Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 517.55

КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА — БАРНСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Р. Куликов

Аннотация. Получен критерий сходимости интеграла Меллина — Барнса, представляющего решение общей системы алгебраических уравнений. Как следствие, приводится критерий того, что все главные миноры неотрицательной матрицы положительны. В основе доказательства результатов лежат теорема Нильсон — Пассаре — Циха об области сходимости общего интеграла Меллина — Барнса, а также известная теорема из линейной алгебры о разбиении вещественного пространства на многогранные углы.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.312

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, интеграл Меллина — Барнса, гипергеометрическая функция, область сходимости интеграла.

Введение

Меллин в 1921 г. привел интеграл Меллина — Барнса [1], представляющий решение $y(x)$ приведенного алгебраического уравнения вида

$$y^n + x_1 y^{n-1} + \dots + x_{n-1} y - 1 = 0.$$

Этот интеграл имеет непустую область сходимости, которая определяется условиями на аргументы $\theta_j = \arg x_j$. Полное описание области сходимости такого интеграла было получено сравнительно недавно в статьях И. А. Антиповой [2, 3]. Кроме того, в [4, 5] рассматриваются системы дифференциальных уравнений (системы Меллина), которым удовлетворяют решения алгебраического уравнения.

В настоящей работе речь идет об аналогичных исследованиях в многомерной ситуации. Рассмотрим систему алгебраических уравнений вида

$$y_j^{m_j} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} x_\lambda^{(j)} y^\lambda - 1 = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где $\Lambda^{(j)} \subset \mathbb{Z}^n$. Также введем обозначение $\Lambda := \bigsqcup_{j=1}^{n} \Lambda^{(j)}$ для дизъюнктной суммы множеств $\Lambda^{(j)}$. Мощность множества Λ обозначим через N. Множество коэффициентов системы (1) пробегает векторное пространство $\mathbb{C}^\Lambda \cong \mathbb{C}_x^N$, в котором

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете при поддержке гранта Правительства РФ (договор № 14.Y26.31.0006) для научных исследований под руководством ведущих ученых, а также в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ–9149.2016.1.

координаты точек $x = (x_\lambda)$ индексируются элементами $\lambda \in \Lambda$. Группу координат, соответствующую индексам $\lambda \in \Lambda^{(i)}$, как правило, выделяем записью $x_\lambda^{(i)}$, при этом отождествляя $\mathbb{C}^\Lambda$ с декартовым произведением $\mathbb{C}^{\Lambda^{(1)}} \times \dots \times \mathbb{C}^{\Lambda^{(n)}}$; иногда для элементов из $\mathbb{C}^{\Lambda^{(i)}}$ используем обозначение x_λ с обязательным подчеркиванием, что $\lambda \in \Lambda^{(i)}$.

Множество Λ также будем трактовать как матрицу

$$\Lambda = (\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)}) = (\lambda^1, \dots, \lambda^N),$$

столбцами которой являются векторы $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right)$ из показателей мономов системы (1). Здесь имеется в виду, что блок $\Lambda^{(i)}$ матрицы Λ соответствует i-му уравнению системы (1), а нумерация столбцов λ^k внутри каждого из блоков $\Lambda^{(i)}$ произвольная, но фиксированная. Строки матрицы Λ обозначим через φ_j, $j = 1, \dots, n$. Нас интересует ветвь решения $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ системы (1) с условием $y(0) = (1, \dots, 1)$, которую назовем *главным решением.* Следуя [6, 7], моному $y^\mu = y_1^{\mu_1} \dots y_n^{\mu_n}$ главного решения $y = y(x)$ данной системы поставим в соответствие интеграл Меллина — Барнса:

$$\frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^N} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} \Gamma\bigl(u_\lambda^{(j)}\bigr) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\bigl(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\langle \varphi_j, u\rangle\bigr)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\bigl(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\langle \varphi_j, u\rangle + \sum\limits_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} u_\lambda^{(j)} + 1\bigr)} Q(u) x^{-u}\, du, \tag{2}$$

где вектор γ выбирается из многогранника

$$\bigl\{u \in \mathbb{R}^N_{>0} : \langle \varphi_j, u\rangle < \mu_j,\ j = 1, \dots, n\bigr\},$$

а $Q(u)$ — многочлен, выражаемый определителем

$$Q(u) = \frac{1}{m_1 \dots m_n} \det \bigl\| \delta_i^j (\mu_j - \langle \varphi_j, u\rangle) + \bigl\langle \varphi_j^{(i)}, u^{(i)} \bigr\rangle \bigr\|_{i,j=1}^n. \tag{3}$$

Интеграл (2) получается формальным вычислением преобразования Меллина для $y^\mu(x)$ с помощью замены переменных, линеаризующей систему (1) [6, 7].

