Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 512.542

$\mathfrak{F}^\omega$–НОРМАЛИЗАТОРЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. А. Ведерников, М. М. Сорокина

Аннотация. Пусть ω — непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ — непустая формация конечных групп. Введено определение $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатора в конечной группе и изучены его свойства (существование, инвариантность при определенных гомоморфизмах, сопряженность, вложение и др.) в случае, когда $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация. Получено развитие известных результатов Картера, Хоукса, Л. А. Шеметкова о $\mathfrak{F}$-нормализаторах в группах.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.107

Ключевые слова: конечная группа, ω-локальная формация, $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа, $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор.

Посвящается памяти профессора
Леонида Александровича Шеметкова
(к 80-летию со дня рождения)

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. С целью более глубокого изучения разрешимых групп Холл в [1, 2] ввел понятия силовской системы и системного нормализатора. Картером и Хоуксом в [3] для любой непустой локальной формации $\mathfrak{F}$ в разрешимой группе G был выделен сопряженный класс $\mathfrak{F}$-подгрупп, получивших в [3] название *$\mathfrak{F}$-нормализаторов*, причем класс $\mathfrak{F}$-нормализаторов совпадает с сопряженным классом системных нормализаторов в G, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп. В [3] установлено, что в разрешимой группе G для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существуют $\mathfrak{F}$-нормализаторы, любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены в G и $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G (см. также [4, гл. V]).

Понятие $\mathfrak{F}$-нормализатора (системного нормализатора) разрешимой группы G оказалось тесно связанным с понятиями $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы, введенной Гашюцом в [5], и подгруппы Картера группы G (см. [3–6]). Так, в [3] установлено, что любой $\mathfrak{F}$-нормализатор разрешимой группы G содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе из G.

Кроме того, в [3] для $\mathfrak{F}$-нормализатора H разрешимой группы G была получена его характеризация посредством цепи максимальных подгрупп, соединяющих H с G. Это свойство $\mathfrak{F}$-нормализатора H разрешимой группы G послужило отправной точкой для определения $\mathfrak{F}$-нормализатора H в [7] для класса Шунка и в произвольной группе для локальной формации $\mathfrak{F}$ (см. [8, 9]).

$\mathfrak{F}$-нормализаторы нашли применение в исследовании вопросов дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикалов в группах. Так, например, в [3] доказано, что всякое дополнение к абелевому $\mathfrak{F}$-корадикалу разрешимой группы G является $\mathfrak{F}$-нормализатором в G, где $\mathfrak{F}$ — локальная формация (для произвольной группы G аналогичный результат получен в [9]).

Естественным обобщением понятия локальной формации является понятие ω-локальной формации, введенное в рассмотрение Л. А. Шеметковым и А. Н. Скибой в [10] (см. также [11, определение 4]), где ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел.

Цель настоящей работы — распространить основные результаты из [3, 8, 9] о $\mathfrak{F}$-нормализаторах в группах для случая, когда $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация.

В данной работе для непустой формации $\mathfrak{F}$ приведено определение $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатора в произвольной группе, которое при $\omega = \mathbb{P}$ совпадает с определением $\mathfrak{F}$-нормализатора, введенного Л. А. Шеметковым в [8, 9]. Для $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов в случае ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлены все основные свойства, полученные в [3, 8, 9] для $\mathfrak{F}$-нормализаторов и локальной формации $\mathfrak{F}$, причем при $\omega = \mathbb{P}$ из свойств $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов в качестве следствия получаем соответствующие свойства $\mathfrak{F}$-нормализаторов (см. теоремы 3.1–3.5 и их следствия). Приведены достаточные условия, при которых всякий $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G является дополнением к ее $\mathfrak{F}$-корадикалу (теорема 3.6 и ее следствие).

2. Определения, обозначения и предварительные результаты

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел. Данная работа является продолжением работ авторов [12, 13]. Все эти работы объединяет общий метод исследования, основанный на применении ω-локальных формаций к теории конечных групп. Из [12, 13] приведем некоторые определения, а также без доказательства те результаты, которые применяются в дальнейшем. Используемые определения и обозначения для групп стандартны, их можно найти в [4, 9, 14]. Приведем лишь некоторые определения для классов групп.

Класс $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Гомоморф $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если из $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/A \cap B \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и из того, что $G = AB$, где A и B — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы в G, следует, что $G \in \mathfrak{F}$. *Формация Фиттинга* — формация, являющаяся классом Фиттинга. Класс $\mathfrak{F}$ называется *насыщенным* (*ω-насыщенным*), если для любой $N \lhd G$ такой, что $N \leq \Phi(G)$ (соответственно $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$), из $G/N \in \mathfrak{F}$ вытекает, что $G \in \mathfrak{F}$ (см., например, [9, 10]).

Пусть $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, $g : \mathbb{P} \to \{$формации групп$\}$ и $\delta : \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ — функции, называемые соответственно *ωF-функцией*, *$\mathbb{P}F$-функцией* и *$\mathbb{P}FR$-функцией*. Формация $\omega F(f, \delta) = (G : G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ называется *ω-веерной формацией с ω-спутником f и с направлением δ*; формация $F(g, \delta) = (G : G/G_{\delta(p)} \in g(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ называется *веерной формацией со спутником g и с направлением δ* (см. [11]). Формация $\omega F(f, \delta)$ называется *ω-локальной формацией*, если $\delta(p) = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначается $\omega LF(f) = (G : G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$. Если $\omega = \pi(\mathfrak{F})$, то ω-локальная формация становится локальной формацией.

Определение 2.1 [13, определение 3.1]. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}^\omega$-проектором* в G, если для любой нормальной ω-подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе G/N.

Определение 2.2 [13, определение 3.2]. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$*-покрывающей подгруппой* группы G, если $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V — нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$, следует, что $U = HV$.

Замечание 2.1. Если $\omega = \pi(G)$, то $\mathfrak{F}^\omega$-проектор ($\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа) группы G становится $\mathfrak{F}$-проектором ($\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой) в G (см., например, [14, гл. 5]).

Лемма 2.1 [13, лемма 3.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор каждой подгруппы группы G, в которой H содержится.*

Лемма 2.2 [13, лемма 3.4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф, G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G и H — максимальная подгруппа группы G, то H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G.*

(2) *Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G и $H \leq K \leq G$, то H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в K.*

(3) *Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G и N — нормальная ω-подгруппа в G, то HN/N является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G/N.*

(4) *Если N — нормальная ω-подгруппа в G и H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/N, то каждая $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа из H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G.*

Лемма 2.3 [13, теорема 3.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой ω-группой. Тогда группа G имеет по крайней мере одну $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающую подгруппу и любые две $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы из G сопряжены в G.*

Следующий результат является непосредственным следствием [13, теорема 3.4].

Лемма 2.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация и N — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G. Если H — $\mathfrak{F}$-подгруппа в G такая, что $G = HN$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппе группы G.*

Определение 2.3 [9, определение 8.1]. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая непустая формация. Максимальная подгруппа M группы G называется

(1) $\mathfrak{F}$*-нормальной*, если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$;

(2) $\mathfrak{F}$*-абнормальной*, если $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Максимальная $(G - H)$-цепь $H = H_m < H_{m-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G$ называется $\mathfrak{F}$*-субнормальной* ($\mathfrak{F}$*-абнормальной*), если для любого $i \geq 1$ подгруппа H_i $\mathfrak{F}$-нормальна (соответственно $\mathfrak{F}$-абнормальна) в H_{i-1}.

Подгруппа H группы G называется

(1) $\mathfrak{F}$*-субнормальной*, если существует хотя бы одна $\mathfrak{F}$-субнормальная максимальная $(G - H)$-цепь;

(2) $\mathfrak{F}$*-абнормальной*, если любая максимальная $(G-H)$-цепь $\mathfrak{F}$-абнормальна.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, G — группа, $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и $H < G$. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей в G тогда и только тогда, когда $H \in \mathfrak{F}$ и H — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. По определению 2.2 $H \in \mathfrak{F}$, и из того, что $H \le U \le G$, V — нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$, следует, что $U = HV$. Тогда при $U = G$ и $V = G^{\mathfrak{F}}$ получаем $G = HG^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что любая максимальная $(G - H)$-цепь $\mathfrak{F}$-абнормальна. Пусть

$$H = H_t < H_{t-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G \tag{2.1}$$

— произвольная максимальная $(G - H)$-цепь.

