Тогда найдется $\gamma \subset P(C_\alpha)$ — λ-R-компонента, не содержащая пару $(0,d)$. Рассмотрим пару (a,b) такую, что $a = \min \pi(\gamma)$, $b = \max \pi(\gamma)$. Докажем, что $(a,b) \in \gamma$. Действительно, если $(a,c) \in \gamma$, $(d,b) \in \gamma$ для некоторых c и $d \in \pi(\gamma)$, то применим процедуру максимизации (лемма 2.7) к последовательности, λ-относительно соединяющей эти пары. Построенная максимизированная последовательность соединяет обе пары с (a,b).

Рассмотрим представления $a = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i p^i$, $b = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i p^i$. Считаем $0 < a < b < d$. Случаи $a = 0$ и $b = d$ проще рассмотренного.

Точки $c \in C_\alpha$, лежащие вне $[a,b]$, расположены на расстоянии, большем, чем $\lambda|b-a|$, от $[a,b]$, иначе пара (a,c) или (c,b) принадлежала бы γ. Значит, найдутся $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $\alpha_m = 1$, $\alpha_i = 0$ при $i > m$, $\beta_n = 0$, $\beta_i = 1$ при $i > n$.

Рассмотрим случай $m \geq n$. Тогда

$$b = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i p^i + \sum_{i=n+1}^{\infty} p^i = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i p^i + \frac{p^{n+1}}{1-p}, \tag{4}$$

$c = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \beta_i p^i + p^n$ — ближайшая к $[a,b]$ точка, лежащая правее b. Положим $e = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \beta_i p^i$. В записи e коэффициенты β_i равны 0 начиная с $i = n$ так же, как в записи a. Если $a > e$, то наблюдается несовпадение коэффициентов в

i-м знаке при некотором $i < n$, что дает неравенство $a > b$. Значит, $a \leq e$. Следовательно, $|b - a| \geq |b - e|$,

$$\frac{|c - b|}{|b - a|} \leq \frac{|c - b|}{|b - e|} = \frac{(1 - p)p^n(1 - 2p)}{p^{n+1}(1 - p)} = \frac{2\alpha}{1 - \alpha}. \tag{5}$$

Стало быть, неравенство $b < d$ невозможно, т. е. $b = d$. Аналогично докажем, что $a = 0$. Это значит, что в любой λ-компоненте γ есть максимальная пара $(0, d)$, т. е. γ — единственная компонента λ-относительной связности C_α. $\square$

5. Продолжимость билипшицевых функций

Продолжимость класса функций или отображений с подмножеств на объемлющее пространство с сохранением или квазисохранением свойств класса — естественный вопрос анализа. Продолжению квазирегулярных, квазисимметрических, билипшицевых отображений с подмножеств евклидова пространства на все пространство посвящены, в частности, работы [8–12]. Одномерный случай отдельно не рассматривался. Следующая теорема восполняет пробел. Остается открытым вопрос продолжимости квазисимметрических функций.

Теорема (основная). *Множество $A \subset \mathbb{R}$ допускает продолжение всех M-билипшицевых функций $f : A \to \mathbb{R}$ до функций $F : R \to R$ класса M-BL при всех $M < N$ тогда и только тогда, когда $\overline{A}$ λ-относительно связно при $\lambda = 2/(N^2 - 1)$.*

Доказательство. 1. Докажем, что если A замкнуто и λ-относительно связно при $\lambda = 2/(N^2 - 1)$, то любая функция $f : A \to R$ класса M-BL при $M < N$ монотонна. В дальнейшем считаем A замкнутым. В противном случае продолжим f на ∂A по непрерывности. Возьмем пары (a, b) и (c, d) из $P(A)$ такие, что $a < b$ и $c < d$. Соединим их в A ориентированной λ-R-последовательностью $x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_{2k-1} = c$, $x_{2k} = d$. Четность индекса $x_{2k} = d$ следует из цепочки неравенств $x_1 < x_2 > \dots > x_{2k-1} < x_{2k}$. Положим $y_i = f(x_i)$ и докажем, что последовательность $(y_1, \dots, y_{2k})$ тоже ориентирована. Предположим противное. Пусть на местах i и $i + 1$ цепочки неравенств знаки неравенств совпали. Для определенности считаем $x_i < x_{i+1} > x_{i+2}$, $y_i < y_{i+1} < y_{i+2}$.