Рассмотрим совокупность всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где каждый вектор-столбец $\lambda^{(j)} = \left(\lambda_1^{(j)} \dots \lambda_n^{(j)}\right)^T$ пробегает соответствующее множество $\Lambda^{(j)}$, т. е. множество показателей мономов с переменными коэффициентами, участвующих в j-м уравнении (1).

Будем называть минор матрицы *главным*, если совокупность номеров его выделенных строк совпадает с совокупностью номеров выделенных столбцов.

Теорема 1. *Интеграл* (2), *соответствующий решению системы алгебраических уравнений* (1), *имеет непустую область сходимости тогда и только тогда, когда в каждой матрице вида* (4) *все главные миноры положительны.*

Таким образом, видим, что класс систем, для которых интеграл (2) имеет непустую область сходимости, весьма невелик.

В доказательстве теоремы 1 используется результат Нильсон, Пассаре и А. К. Циха (см. [8] или [9, разд. 4.4.1]) о множестве сходимости общего интеграла Меллина — Барнса. Кроме того, важную роль в доказательстве играет теорема о разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на многогранные углы [10] (см. также [11, разд. 7.6]).

Отметим, что в настоящей работе исследуется лишь вопрос о непустоте области сходимости интеграла (2). Вычисление самой области сходимости — трудоемкая задача. Поскольку сингулярные точки решения $y(x)$ системы (1) составляют дискриминантное множество системы (1) (см. [12]), описание областей сходимости тесно связано с понятием коамебы дискриминантного множества (напомним, что *коамебой алгебраического множества* называют его образ на угловое подпространство). В случае $n = 1$ взаимное расположение коамеб для области сходимости и дискриминантного множества иллюстрируется в [2] (см. также [9, п. 4.4]). Частный случай теоремы 1 для $n = 2$ доказан в [13].

1. Необходимое условие сходимости интеграла (2)

Как видно из введения, сопоставленный моному решения интеграл (2) относится к классу интегралов Меллина — Барнса. Напомним, что под обычным кратным интегралом Меллина — Барнса понимается интеграл [14]

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^m} \frac{\prod\limits_{j=1}^{p} \Gamma(\langle A_j, s\rangle + c_j)}{\prod\limits_{k=1}^{q} \Gamma(\langle B_k, s\rangle + d_k)} z_1^{-s_1} \dots z_m^{-s_m}\, ds, \tag{5}$$

где $A_j, B_k \in \mathbb{R}^m$, $c_j, d_k \in \mathbb{C}$ и $ds = ds_1 \dots ds_m$. Вектор $\gamma \in \mathbb{R}^m$ должен выбираться таким образом, чтобы множество интегрирования $\gamma + i\mathbb{R}^m$ не содержало полюсов Г-функций в числителе.

Будем предполагать, что переменное z изменяется в римановой области наложения над комплексным алгебраическим тором $\mathbb{T}^m = (\mathbb{C} \setminus 0)^m$, а значит, множители ядра интеграла (2) определяются как

$$z_j^{-s_j} = e^{-s_j \log z_j}, \quad \arg z_j \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $\theta = \operatorname{Arg} z = (\arg z_1, \dots, \arg z_m)$ и введем функцию

$$g(v) := \sum_{j=1}^{p} |\langle A_j, v\rangle| - \sum_{k=1}^{q} |\langle B_k, v\rangle|. \tag{6}$$

Следующая теорема дает описание области сходимости кратного интеграла Меллина — Барнса.

Теорема 2 [8]. *Для любого множества интегрирования $\gamma + i\mathbb{R}^m$, не содержащего особенности подынтегрального выражения, область сходимости интеграла Меллина — Барнса* (2) *имеет вид* $\operatorname{Arg}^{-1}(U)$, *где*

$$U = \bigcap_{\|v\|=1} \left\{\theta \in \mathbb{R}^m : |\langle v, \theta\rangle| < \frac{\pi}{2} g(v)\right\}. \tag{7}$$

В случае, когда множество U непусто, оно совпадает с внутренностью Θ° многогранника

$$\Theta = \left\{\theta \in \mathbb{R}^m : |\langle v_\nu, \theta\rangle| \le \frac{\pi}{2} g(v_\nu),\ \nu = 1, \dots, d\right\},$$

где $\pm v_1, \dots, \pm v_d$ — *множество всех единичных векторов, порождающих веер* K*, определяемый разбиением пространства* $\mathbb{R}^m$ *гиперплоскостями* $\langle A_j, v\rangle = 0$, $j = 1, \dots, p$, *и* $\langle B_k, v\rangle = 0$, $k = 1, \dots, q$.