Пусть $i \in \{1, \ldots, t\}$. Установим, что H_i — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы H_{i-1}. Поскольку $H \le H_{i-1}$, то $G = H_{i-1}G^{\mathfrak{F}}$ и ввиду [9, лемма 1.2(3)] $H_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ является ω-группой. Так как $H \le H_{i-1} \le G$, $H_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ — нормальная ω-подгруппа группы H_{i-1} и $H_{i-1}/H_{i-1}^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, по определению 2.2 $H_{i-1} = H_{i-1}^{\mathfrak{F}}H = H_{i-1}^{\mathfrak{F}}H_i$. Это означает, что H_i — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в H_{i-1}. Следовательно, (2.1) — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная $(G - H)$-цепь, и по определению 2.3 подгруппа H $\mathfrak{F}$-абнормальна в G.

Достаточность. Пусть H — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G и $H \in \mathfrak{F}$. Покажем, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G. Пусть $H \le U \le G$, V — нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $U \ne HV$. Тогда существует такая максимальная подгруппа M в U, что $HV \subseteq M$. Таким образом, $H \le HV \le M < U \le G$. Поскольку H $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, по определению 2.3 M является $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой в U, значит, $U = MU^{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, из $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U^{\mathfrak{F}} \subseteq V$, поэтому $U^{\mathfrak{F}} \subseteq M$; противоречие. Тем самым установлено, что $U = HV$, значит, H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G. Теорема доказана.

Следствие 2.1 (Л. А. Шеметков [9, теорема 15.1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-покрывающей в G тогда и только тогда, когда $H \in \mathfrak{F}$ и H $\mathfrak{F}$-абнормальна в G.*

Определение 2.4 [12, определение 2.1]. Пусть f — ωF-функция. Главный ωd-фактор A/B группы G называется *f_ω-центральным* (*f_ω-эксцентральным*) в G, если $G/C_G(A/B) \in f(p)$ для любого простого числа $p \in \omega \cap \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B) \notin f(p)$ для некоторого простого числа $p \in \omega \cap \pi(A/B)$).

Лемма 2.5 [12, лемма 2.7]. *Пусть $\mathfrak{L} = \omega LF(f)$ — ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f. Если $\mathfrak{F}$ — класс всех групп G таких, что $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и G обладает главным рядом, в котором каждый ωd-фактор f_ω-*централен *в G, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}$.*

Пусть A/B — секция и H — подгруппа группы G. Говорят, что подгруппа H *покрывает* (*изолирует*) *секцию* A/B, если $A \subseteq HB$ (соответственно $H \cap A \subseteq B$, см., например, [9]).

Лемма 2.6 [12, лемма 4.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f, M — максимальная подгруппа ωd-группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если M $\mathfrak{F}$-нормальна в G, то M покрывает каждый f_ω-*эксцентральный *главный ωd-фактор группы G;*

(2) *если M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то M покрывает каждый f_ω-*центральный *главный ωd-фактор группы G.*

Лемма 2.7 [12, лемма 4.5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f и R/K является f_ω-эксцентральным главным фактором группы G. Тогда $R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$ является f_ω-эксцентральным главным фактором группы G, G-изоморфным R/K, причем любая максимальная подгруппа группы G, не покрывающая R/K, не покрывает $R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$.*

В качестве следствия из леммы 4.4 в [9] легко получить следующий результат.

Лемма 2.8. *Пусть N — субнормальная подгруппа группы G, $K \triangleleft N$ и $K \leq \Phi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*
(1) *$\Phi(N) \leq \Phi(G)$;*
(2) *если N/K π-замкнута, то и N π-замкнута, в частности, $F_p(N/K) = F_p(N)/K$;*
(3) *если N/K π-разложима, то и N π-разложима;*
(4) *если N/K нильпотентна, то и N — нильпотентная группа.*

Лемма 2.9 [12, теорема 4.2]. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$ — ω-локальная формация Фиттинга с максимальным внутренним ω-спутником f, и пусть $G = A_1A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если для некоторого простого числа $p \in \omega$ силовская p-подгруппа группы $A_i^{\mathfrak{F}}$ абелева для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}} \cdots A_n^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов.*

Замечание 2.2. Условия леммы 2.9 уточняют соответствующие условия теоремы 4.2 в [12]. Подобные уточнения внесены в формулировки следствий 4.1–4.4 из [12].

3. $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторы групп

Определение 3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация и G — группа.

(1) Нормальную подгруппу R группы G назовем $\mathfrak{F}^\omega$*-предельной* нормальной подгруппой в G, если $R \leq G^{\mathfrak{F}}$ и $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ является главным фактором группы G. Максимальную подгруппу M группы G назовем $\mathfrak{F}^\omega$*-критической* в G, если $G = MR$ для некоторой $\mathfrak{F}^\omega$-предельной нормальной подгруппы R из G.

(2) $\mathfrak{F}$-подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{F}^\omega$*-нормализатором* в G, если существует цепь подгрупп группы G вида

$$H = H_t \subset H_{t-1} \subset \cdots \subset H_1 \subset H_0 = G, \tag{3.1}$$

где $t \geq 0$, такая, что H_i — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в группе H_{i-1} для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ (ср. [9, определения 13.1; 13.2; 21.1]).

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, G — группа с $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$, являющимся ω-группой. Тогда в G существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор H и $G = G^{\mathfrak{F}}H$.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то по определению 3.1(2) G является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы G и $G = G^{\mathfrak{F}}G$.

Пусть $G \notin \mathfrak{F}$ и $T := G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Согласно [10, теорема 1] формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщенна и поэтому $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Следовательно, в G/T существует минимальная нормальная подгруппа R/T такая, что $R \leq G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $R/T = R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ и по определению 3.1(1) R является $\mathfrak{F}^\omega$-предельной нормальной подгруппой в G.

Поскольку $R \subseteq O_\omega(G)$, то $R \not\subseteq \Phi(G)$, значит, в группе G существует максимальная подгруппа M такая, что $R \not\subseteq M$. Тогда $G = RM$ и по определению 3.1(1) M является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G. Так как $G = G^\mathfrak{F} M$, ввиду [9, лемма 1.2(3)] $M^\mathfrak{F} \leq G^\mathfrak{F}$. По индукции в M существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор H и $M = M^\mathfrak{F} H$. В силу определения 3.1(2) H является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы G, причем $G = G^\mathfrak{F} M = G^\mathfrak{F} M^\mathfrak{F} H = G^\mathfrak{F} H$. Теорема доказана.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G и φ — эпиморфизм группы G на группу U, то H^φ — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы U.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G и φ — эпиморфизм группы G на группу U. Покажем, что H^φ является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в U. Пусть $\mathrm{Ker}(\varphi) := K$. Так как $G^\varphi = U \cong G/K$ и $H^\varphi \cong HK/K$, достаточно установить, что HK/K является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G/K. Применим индукцию по порядку группы G.

Согласно определению 3.1(2) $H \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — формация, $HK/K \in \mathfrak{F}$. Если $H = G$, то $HK/K = G/K$ — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в G/K. Пусть $H \neq G$. Тогда ввиду определения 3.1(2) существует $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа M в G такая, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в M. По индукции для M утверждение верно. Следовательно, HK/K — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в MK/K. Если $MK = G$, то утверждение верно. Пусть $G \neq MK$. Тогда $K \subseteq M$ и HK/K — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в M/K. Покажем, что M/K — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G/K. Так как M — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G, то $G = MR$, где R — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G. Тогда $G/K = (M/K) \cdot (RK/K)$.

Установим, что RK/K является $\mathfrak{F}^\omega$-предельной нормальной подгруппой группы G/K. Поскольку $R \leq G^\mathfrak{F}$, то $RK \leq G^\mathfrak{F} K$ и по [9, лемма 1.2(1)] $RK/K \leq G^\mathfrak{F} K/K = (G/K)^\mathfrak{F}$. Таким образом, $RK/K \leq (G/K)^\mathfrak{F}$.

Пусть $T/K := RK/K \cap \Phi(G/K) \cap O_\omega(G/K)$. Покажем, что $(RK/K)/(T/K)$ является главным фактором группы G/K. Пусть $L = R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. По определению 3.1(1) R/L — главный фактор группы G. Если $RK \subseteq M$, то $G = MR = M$, что невозможно. Поэтому $RK \not\subseteq M$. Из $LK \subseteq M$ и $RK \not\subseteq M$ получаем $RK \neq LK$. Тогда $RK/LK = RLK/LK \cong R/R \cap LK = R/L(R \cap K) \neq 1$. Поскольку $L \subseteq L(R \cap K) \subset R$ и R/L — главный фактор группы G, то $L(R \cap K) = L$, значит, RK/LK — главный фактор группы G. Тогда $(RK/K)/(LK/K)$ — главный фактор группы G/K. Проверим, что $T/K = LK/K$. Действительно, так как $LK/K = (R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G))K/K \leq (RK/K) \cap (\Phi(G)K/K) \cap (O_\omega(G)K/K)$, по [14, теорема 3.22(2)] $\Phi(G)K/K \leq \Phi(G/K)$ и $O_\omega(G)K/K \leq O_\omega(G/K)$, то $LK/K \leq T/K \leq RK/K$, значит, либо $T/K = RK/K$, либо $T/K = LK/K$. Допустим, что $T/K = RK/K$. Тогда $RK/K \leq \Phi(G/K) \leq M/K$ и $R \leq M$, что ввиду $G = MR$ невозможно. Следовательно, $LK/K = T/K$, поэтому $(RK/K)/(T/K)$ — главный фактор группы G/K.