Рассмотрим случай $x_i \leq x_{i+2}$. Имеем

$$\frac{|x_i - x_{i+2}|}{|x_i - x_{i+1}| \wedge |x_{i+1} - x_{i+2}|} = \frac{|x_i - x_{i+2}|}{|x_{i+1} - x_{i+2}|} \leq \alpha,$$

$$|y_i - y_{i+1}| \geq M^{-1}|x_i - x_{i+1}| \geq M^{-1}|x_{i+2} - x_{i+1}|(1 + \alpha),$$

$$|y_{i+2} - y_{i+1}| \geq M^{-1}|x_{i+2} - x_{i+1}|,$$

$$|y_i - y_{i+2}| \geq M^{-1}|x_i - x_{i+2}| \geq M^{-1}|x_{i+2} - x_i|(2 + \alpha).$$

С другой стороны,

$$|y_i - y_{i+2}| \leq M|x_i - x_{i+2}| \leq M\lambda|x_{i+2} - x_{i+1}|.$$

Значит, $M^{-1}(2 + \lambda) \leq M\lambda$, $M \geq \sqrt{1 + 2/\lambda}$, $\lambda \geq 2/(M^2 - 1)$.

Так как неравенство (2) симметрично относительно x_i и x_{i+2}, в случае $x_i > x_{i+2}$ имеем ту же оценку. Это доказывает, что при $M \leq \sqrt{1 + 2/\lambda}$ знаки неравенства в последовательности $(y_1, \dots, y_{2k})$ чередуются.

2. Докажем обратное утверждение: если $\overline{A}$ не λ-R-связно, то найдется немонотонная функция $f : \overline{A} \to R$, M-билипшицева при $M = \sqrt{1 + 2/\lambda}$. Из леммы о единственности неограниченной λ-R-компоненты следует существование хотя бы одной ограниченной компоненты $\gamma \subset P(A)$. Из замкнутости $\overline{A}$ вытекает замкнутость $\pi(\gamma)$. Пусть $[a, b]$ — минимальный отрезок, содержащий $\pi(\gamma)$. Строим функцию f, монотонно возрастающую на $A \setminus [a, b]$ и монотонно убывающую на $[a, b]$. Пара (a, b) максимальная в γ. Для упрощения вычислений рассмотрим случай $a = \lambda$, $b = 1 + \lambda$. Если на полуинтервале $[0, \lambda)$ есть точка c из A, то пара (c, b) принадлежит γ и пара (a, b) не максимальна. То же можно сказать о полуинтервале $(1 + \lambda, 1 + 2\lambda]$. Строим M-билипшицеву немонотонную кусочно линейную функцию φ, полагая для $x \in \overline{A}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \le 0, \\ -Mx + 2(\lambda + 1)M^{-1} & \text{при } \lambda \le x \le 1 + \lambda, \\ x & \text{при } x \ge 1 + 2\lambda. \end{cases}$$

По построению φ 1-билипшицева на $(-\infty, 0] \cup [1 + 2\lambda, \infty)$ и M-билипшицева на $[\lambda, 1 + \lambda]$. Осталось проверить M-билипшицевость на объединении этих множеств: $|\varphi(\lambda) - \varphi(0)| = \lambda M$, $|\varphi(\lambda + 1) - \varphi(0)| = M^{-1}(\lambda + 1)$. Аналогично $|\varphi(1 + 2\lambda) - \varphi(1 + \lambda)| = M\lambda$, $|\varphi(1 + 2\lambda) - \varphi(\lambda)| = M^{-1}(\lambda + 1)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Trotsenko D. A., Väisälä J.* Upper sets and quasisymmetric maps // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, Math. 1999. V. 24. P. 465–488.

2. *Троценко Д. А.* Дискретные пространства, гиперболические по Громову, и их применение при продолжении классов отображений // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 3. С. 308–311.

3. *Trotsenko D. A.* Extendability of classes of maps and new properties of upper sets // Complex Anal. Operator Theory. 2011. V. 5, N 3. P. 967–984.

4. *Pommerenke C.* Uniformly perfects sets and the Poincaré metric // Arch. Math. (Basel). 1979. V. 32. P. 192–199.

5. *Järvi P., Vuorinen M.* Uniformly perfect sets and quasiregular mappings // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1996. V. 54, N 174. Part 3. P. 515–529.

6. *Sugawa T.* Uniformly perfect sets: analytic and geometric aspects // Sugaku Expo. 2003. V. 16, N 2. P. 225–242.

7. *Ибрагимов З. Ш.* Метрическая плотность и квазимёбиусовы отображения // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 1007–1019.

8. *Tukia P., Väisälä J.* Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, Math. 1980. V. 5, N 1. P. 97–114.

9. *Tukia P., Väisälä J.* Lipschitz and quasiconformal approximation and extension // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, Math. 1981. V. 6, N . P. 303–342.

10. *Väisälä J.* Bilipschitz and quasisymmetric extension properties // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, Math. 1986. V. 11. P. 239–274.

11. *Алестало П., Троценко Д. А., Вяйсяля Ю.* Линейное свойство продолжимости билипшицевых отображений // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1226–1239.

12. *Alestalo P., Trotsenko D. A.* On mappings that are close to a similarity // Math. Rep. 2013. V. 15, N 4. P. 313–318.

Статья поступила 24 января 2016 г.

Троценко Дмитрий Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`trotsenk@yandex.ru`