Таким образом, область сходимости интеграла (2) непуста, если функция $g(v)$ положительна на компакте (сфере) $\|v\| = 1$. В силу однородности функции $g(v)$ это равносильно свойству ее положительности при $v \neq 0$.

В отличие от (5) интеграл (2) содержит полиномиальный множитель $Q(u)$ (см. (3)), поэтому сформулируем и докажем следующее утверждение.

Лемма. *Область сходимости интеграла* (2) *не зависит от присутствия в нем полиномиального множителя* $Q(u)$.

Доказательство. Заметим, что в определении (3) многочлена $Q(u)$ рассматривается определитель матрицы, равной сумме диагональной матрицы с элементами $(\mu_j - \langle\varphi_j, u\rangle)$ на диагонали и квадратной матрицы с элементами $\left\langle \varphi_j^{(i)}, u^{(i)} \right\rangle$. Поэтому указанный определитель является суммой выражений

$$C \prod_{k \notin I} (\mu_k - \langle\varphi_k, u\rangle) u^{(i_1)}_{\lambda^{(i_1)}} \dots u^{(i_q)}_{\lambda^{(i_q)}}$$

по всем мультииндексам $I = \{i_1, \dots, i_q\}$ мощности $q \in \{0, 1, \dots, n\}$ и всем $\lambda^{(i_j)} \in \Lambda^{(i_j)}$, $j = 1, \dots, q$, а величины C не зависят от переменной u. Тогда интеграл (2) можем записать как сумму интегралов вида

$$\frac{C}{(2\pi i)^N} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^N} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} \Gamma\big(u^{(j)}_\lambda\big) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\big(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\langle\varphi_j, u\rangle\big)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\big(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\langle\varphi_j, u\rangle + \sum\limits_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} u^{(j)}_\lambda + 1\big)} \times \prod_{k \notin I} (\mu_k - \langle\varphi_k, u\rangle) u^{(i_1)}_{\lambda^{(i_1)}} \dots u^{(i_q)}_{\lambda^{(i_q)}} x^{-u}\, du. \quad (8)$$

В полученных интегралах воспользуемся равенством $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, согласно которому

$$\Gamma\big(u^{(i_j)}_{\lambda^{(i_j)}}\big) u^{(i_j)}_{\lambda^{(i_j)}} = \Gamma\big(u^{(i_j)}_{\lambda^{(i_j)}} + 1\big),$$
$$\Gamma\bigg(\frac{\mu_k}{m_k} - \frac{1}{m_k}\langle\varphi_k, u\rangle\bigg)(\mu_k - \langle\varphi_k, u\rangle) = m_k \Gamma\bigg(\frac{\mu_k}{m_k} - \frac{1}{m_k}\langle\varphi_k, u\rangle + 1\bigg).$$

В результате интегралы (8) запишутся в виде (5), т. е. в виде интеграла, у которого подынтегральное выражение кроме ядра x^{-u} содержит только отношение произведений гамма-функции в композиции с аффинными функциями. При этом линейные части указанных функций такие же, как в (2). Но по теореме 1 область сходимости интеграла Меллина — Барнса зависит лишь от этих линейных частей (см. (6)). Таким образом, полином $Q(u)$ не влияет на область сходимости интеграла (2). $\square$

Для интеграла (2) функцию $g(v)$ можно записать в виде

$$g(v) = \sum_{j=1}^{n} \Bigg(\sum_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} \big|v^{(j)}_\lambda\big| + \bigg|\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j, v\rangle\bigg| - \bigg|\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j, v\rangle - \sum_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} v^{(j)}_\lambda\bigg|\Bigg). \quad (9)$$