Таким образом, RK/K — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа группы G/K. Тем самым установлено, что M/K — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G/K, значит, HK/K является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G/K. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $G = M_1R_1 = M_2R_2$, где M_1 и M_2 — максимальные подгруппы группы G, R_1 и R_2 — различные нильпотентные $\mathfrak{F}^\omega$-предельные нормальные подгруппы группы G и $G^\mathfrak{F} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) \subseteq R_1 \cap R_2$. Тогда подгруппа $R = M_1 \cap R_1R_2$ является $\mathfrak{F}^\omega$-предельной нормальной подгруппой в G, причем $R_1R = R_1R_2$ и следующие группы G-изоморфны: $R_1R_2/R_1 \cong R_2/G^\mathfrak{F} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) \cong R/G^\mathfrak{F} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$.*

Доказательство. Пусть $\Phi := G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ и $R := M_1 \cap R_1 R_2$. Тогда $RR_1 = (M_1 \cap R_1 R_2) R_1 = M_1 R_1 \cap R_1 R_2 = G \cap R_1 R_2 = R_1 R_2$. Поскольку R_i — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G, по определению 3.1(1) $R_i \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, значит, $R_i \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) \subseteq \Phi$, $i = 1, 2$. Так как по условию $\Phi \subseteq R_i$, то $R_i \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) = \Phi$ и согласно определению 3.1(1) R_i/Φ — главный фактор группы G для любого $i = 1, 2$. Поскольку подгруппы R_1 и R_2 нильпотентны, R_1R_2/Φ — абелева группа и поэтому подгруппа R/Φ нормальна в R_1R_2/Φ. Поскольку R нормальна в M_1, то $G/\Phi = M_1R_1/\Phi \subseteq N_{G/\Phi}(R/\Phi)$. Следовательно, R — нормальная подгруппа группы G.

Так как $R \cap R_1$ нормальна в G и ввиду условия $\Phi \subseteq R \cap R_1 \subseteq R_1$, то либо $R \cap R_1 = R_1$, либо $R \cap R_1 = \Phi$. Если $R \cap R_1 = R_1$, то $R_1 \subseteq M_1$, что в силу $G = M_1 R_1$ невозможно. Поэтому $R \cap R_1 = \Phi$.

Поскольку $R_1 \neq R_2$, то $R_1/\Phi \cap R_2/\Phi = \Phi/\Phi$, значит, $R_1 \cap R_2 = \Phi$. Тогда $R_1R_2/R_1 \cong R_2/R_1 \cap R_2 = R_2/\Phi$. Кроме того, $R_1R_2/R_1 = R_1R/R_1 \cong R/R \cap R_1 = R/\Phi$. Таким образом, $R_1R_2/R_1 \cong R_2/\Phi \cong R/\Phi$.

Согласно определению 3.1(1) $R_1R_2 \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Это означает, что $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) \subseteq \Phi$. Так как $\Phi = R \cap R_1$, то $\Phi \subseteq R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Тем самым установлено, что $\Phi = R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, поэтому $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ — главный фактор группы G. Следовательно, R — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация и G — группа, $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ которой является ω-группой, и M — максимальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *M является $\mathfrak{F}^\omega$-критической в G тогда и только тогда, когда M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и $G = M\widetilde{F}(G)$;*

(2) *если M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и $G = MF(G)$, то M является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G.*

Доказательство. (1) Пусть $\Phi := \Phi(G)$ и $\widetilde{F} := \widetilde{F}(G)$.

Необходимость. Пусть M — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа группы G. Тогда по определению 3.1(1) $G = ML$, где L — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G. Следовательно, $L \leq G^{\mathfrak{F}}$, и $L/L \cap \Phi \cap O_\omega(G) = L/L \cap \Phi \cong L\Phi/\Phi$ — главный фактор группы G. Это означает, что $L\Phi/\Phi$ — минимальная нормальная подгруппа группы G/Φ, поэтому $L\Phi/\Phi \subseteq \widetilde{F}/\Phi$. Таким образом, $G = ML = M\widetilde{F}$. Кроме того, из $L \leq G^{\mathfrak{F}}$ следует $\mathfrak{F}$-абнормальность M в G.

Достаточность. Пусть M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G и $G = M\widetilde{F}$. В силу того, что $\widetilde{F}/\Phi$ — цоколь группы G/Φ и $\widetilde{F} \not\subseteq M$, в G/Φ найдется минимальная нормальная подгруппа R/Φ такая, что $R \not\subseteq M$. Тогда $G = MR$.

Согласно [11, лемма 4] ω-локальная формация обладает внутренним ω-спутником. Пусть f – внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что R/Φ — f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G. Так как M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то $G = MG^{\mathfrak{F}}$ и ввиду $\pi(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq \omega$ имеем $|G : M| = |MG^{\mathfrak{F}} : M| = |G^{\mathfrak{F}} : G^{\mathfrak{F}} \cap M|$ — ω-число. Из $G = MR$ получаем, что $|G : M| = |R : R \cap M|$ — ω-число. Поскольку $|R/\Phi| = |R : R \cap M| \cdot |R \cap M : \Phi|$, то R/Φ — ωd-группа. Так как M не покрывает R/Φ, по лемме 2.6(2) R/Φ является f_ω-эксцентральным главным фактором группы G.

Согласно лемме 2.7 M не покрывает f_ω-эксцентральный главный фактор $R \cap G^{\mathfrak{F}}/\Phi \cap G^{\mathfrak{F}}$ группы G, G-изоморфный главному фактору R/Φ. Это означает, что $R \cap G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M(\Phi \cap G^{\mathfrak{F}}) = M$, поэтому $G = M(R \cap G^{\mathfrak{F}})$. Поскольку $\Phi \subseteq R$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_\omega(G)$, то $R \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi \cap O_\omega(G) = \Phi \cap G^{\mathfrak{F}}$, значит, $R \cap G^{\mathfrak{F}}/R \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi \cap O_\omega(G)$ — главный фактор группы G. Тогда по определению 3.1(1) $R \cap G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа группы G. В силу равенства $G = M(R \cap G^{\mathfrak{F}})$ по определению 3.1(1) заключаем, что M — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G.

(2) Пусть M $\mathfrak{F}$-абнормальна в группе G и $G = MF(G)$. Так как $F(G) \leq \widetilde{F}(G)$, то $G = M\widetilde{F}(G)$ и по п. (1) следует, что M — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $G = MR$, M — максимальная подгруппа группы G, R — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G и L — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G такая, что $R \subseteq L$. Тогда $M \cap L$ — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы M.*

Доказательство. Покажем, что $M \cap L$ — максимальная подгруппа группы M. Действительно, по [14, лемма 3.17(3)] $L/R \lessdot G/R$. Так как $G = MR$, то $G/R \cong M/M \cap R$. Поскольку $L = MR \cap L = R(M \cap L)$, то $L/R = R(M \cap L)/R \cong (M \cap L)/(M \cap L \cap R) = (L \cap M)/(M \cap R)$. Тогда из $G/R \cong M/M \cap R$, $L/R \cong (M \cap L)/(M \cap R)$ и $L/R \lessdot G/R$ получаем $(M \cap L)/(M \cap R) \lessdot M/(M \cap R)$. Это согласно [14, лемма 3.17(5)] означает, что $M \cap L \lessdot M$.

Установим, что $M = (M \cap L)M^{\mathfrak{F}}$. Так как R — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа группы G, то $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Тогда из $G = MR$ по [9, лемма 1.2(3)] имеем $G^{\mathfrak{F}} = M^{\mathfrak{F}}R$. Если $M^{\mathfrak{F}} \subseteq M \cap L$, то $M^{\mathfrak{F}} \subseteq L$ и ввиду $R \subseteq L$ получаем $G^{\mathfrak{F}} = M^{\mathfrak{F}}R \subseteq L$. Это означает, что L — $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа группы G; противоречие. Следовательно, $M^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M \cap L$, поэтому $M = (M \cap L)M^{\mathfrak{F}}$. Тем самым установлено, что $M \cap L$ — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в M. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация и $G = M_1R_1 = M_2R_2$, где M_1 и M_2 — максимальные подгруппы группы G, R_1 и R_2 — различные нильпотентные $\mathfrak{F}^\omega$-предельные нормальные подгруппы группы G и $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, $G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \subseteq R_1 \cap R_2$. Если $R_1 \subseteq M_2$, то $M_1 \cap M_2$ — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в M_1 и M_2.*

Доказательство. Пусть $\Phi := G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ и $T := R_1 \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и $R_1 \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $\Phi = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$, $T = R_1 \cap \Phi(G)$ и $T \subseteq \Phi$. По условию $\Phi \subseteq R_1$, значит, $\Phi \subseteq T$. Следовательно, $T = \Phi$. Поскольку R_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G, то $R_1/T = R_1/\Phi$ — главный ω-фактор группы G. Так как $G = M_1R_1 = M_1G^{\mathfrak{F}}$, подгруппа M_1 $\mathfrak{F}$-абнормальна в G. Пусть f – внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. В силу леммы 2.6(2) главный фактор R_1/Φ f_ω-эксцентрален в G. Пусть $\pi(R_1/\Phi) = \{p\}$, где $p \in \omega$. Тогда $G/C_G(R_1/\Phi) \notin f(p)$.

I. Покажем, что подгруппа $M_1 \cap M_2$ является $\mathfrak{F}^\omega$-критической в M_2. Так как $G = M_2R_2$ и R_2 нильпотентна, по [9, следствие 4.1.1] $C_G(R_1/\Phi) \geq F(G) \geq R_2$, значит, $G = M_2C_G(R_1/\Phi)$. Тогда $M_2/C_{M_2}(R_1/\Phi) \cong G/C_G(R_1/\Phi) \notin f(p)$. Отсюда следует, что R_1/Φ является f_ω-эксцентральным главным фактором группы M_2. Поскольку $(M_1 \cap M_2)R_1 = M_1R_1 \cap M_2 = M_2$, то $M_1 \cap M_2 \lessdot M_2$. Так как $M_1 \cap M_2$ не покрывает f_ω-эксцентральный главный фактор R_1/Φ группы M_2, в силу леммы 2.6(1) подгруппа $M_1 \cap M_2$ $\mathfrak{F}$-абнормальна в M_2, причем $M_2 = (M_1 \cap M_2)F(M_2)$. Из $G = M_2R_2$ по [9, лемма 1.2(3)] следует, что $M_2^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, значит, $M_2^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа. Тогда по лемме 3.3(2) $M_1 \cap M_2$ является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в M_2.

II. Покажем, что $M_1 \cap M_2$ — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в M_1. Если $R_2 \subseteq M_1$, то, как и в п. I, получим, что $M_1 \cap M_2$ является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в M_1. Пусть $R_2 \not\subseteq M_1$. Так как $G = M_1R_1$, M_2 — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G и $R_1 \subseteq M_2$, согласно лемме 3.4 $M_1 \cap M_2$ — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в M_1. Ввиду [9, лемма 1.2(3)] $M_1^{\mathfrak{F}}$ является ω-группой. Пусть $R := M_1 \cap R_1R_2$. По лемме 3.2 R — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G и $R_1R = R_1R_2$. Если $R \subseteq M_2$, то $R_2 \subseteq R_1R_2 = R_1R \subseteq M_2$, что в силу $G = M_2R_2$ невозможно. Поэтому $R \not\subseteq M_2$, значит, $M_1 = (M_1 \cap M_2)R$. Так как $R \subseteq F(M_1)$, то $M_1 = (M_1 \cap M_2)F(M_1)$. Следовательно, по лемме 3.3(2) подгруппа $M_1 \cap M_2$ является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в M_1. Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является π-разрешимой ω-группой. Тогда любые два $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка и H_1, H_2 — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторы группы G, не являющиеся сопряженными в G. Если $G^{\mathfrak{F}} = 1$, то $G \in \mathfrak{F}$ и по определению 3.1(2) $H_1 = H_2 = G$, что невозможно. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$.

Пусть $i \in \{1, 2\}$. Так как H_i — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G, то $H_i \in \mathfrak{F}$ и существует цепь подгрупп группы G вида $H_i \subset \dots \subset M_i \subset G$, удовлетворяющая определению 3.1(2). Это означает, что H_i является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы M_i. По теореме 3.1 $G = H_iG^{\mathfrak{F}} = M_iG^{\mathfrak{F}}$. Отсюда ввиду [9, лемма 1.2(3)] получаем $M_i^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $M_i^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа и по индукции любые два $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатора группы M_i сопряжены в M_i.

Если $M_1 = M_2^g$ для некоторого $g \in G$, то ввиду леммы 3.1 H_1 и H_2^g — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторы группы M_1. По индукции H_1 и H_2^g сопряжены в M_1, а значит, H_1 и H_2 сопряжены в G, что невозможно. Следовательно, M_1 и M_2 не сопряжены в G.

Пусть $N := O_{\pi'}(G)$. Предположим, что $N \neq 1$. Так как ввиду [9, лемма 1.2(1)] $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N \cong G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap N$ — π-разрешимая ω-группа, применяя лемму 3.1, по индукции получим $H_1N/N = H_2^aN/N$ для некоторого $a \in G$. Тогда $H_2^a \leq H_1N$, причем H_1 и H_2^a в силу определения 3.1(2) являются π-группами. По [14, теорема 4.32] H_1 и H_2^a сопряжены в группе H_1N, значит, H_1 и H_2 сопряжены в группе G; противоречие. Следовательно, $O_{\pi'}(G) = 1$.

Пусть $G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) := \Phi$ и R — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа группы G. По определению 3.1(1) $R \leq G^{\mathfrak{F}}$ и $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ является главным фактором в G. Так как по условию $G^{\mathfrak{F}} \leq O_\omega(G)$, то $R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) = R \cap \Phi(G) = R \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) = R \cap \Phi$, R — π-разрешимая ω-группа и $R/R \cap \Phi \cong R\Phi(G)/\Phi(G)$ — главный фактор группы G. Допустим, что $R/R \cap \Phi$ является π'-группой. Тогда по лемме 2.8(3) группа R π'-разложима, значит, $O_{\pi'}(R) \neq 1$. Так как $R \lhd G$, то $O_{\pi'}(R) \lhd G$; противоречие. Следовательно, $R/R \cap \Phi$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi \cap \omega$. По лемме 2.8(3) группа R p-разложима, стало быть, является нильпотентной $(\pi \cap \omega)$-группой. Поскольку $R\Phi/\Phi \cong R\Phi(G)/\Phi(G) \lhd G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \cong G^{\mathfrak{F}}/\Phi$, то $R\Phi/\Phi \leq F(G^{\mathfrak{F}}/\Phi) := F/\Phi$, причем в силу леммы 2.8(3) $F = F(G^{\mathfrak{F}})$. Применяя [14, лемма 2.37], нетрудно показать, что F/Φ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G/Φ, содержащихся в $G^{\mathfrak{F}}/\Phi$.

Так как M_i является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой группы G, по определению 3.1(1) в G существует $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа R_i, причем $R_i \subseteq F$ и $G = M_iR_i = M_iF$ для любого $i = 1, 2$.

1. Рассмотрим случай, когда $F/\Phi \cdot\!\!\lhd G/\Phi$. Пусть $S_i = G^{\mathfrak{F}} \cap \mathrm{Core}_G(M_i)$, $i = 1, 2$. Так как $\Phi \subseteq F$ и $\Phi \subseteq S_i$, то $\Phi \subseteq F \cap S_i \subseteq F$. Из $F/\Phi \cdot\!\!\lhd G/\Phi$ следует, что либо $F \cap S_i = F$, либо $F \cap S_i = \Phi$. Если $F \cap S_i = F$, то $F \subseteq S_i$ и поэтому $G = M_iF = M_i$, что невозможно. Следовательно, $F \cap S_i = \Phi$, значит, $\Phi \subseteq S_i$ для любого $i = 1, 2$.

1.1. Пусть $S_1 = S_2 = \Phi$. Так как $G = M_iF$, то $|G : M_i| = |F : F \cap M_i| = k_i \neq 1$, $i = 1, 2$. Поскольку $\Phi \subseteq F \cap M_i$, то $|F : \Phi| = |F : F \cap M_i||F \cap M_i : \Phi|$, $i = 1, 2$. Так как F/Φ — абелева p-группа, $k_i = |G : M_i|$ — p-число, $i = 1, 2$. Пусть f — ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Ввиду [11, теорема 6] формация $\mathfrak{F}$ p-локальна, поэтому ω-спутник f является p-однородным экраном (см. [9, определение 3.8]). Поскольку $G^{\mathfrak{F}}$ — p-разрешимая группа, по [9, теорема 8.5] подгруппы M_1 и M_2 сопряжены в G; противоречие.

1.2. Пусть хотя бы одна из подгрупп S_1 или S_2 не совпадает с Φ. Пусть, например, $S_1 \neq \Phi$. Тогда S_1/Φ — неединичная нормальная подгруппа группы G/Φ и поэтому существует минимальная нормальная подгруппа N/Φ в G/Φ, содержащаяся в S_1/Φ. Так как $N/\Phi \subseteq G^{\mathfrak{F}}/\Phi$ и $F/\Phi \cdot\!\!\lhd G/\Phi$, то $N/\Phi = F/\Phi$. Отсюда получаем, что $N = F$. Тогда из $N \subseteq S_1 \subseteq M_1$ имеем $G = M_1F = M_1N = M_1$, что невозможно.

2. Пусть F/Φ не является минимальной нормальной подгруппой группы G/Φ и $\Sigma = \{L_i/\Phi \mid i \in I\}$ — совокупность всех минимальных нормальных подгрупп группы G/Φ, содержащихся в F/Φ.

2.1. Рассмотрим случай, когда M_1 и M_2 дополняют один и тот же главный фактор группы G из Σ, например, главный фактор L_1/Φ. Тогда $G = M_1L_1 = M_2L_1$.

Предположим, что $L_j \not\subseteq M_1$ для любого $j \in I$, $j \neq 1$. Можем считать, что $2 \in I$. Тогда $L_2 \not\subseteq M_1$ и $G = M_1L_2$. Пусть $i \in \{1, 2\}$. Так как $L_i/\Phi \subseteq F/\Phi = F(G^{\mathfrak{F}}/\Phi)$, по лемме 2.8(4) группа L_i нильпотентна и $L_i \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как $L_i \cap \Phi(G) = \Phi$, то $L_i/L_i \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ — главный фактор группы G. Это означает, что L_i — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа группы G для любого $i = 1, 2$. По лемме 3.2 $L = M_1 \cap L_1L_2$ — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G и $L/\Phi \cong L_1/\Phi$. Последнее означает, что $L/\Phi \in \Sigma$ и $L \subseteq M_1$, что противоречит предположению. Следовательно, найдется такое $j \in I$, $j \neq 1$, что $L_j \subseteq M_1$. Можем считать $L_2 \subseteq M_1$.

В силу задания Σ получаем, что L_1L_2/Φ — неединичная нильпотентная нормальная подгруппа группы G/Φ. Кроме того, $(L_1L_2/\Phi) \cap \Phi(G/\Phi) = (L_1L_2/\Phi) \cap \Phi(G)/\Phi = (L_1L_2 \cap \Phi(G))/\Phi \subseteq (G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))/\Phi = \Phi/\Phi = 1$. Согласно [9, лемма 7.9] подгруппа L_1L_2/Φ дополняема в G/Φ. Пусть D/Φ — дополнение к L_1L_2/Φ в G/Φ и $M := L_1D$. Тогда $G = DL_1L_2 = ML_2$ и M — максимальная подгруппа группы G.

Поскольку $G = M_1L_1 = M_2L_1 = ML_2$, $L_2 \subseteq M_1$, $L_1 \subseteq M$ и $G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \subseteq L_1 \cap L_2$, по лемме 3.5 $M_i \cap M$ — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая максимальная подгруппа групп M и M_i, $i = 1, 2$. Ввиду [9, лемма 1.2(3)] $(M_i \cap M)^{\mathfrak{F}}$ является ω-группой, значит, по теореме 3.1 в группе $M_i \cap M$ существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор K_i, $i = 1, 2$. Тогда K_i является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором групп M и M_i, $i = 1, 2$. Так как по индукции H_1 и K_1 сопряжены в M_1, K_1 и K_2 сопряжены в M, K_2 и H_2 сопряжены в M_2, отсюда следует, что H_1 и H_2 сопряжены в G; противоречие.

2.2. Пусть M_1 и M_2 дополняют соответственно главные факторы L_1/Φ и L_2/Φ группы G из Σ, $L_1/\Phi \neq L_2/\Phi$. Тогда $G = M_1L_1 = M_2L_2$. Если $L_1 \not\subseteq M_2$ (или $L_2 \not\subseteq M_1$), то $G = M_2L_1$ (соответственно $G = M_1L_2$) и приходим к случаю, рассмотренному в п. 2.1. Таким образом, можем считать, что $L_1 \subseteq M_2$ и $L_2 \subseteq M_1$. Как и в п. 2.1, нетрудно проверить, что L_1 и L_2 — нильпотентные $\mathfrak{F}^\omega$-предельные нормальные подгруппы в G. По лемме 3.5 $M_1 \cap M_2$ — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа группы M_i, $i = 1, 2$. Используя теорему 3.1 и индукционное предположение, получаем, что H_1 и H_2 сопряжены в G; противоречие. Теорема доказана.

Согласно [11, следствие 4.2] всякая локальная формация является ω-локальной для любого ω. Тогда при $\omega = \pi(G)$ из теоремы 3.2 непосредственно получаем следующие известные результаты.

Следствие 3.1 (Л. А. Шеметков [8]; см. также [9, теорема 21.4]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

Следствие 3.2 (Картер, Хоукс [3]; см. также [4, теорема V, 3.2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — разрешимая группа. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

Теорема 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и H — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G. Тогда H покрывает каждый f_ω-центральный и изолирует каждый f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$G^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая группа;*

(2) *$G^{\mathfrak{F}}$ — ω-разрешимая группа.*

Доказательство. (1) Пусть $G^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая группа. Если G является ω'-группой, то G не имеет главных ωd-факторов, значит, утверждение верно. Пусть G — ωd-группа. По определению 3.1(2) $H \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь вида (3.1) группы G. Докажем лемму индукцией по параметру t.

Пусть $t = 0$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$. В этом случае каждый главный ωd-фактор группы G согласно лемме 2.5 f_ω-централен в G. Кроме того, группа G покрывает каждый свой главный фактор. Таким образом, при $t = 0$ утверждение верно.

Пусть $t > 0$. Так как H_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа группы G, согласно определению 3.1(1) существует $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа R группы G такая, что $G = H_1R$. Так как $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $G = H_1G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда по [9, лемма 1.2(3)] получаем, что $H_1^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, значит, $H_1^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой группой. Поскольку H — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G, в силу (3.1) H является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в H_1. Таким образом, по индукции для H_1 справедливо утверждение. Пусть L/K — произвольный главный ωd-фактор группы G и $C := C_G(L/K)$.

Рассмотрим случай $K \neq 1$. Так как ввиду [9, лемма 1.2(1)] $\mathfrak{F}$-корадикал группы G/K π-разрешим и по лемме 3.1 HK/K — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в G/K, по индукции для G/K утверждение верно. Если L/K f_ω-централен в G, то $(L/K)/(K/K)$ f_ω-централен в G/K и по индукции HK/K покрывает $(L/K)/(K/K)$. Значит, $L/K \subseteq (HK/K)(K/K)$. Отсюда получаем, что $L \subseteq HK$ и H покрывает L/K. Если L/K f_ω-эксцентрален в G, то $(L/K)/(K/K)$ f_ω-эксцентрален в G/K и по индукции HK/K изолирует $(L/K)/(K/K)$. Тогда $L/K \cap (HK/K) \subseteq (K/K)$. Это означает, что $L \cap HK = K(L \cap H) \subseteq K$, поэтому H изолирует L/K.

Пусть $K = 1$. Рассмотрим случай, когда H_1 не покрывает L. Это означает, что $L \nsubseteq H_1$ и $G = H_1L$. Из $G = H_1G^{\mathfrak{F}}$ следует, что H_1 — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G, поэтому в силу леммы 2.6(2) главный фактор $L/1$

f_ω-эксцентрален в G. Согласно лемме 2.7 $L \cong L \cap G^{\mathfrak{F}}$, тем самым L π-разрешима. Если L — π'-группа, то ввиду $H \in \mathfrak{F}$ имеем $H \cap L = 1$. Следовательно, H изолирует L. Пусть L является абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi$. Поскольку $G = H_1 L$, то $H_1 \cap L = 1$. Так как $H \subseteq H_1$, то $H \cap L = 1$. Таким образом, в этом случае H также изолирует L.

Пусть H_1 покрывает L. Тогда $L \subseteq H_1$. Рассмотрим случай, когда $L/1$ — f_ω-центральный главный фактор группы G. Так как f — внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $G/C \in \mathfrak{F}$, значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C$. Тогда $G = H_1 G^{\mathfrak{F}} = H_1 C$. Отсюда получаем, что $L = L \cap H_1$ — f_ω-центральный главный фактор группы H_1. По индукции H покрывает $L \cap H_1$. Следовательно, $L = L \cap H_1 \subseteq H$, поэтому H покрывает L.

Пусть главный фактор $L/1$ группы G f_ω-эксцентрален в G. Как и выше, в силу леммы 2.7 L является π-разрешимой группой. Если L — π'-группа, то $H \cap L = 1$ и H изолирует L. Пусть L является абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi$. Предположим, что $C \subseteq H_1$. Рассмотрим случай, когда $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ — π'-группа. Тогда $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ π'-разложима и по лемме 2.8(3) R π'-разложима. Это означает, что $R = A \times B$, где $A = R_{\pi'}$, $B = R_\pi$. Тогда $B \subseteq R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Так как B нильпотентна, $B_{p'}$ нормальна в B. Следовательно, B — нормальная p'-замкнутая подгруппа в G. По [15, лемма 1.8.5] $B \subseteq C_G(L)$. Поскольку $A \cap L = 1$, то $A \subseteq C_G(L)$. Таким образом, $R \subseteq C_G(L)$. Тогда $G = H_1 R = H_1 C = H_1$, что невозможно.

Если $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ — πd-группа, то в силу $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ получаем, что $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ — абелева q-группа для некоторого $q \in \pi$. По лемме 2.8(4) группа R нильпотентна, поэтому $R \subseteq F(G) \subseteq C$. Как и выше, получаем, что $G = H_1$; противоречие.

Следовательно, $C \not\subseteq H_1$. Тогда $G = H_1 C$ и $L = L \cap H_1$ — f_ω-эксцентральный главный фактор группы H_1. По индукции H изолирует $L \cap H_1$. Это означает, что $H \cap L \cap H_1 \subseteq K = 1$. Таким образом, $H \cap L = 1$, поэтому H изолирует L.

(2) Доказательство проводится аналогично доказательству п. (1). Теорема доказана.

Следствие 3.3 (Л. А. Шеметков [8], см. также [9, следствие 21.1.1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, то H покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G.*

Следствие 3.4 (Картер, Хоукс [3], см. также [4, теорема V, 3.2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и H — $\mathfrak{F}$-нормализатор разрешимой группы G. Тогда H покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G.*

Лемма 3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G — группа и $G^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $G = SF$ и F — нильпотентная нормальная ω-подгруппа в G, то каждый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор T подгруппы S представим в виде $T = H \cap S$, где H — некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G.*

(2) *Если $G = SO_{\pi'}(G)$, то каждый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор подгруппы S является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы G.*

(3) *Если M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G, то каждый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор подгруппы M содержит некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G.*

Доказательство. По теореме 3.1 в группе G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор. Пусть f — внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.

(1) Допустим, что G — контрпример минимального порядка. Тогда $G = SF$, где F — нильпотентная нормальная ω-подгруппа в G, и найдется такой $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор T группы S, который не допускает представления в виде, указанном в заключении утверждения (1). Предположим, что $G \in \mathfrak{F}$. Тогда G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в G. По [9, теорема 2.3] $S \in \operatorname{form} G \subseteq \mathfrak{F}$, значит, $T = S = G \cap S$; противоречие. Следовательно, $G \notin \mathfrak{F}$.

(a) Рассмотрим случай, когда S — максимальная подгруппа в G. Так как $F \subseteq F(G)$, то $G = SF(G)$. Если S $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то по лемме 3.3(2) S $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая в G. Тогда T является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором группы G и $T = T \cap S$; противоречие. Таким образом, подгруппа S $\mathfrak{F}$-нормальна в G, и по определению 2.3 $G^{\mathfrak{F}} \subseteq S$. Согласно [9, лемма 1.2(2)] $FG^{\mathfrak{F}} = FS^{\mathfrak{F}}$ и поэтому $S^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа.

Предположим, что $O_{\pi'}(G) \neq 1$ и K — минимальная нормальная подгруппа в G, являющаяся π'-группой. Так как $G/G^{\mathfrak{F}}$ — π-группа, то $K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, значит, $K \subseteq S$. Поскольку $G/K = S/K \cdot FK/K$, FK/K — нильпотентная нормальная ω-подгруппа в G/K и в силу [9, лемма 1.2(1)] $(G/K)^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой ω-группой, по индукции для G/K утверждение верно. Согласно лемме 3.1 TK/K является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в S/K, поэтому $TK/K = X/K \cap S/K$ для некоторого $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатора X/K группы G/K. Ввиду теоремы 3.2 и леммы 3.1 $X/K = HK/K$, где H — некоторый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G. Тогда $TK = HK \cap S = (H \cap S)K$. Поскольку T и $H \cap S$ — π-группы, по теореме Шура — Цассенхауза $T = (H \cap S)^x = H^x \cap S$ для некоторого $x \in K$, причем по лемме 3.1 H^x — $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G; противоречие. Следовательно, $O_{\pi'}(G) = 1$.

Пусть $\Phi := \Phi(G)$. Так как по [10, теорема 1] формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщенна, $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi$ и поэтому $G^{\mathfrak{F}}\Phi/\Phi \neq 1$. Пусть R/Φ — минимальная нормальная подгруппа группы G/Φ, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}\Phi/\Phi$. Тогда R/Φ — π-разрешимая ω-группа. Если R/Φ является π'-группой, то по лемме 2.8(3) группа R π'-разложима, значит, $O_{\pi'}(R) \neq 1$, что ввиду $O_{\pi'}(G) = 1$ невозможно. Поэтому R/Φ — элементарная абелева p-группа для некоторого $p \in \pi \cap \omega$. По лемме 2.8(3) R является p-разложимой группой и, следовательно, нильпотентной π-группой, причем $R \leq G^{\mathfrak{F}}\Phi \leq S\Phi = S$. Поскольку $\Phi(G/\Phi) = \Phi/\Phi = 1$, в G/Φ существует максимальная подгруппа M/Φ такая, что $G/\Phi = M/\Phi \cdot R/\Phi$. Таким образом, $G = MR = M\Phi G^{\mathfrak{F}} = MG^{\mathfrak{F}} = MF(G)$, $S = (M \cap S)R = (M \cap S)F(S)$, $M^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа и M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G. По лемме 3.3(2) M является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в G.

В силу леммы 2.6(2) R/Φ — f_{ω}-эксцентральный главный фактор группы G, значит, $G/C_G(R/\Phi) \notin f(p)$. Так как $G = SF(G)$ и $F(G) \leq C_G(R/\Phi)$, то $G/C_G(R/\Phi) \cong S/C_S(R/\Phi) \notin f(p)$ и потому R/Φ также является f_{ω}-эксцентральным главным фактором в S.

Поскольку $G = SF$, то $F \not\subseteq \Phi$ и $F/F \cap \Phi \neq 1$. Пусть $F \cap \Phi := \Phi_1$. Так как F/Φ_1 — неединичная нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G/Φ_1 и $F/\Phi_1 \cap \Phi(G/\Phi_1) = F/\Phi_1 \cap \Phi/\Phi_1 = \Phi_1/\Phi_1 = 1$, по [9, лемма 7.9] F/Φ_1 — прямое произведение некоторого числа минимальных нормальных подгрупп группы G/Φ_1. Из $G/\Phi_1 = S/\Phi_1 \cdot F/\Phi_1$ следует, что в G/Φ_1 найдется минимальная нормальная подгруппа L/Φ_1, содержащаяся в F/Φ_1, такая, что $G/\Phi_1 = S/\Phi_1 \cdot L/\Phi_1$. Тогда $G = SL$ и L — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G. В силу леммы 2.6(1) L/Φ_1 — f_ω-центральный главный фактор в G. По лемме 2.6(2) M покрывает L/Φ_1, поэтому $L \subseteq M$. Тогда $M = M \cap SL = (M \cap S)L$.

Пусть T_1 — произвольный $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор подгруппы $M \cap S$. Так как $M^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа, $M = (M \cap S)L$ и L — нильпотентная нормальная ω-подгруппа в M, по индукции T_1 представим в виде $T_1 = N \cap (M \cap S)$, где N — некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы M, являющийся в силу $\mathfrak{F}^\omega$-критичности M в G $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы G. Таким образом, $T_1 = N \cap S$, где N — некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G.

Установим, что T_1 является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в S. Так как $S = (M \cap S)R$ и R/Φ — главный фактор в S, то $M \cap S$ — максимальная подгруппа в S. Если $M \cap S$ $\mathfrak{F}$-нормальна в S, то по лемме 2.6(1) $M \cap S$ покрывает R/Φ, значит, $R \subseteq (M \cap S)\Phi \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M \cap S$ — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в S. Поскольку $S^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа и $S = (M \cap S)F(S)$, согласно лемме 3.3(2) $M \cap S$ $\mathfrak{F}^\omega$-критическая в S. Это означает, что каждый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы $M \cap S$ является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в S, поэтому T_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы S.

Так как T и T_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторы группы S, по теореме 3.2 $T = T_1^s$ для некоторого $s \in S$. Тогда $T = N^s \cap S$, где N^s — некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G ввиду леммы 3.1; противоречие.

(b) Пусть S не является максимальной подгруппой в G и $S_1 \lessdot G$, $S \subseteq S_1$. Тогда $G = S_1F$, $S_1 = S(S_1 \cap F)$ и $S_1 \cap F$ — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы S_1. Как и в п. (a), ввиду [9, лемма 1.2(2)] $S_1^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой ω-группой. По индукции $T = H_1 \cap S$, где H_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы S_1. Так как $G = S_1F$, по доказанному в п. (a) $H_1 = H \cap S_1$, где H — некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G. Тогда $T = (H \cap S_1) \cap S = H \cap S$; противоречие. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $K := O_{\pi'}(G)$ и $G = SK$. Поскольку $G/G^{\mathfrak{F}}$ является π-группой, $K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Из $G = SG^{\mathfrak{F}}$ ввиду [9, лемма 1.2(3)] получаем, что $S^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа, и по теореме 3.1 в S существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор.

Допустим, что группа G — контрпример минимального порядка и T — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы S, не являющийся $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G. Тогда $S \subset G$. Пусть S_1 — максимальная подгруппа в G такая, что $S \subseteq S_1$. Тогда $S_1 = S(S_1 \cap K) = SO_{\pi'}(S_1)$, $G = S_1K = S_1G^{\mathfrak{F}}$, $S_1^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа и S_1 — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G. По индукции каждый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы S является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы S_1. Таким образом, T — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в S_1. Если S_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G, то T — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G, что противоречит выбору T. Следовательно, S_1 не является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G.

Пусть $\Phi := \Phi(G)$. Так как $G = S_1K$, то $K \nsubseteq \Phi$ и в группе $K/K \cap \Phi$ существует минимальная нормальная подгруппа $R/K \cap \Phi = R(K \cap \Phi)/(K \cap \Phi) \cong R/R \cap K \cap \Phi = R/R \cap \Phi$ группы $G/K \cap \Phi$. Поскольку $R \cap \Phi = R \cap \Phi \cap O_\omega(G)$, то $R/R \cap \Phi \cap O_\omega(G)$ — главный фактор группы G, значит, R — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G. Так как $R \nsubseteq \Phi$, в G существует максимальная подгруппа M такая, что $G = MR = MK = MG^{\mathfrak{F}}$. Тогда M является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G и $M^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа.

Пусть $D := M \cap S_1$. Поскольку S_1 не является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G, то $S_1R = S_1$ и $R \subseteq S_1$. По лемме 3.4 D — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в M. Допустим, что $M \cap K \subseteq S_1$. Так как $K = R(M \cap K)$ и $R \subseteq S_1$, то $K \subseteq S_1$, поэтому $G = KS_1 = S_1$; противоречие. Следовательно, $M \cap K \nsubseteq S_1$, значит, $M \cap K \not\subseteq D$. Тогда $M = D(M \cap K) = DO_{\pi'}(M)$. Пусть T_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы D. По индукции T_1 является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в M, а значит, и $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G.

Поскольку $R \subseteq S_1$, то $S_1 = (M \cap S_1)R = DR = DO_{\pi'}(S_1)$. Тогда по индукции T_1 является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы S_1. Таким образом, T и T_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторы группы S_1. По теореме 3.2 $T = T_1^a$ для некоторого $a \in S_1$. Так как T_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в G, по лемме 3.1 T_1^a также является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G; противоречие. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда $G = MG^{\mathfrak{F}}$ и в силу [9, лемма 1.2(3)] $M^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой ω-группой. По теореме 3.1 в M существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор. Если M — $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа группы G, то всякий $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы M является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G, и утверждение верно.

Пусть M не является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $G = M$, что невозможно. Следовательно, $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G отличен от G и ввиду определения 3.1(2) в G существует $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа L. Это означает, что $G = RL$, где R — $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G. Тогда $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, $L^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа и $R/R \cap \Phi \cap O_\omega(G) = R/R \cap \Phi$ — главный фактор группы G, где $\Phi := \Phi(G)$. Так как M не является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G, то $R \subseteq M$ и $M = R(M \cap L)$. По лемме 3.4 $M \cap L$ — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы L. Пусть T — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в $M \cap L$. Тогда по индукции $H \subseteq T$, где H — некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы L, являющийся ввиду $\mathfrak{F}^\omega$-критичности L в G $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G. Поскольку $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $R/R \cap \Phi$ — π-разрешимая ω-группа.

(a) Пусть $R/R \cap \Phi$ является абелевой p-группой для некоторого $p \in \omega \cap \pi$. Так как по лемме 2.8(4) R — нильпотентная ω-группа и $M = M \cap RL = (M \cap L)R$, по утверждению (1) $T \subseteq K$, где K — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в M. Тем самым установлено, что $H \subseteq K$. Пусть C — произвольный $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы M. По теореме 3.2 $C = K^m$ для некоторого $m \in M$ и H^m — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в G. Тогда из $H \subseteq K$ получаем $H^m \subseteq K^m = C$. Следовательно, в этом случае каждый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы M содержит некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G.

(b) Пусть $R/R \cap \Phi$ — π'-группа. Тогда $R/R \cap \Phi$ π'-разложима и по лемме 2.8(3) R — π'-разложимая группа. Это означает, что $R = A \times B$, где $A = R_\pi$, $B = R_{\pi'}$. Так как $M = R(M \cap L)$, то $M/R \cap \Phi = (R/R \cap \Phi) \cdot (M \cap L/R \cap \Phi)$, значит, $|M : M \cap L|$ — π'-число. Тогда $A \subseteq M \cap L$ и $M = (M \cap L)R = (M \cap L)AB = (M \cap L)B$. Поскольку $B \subseteq O_{\pi'}(M)$, то $M = (M \cap L)O_{\pi'}(M)$ и по утверждению (2) T является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в M. Как и в п. (a), из $H \subseteq T$ ввиду теоремы 3.2 получаем, что утверждение (3) верно. Лемма доказана.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G — группа и $G^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *всякая $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа группы G содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G;*

(2) *всякая $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G;*

(3) *каждый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G содержится по крайней мере в одной $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппе группы G.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1 в группе G существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор.

(1) Пусть L — $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа группы G. Тогда по [9, определение 21.2] либо $L = G$, либо $L \neq G$ и существует $\mathfrak{F}$-субабнормальная $(G - L)$-цепь вида

$$L = L_t < L_{t-1} < \dots < L_1 < L_0 = G, \quad \text{где } t > 0. \tag{3.2}$$

Если $G \in \mathfrak{F}$, то G является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G. Из $G^{\mathfrak{F}} = 1$ получаем, что $L = G$ — единственная $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа в G, значит, утверждение верно.

Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Если $L = G$, то утверждение верно. Пусть $L \neq G$ и существует $\mathfrak{F}$-субабнормальная $(G - L)$-цепь (3.2). Пусть $i \in \{1, \dots, t\}$. По [9, определение 21.2] L_i — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы L_{i-1}. Ввиду [9, лемма 1.2(3)] $L_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа. Тогда согласно лемме 3.6(3) $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор H_i группы L_i содержит некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор H_{i-1} группы L_{i-1}. Таким образом, $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_t \subseteq L_t = L$, где H_0 — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы $L_0 = G$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть F — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то, как и в п. (1), утверждение верно. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда $F < G$ и по теореме 2.1 F является $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппой в G. Согласно [9, определение 21.2] F — $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа в G и по утверждению (1) F содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G и F — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Согласно утверждению (2) F содержит некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор K группы G. По теореме 3.2 $H = K^g$ для некоторого $g \in G$. Так как $K \subseteq F$, то $H = K^g \subseteq F^g$, где F^g — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G ввиду леммы 2.3. Утверждение (3) доказано. Теорема доказана.

Следствие 3.5 (Л. А. Шеметков [9, теорема 21.8]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и G — группа с π-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *всякая $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа группы G содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G;*

(2) *всякая $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа группы G содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G;*

(3) *каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G содержится по крайней мере в одной $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе группы G.*

Пример 3.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\omega \times \mathfrak{B}_2$, где $2 \notin \omega$, $\mathfrak{S}_\omega$ — класс всех разрешимых ω-групп, $\mathfrak{B}_2$ — класс всех групп экспоненты ≤ 2 и G — произвольная 2-группа, не принадлежащая $\mathfrak{B}_2$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация и $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{B}_2} = \Phi(G) \neq 1$. Тогда каждая $\mathfrak{F}^\omega$-предельная подгруппа R группы G содержится в $\Phi(G)$, значит, в G не существует $\mathfrak{F}^\omega$-критических подгрупп. Поэтому в группе G не существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов и условие «быть ω-группой» для $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ в теоремах 3.1–3.5 существенно.

Замечание 3.1. Авторам неизвестно, можно ли в теоремах 3.2–3.4 опустить или ослабить условие π-разрешимости $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ группы G.

Определение 3.2 [16, определение 2.1]. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Группа G называется $\mathfrak{F}_\pi$-*обособленной*, если каждый главный фактор группы G является либо $\mathfrak{F}_\pi$-группой, либо π'-группой.

Вопрос 3.1. *Возможно ли в условиях теорем 3.2–3.4 заменить π-разрешимость $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ группы G одним из следующих условий:*

(1) *его* $\mathfrak{F}_\pi$*-обособленностью,*
(2) *его* π*-обособленностью,*
(3) *его* π*-отделимостью?*

Теорема 3.5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — ω*-локальная формация и* $G^{\mathfrak{F}}$ — *нильпотентная* ω*-подгруппа группы* G. *Тогда множество всех* $\mathfrak{F}^\omega$*-нормализаторов группы* G *совпадает с множеством всех ее* $\mathfrak{F}^\omega$*-покрывающих подгрупп.*

Доказательство. 1. Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Покажем, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 2.1 $H = G$ и по определению 3.1(2) $H = G$ является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы G. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда $H \subset G$, поэтому существует максимальная подгруппа M в G такая, что $H \subseteq M$.

Согласно определению 2.2 из того, что $H \leq U \leq G$, V — нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$, следует $U = HV$. Тогда при $U = G$ и $V = G^{\mathfrak{F}}$ имеем $G = HG^{\mathfrak{F}}$. Отсюда в силу $H \subseteq M$ получаем $G = MG^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G. Поскольку $G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq F(G)$, значит, $G = MF(G)$. По лемме 3.3(2) M является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G. Согласно лемме 2.2(2) H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в M. Ввиду [9, лемма 1.2(3)] $M^{\mathfrak{F}}$ — нильпотентная ω-группа. Тогда по индукции H является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в M. Отсюда в силу $\mathfrak{F}^\omega$-критичности подгруппы M в G получаем, что H — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в G.

2. Пусть L — $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G. Так как по теореме 3.1 $G = LG^{\mathfrak{F}}$, ввиду леммы 2.4 $L \subseteq K$, где K — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Согласно п. 1 K является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G. По теореме 3.2 K и L сопряжены в G. Следовательно, $|L| = |K|$. Это в силу $L \subseteq K$ означает, что $L = K$. Тем самым установлено, что L — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G. Теорема доказана.

Следствие 3.6 (Л. А. Шеметков [8], см. также [9, следствие 21.5.2]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *локальная формация и* G — *группа с нильпотентным* $\mathfrak{F}$*-корадикалом. Тогда множество всех* $\mathfrak{F}$*-нормализаторов группы* G *совпадает с множеством всех ее* $\mathfrak{F}$*-покрывающих подгрупп.*

Следствие 3.7 (Картер, Хоукс [3, теорема 5.6]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *локальная формация и* G — *разрешимая группа. Если* $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, *то множество всех* $\mathfrak{F}$*-нормализаторов группы* G *совпадает с множеством всех ее* $\mathfrak{F}$*-покрывающих подгрупп.*

Теорема 3.6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — ω*-локальная формация Фиттинга,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ *и* $G = A_1A_2\cdots A_n$, *где* $A_1, A_2, \dots, A_n$ — *попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы* G. *Если* $\mathfrak{F}$*-корадикал* $A_i^{\mathfrak{F}}$ *является* π*-разрешимой* ω*-группой, а его силовские* p*-подгруппы абелевы для любого* $p \in \omega$, $i = 1, 2, \dots, n$, *то каждый* $\mathfrak{F}^\omega$*-нормализатор группы* G *является дополнением к* $\mathfrak{F}$*-корадикалу* $G^{\mathfrak{F}}$ *в* G.

Доказательство. Пусть $A_i^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа и силовские p-подгруппы группы $A_i^{\mathfrak{F}}$ абелевы для любого $p \in \omega$, $i = 1, 2, \dots, n$, f — максимальный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 2.9 $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}}A_2^{\mathfrak{F}}\cdots A_n^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа, не содержащая G-главных f_ω-центральных факторов.

Согласно теореме 3.1 в группе G существует по крайней мере один $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор H и $G = G^{\mathfrak{F}}H$. По теореме 3.3 H покрывает каждый f_ω-центральный и изолирует каждый f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G. Следовательно, H изолирует каждый главный фактор группы G ниже $G^{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим главный ряд группы G, проходящий через $G^{\mathfrak{F}}$ вида $G = G_0 > \dots > G_k = G^{\mathfrak{F}} > G_{k+1} > \dots > G_s = 1$. Пусть $D := G^{\mathfrak{F}} \cap H$ и $D_i := D \cap G_i$, $i = k, \dots, s$. Тогда $D = D_k \geq D_{k+1} \geq \dots \geq D_s = 1$ — нормальный ряд группы D. Пусть $l \in \{k, \dots, s-1\}$. Так как H изолирует главный фактор G_l/G_{l+1}, то $H \cap G_l \subseteq G_{l+1}$, поэтому $D_l = H \cap D_l = H \cap D \cap G_l = D \cap (H \cap G_l) \subseteq D_{l+1}$. Это означает, что $D_l/D_{l+1} = 1$ для любого $l \in \{k, \dots, s-1\}$. Следовательно, $D = 1$.

Поскольку $G = G^{\mathfrak{F}}H$ и $|G^{\mathfrak{F}} \cap H| = 1$, то H является дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. Теорема доказана.

Следствие 3.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, и пусть $G = A_1A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешим с абелевыми силовскими подгруппами для любого $i = 1, 2, \dots, n$, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в G.*

Замечание 3.2. Теорема 3.6 является обобщением и развитием основных результатов из [17, 18]. Ряд результатов о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ получен в [12], причем теорема 3.6 и ее следствие являются дальнейшим развитием теоремы 4.3 и ее следствий из [12]. Основные результаты данной работы анонсированы в [19, 20].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* On the Sylow system of a soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. P. 316–323.

2. *Hall P.* On the system normalizers of a soluble group // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. P. 507–528.

3. *Carter R. W., Hawkes T. O.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. V. 5, N 2. P. 175–201.

4. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

5. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. Bd 80, Heft 4. S. 300–305.

6. *Carter R. W.* Nilpotent self-normalizing subgroups and system normalizers // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. P. 507–528.

7. *Mann A.* $\mathfrak{H}$-normalizers of a finite solvable groups // J. Algebra. 1970. V. 14, N 3. P. 312–325.

8. *Шеметков Л. А.* Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 6. С. 684–715.

9. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

10. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.

11. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.

12. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* О дополнениях к корадикалам конечных групп // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 6. С. 27–52.

13. *Ведерников В. А., Сорокина М. М. $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп* // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239.

14. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Мн.: Выш. шк., 2006.

15. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York: Kluwer Acad. Publ. Sci. Press, 2000.

16. *Ведерников В. А.* Конечные группы с холловыми π-подгруппами // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 3. С. 23–48.

17. *Каморников С. Ф.* О дополнении корадикала конечной группы // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2013. № 6. С. 17–23.

18. *Каморников С. Ф., Шеметкова О. Л.* О существовании дополнений к корадикалам конечных групп // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 122–127.

19. *Vedernikov V. A., Sorokina M. M.* On $\mathfrak{F}^{\omega}$-normalizers of finite groups // Материалы Междунар. XI школы-конф. по теории групп, посвященной 70-летию со дня рождения А. Ю. Ольшанского. Красноярск, 2016. С. 87–88.

20. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторы и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы конечных групп // Материалы Междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям П. А. и А. П. Широковых. Казань, 2016. С. 125–126.

Статья поступила 24 марта 2016 г.

Ведерников Виктор Александрович
Московский городской педагогический университет,
институт математики, информатики и естественных наук,
кафедра высшей математики и методики преподавания математики,
ул. Шереметьевская, 29, Москва 127521
`vavedernikov@mail.ru`

Сорокина Марина Михайловна
Брянский гос. университет им. академика И. Г. Петровского,
естественно-научный институт,
кафедра алгебры и геометрии,
ул. Бежицкая, 14, Брянск 241036
`mmsorokina@yandex.ru`