Определенный в теореме 2 веер K порождается N координатными гиперплоскостями

$$v^{(j)}_\lambda = 0, \quad \lambda \in \Lambda^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и $2n$ гиперплоскостями

$$\langle \varphi_j, v\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$-\frac{1}{m_j}\langle \varphi_j, v\rangle + \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} v_\lambda^{(j)} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отметим, что множество векторов $\{\pm v_1, \dots, \pm v_d\}$, порождающих веер K, состоит из направляющих векторов прямых, образованных пересечениями всевозможных независимых поднаборов из $N-1$ гиперплоскостей в указанном перечне. Такие векторы можно получать как векторные произведения нормальных векторов для этих $N-1$ гиперплоскостей. Тогда скалярное произведение $\langle \varphi_j, v\rangle$ есть определитель матрицы, составленной из строки φ_j и $N-1$ вектор-строк, ортогональных вектору v.

Доказательство положительности всех главных миноров проведем методом математической индукции по порядку k этих миноров.

Заметим, что в состав векторов $\{\pm v_1, \dots, \pm v_d\}$ входят все базисные векторы $e_\lambda^{(i)}$, $\lambda \in \Lambda^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$. По своему определению вектор φ_j имеет на месте с индексом $\lambda^{(i)}$ координату $\lambda_j^{(i)}$, поэтому

$$g\bigl(e_\lambda^{(i)}\bigr) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\lambda_j^{(i)}}{m_j}\right| - \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\lambda_j^{(i)}}{m_j} - \delta_j^i\right| = 1 + \left|\frac{\lambda_i^{(i)}}{m_i}\right| - \left|\frac{\lambda_i^{(i)}}{m_i} - 1\right|.$$

По условию теоремы 1 многогранник Θ невырожден, поэтому имеем неравенство $g\bigl(e_\lambda^{(i)}\bigr) > 0$, из которого получаем, что $\frac{\lambda_i^{(i)}}{m_i}$ и 1 должны быть одного знака. Отсюда $\lambda_i^{(i)} > 0$ для любого $\lambda \in \Lambda^{(i)}$, что и доказывает положительность всех главных миноров порядка 1 матрицы (4), т. е. базу индукции.

Пусть теперь все главные миноры до k-го порядка матрицы (4) положительны. Рассмотрим направляющий вектор v для прямой, полученной пересечением $N-(k+1)$ координатных гиперплоскостей и гиперплоскостей

$$\langle \varphi_{j_1}, u\rangle = 0, \dots, \langle \varphi_{j_k}, u\rangle = 0,$$

причем в набор координатных гиперплоскостей не включаем гиперплоскости с нормалями $e_{\lambda^{(j_1)}}^{(j_1)}, \dots, e_{\lambda^{(j_k)}}^{(j_k)}$ и некоторую гиперплоскость с нормалью вида $e_{\lambda^{(s)}}^{(s)}$, $s \neq j_1, \dots, s \neq j_k$.

Заметим, что координаты $v_\lambda^{(j)} = \bigl\langle v, e_\lambda^{(j)}\bigr\rangle$ вектора v равны 0 для всех $e_\lambda^{(j)}$, кроме $e_{\lambda^{(j_1)}}^{(j_1)}, \dots, e_{\lambda^{(j_k)}}^{(j_k)}$ и $e_{\lambda^{(s)}}^{(s)}$. Кроме того, скалярные произведения $\langle \varphi_j, v\rangle$ равны 0 для всех $j = j_1, \dots, j_k$. Поэтому в обозначениях $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ и $\overline{J} = \{1, \dots, n\} \setminus (J \cup \{s\})$ получаем следующее выражение для $g(v)$:

$$g(v) = \sum_{p\in J}\bigl|v_{\lambda^{(p)}}^{(p)}\bigr| + \bigl|v_{\lambda^{(s)}}^{(s)}\bigr| + \sum_{q\in\bar{J}}\left|\frac{1}{m_q}\langle\varphi_q, v\rangle\right| + \left|\frac{1}{m_s}\langle\varphi_s, v\rangle\right|$$
$$- \sum_{p\in J}\bigl|v_{\lambda^{(p)}}^{(p)}\bigr| - \left|v_{\lambda^{(s)}}^{(s)} - \frac{1}{m_s}\langle\varphi_s, v\rangle\right| - \sum_{q\in\bar{J}}\left|\frac{1}{m_q}\langle\varphi_q, v\rangle\right|.$$

Приводя подобные слагаемые, получим

$$g(v) = \bigl|v_{\lambda^{(s)}}^{(s)}\bigr| + \left|\frac{1}{m_s}\langle\varphi_s, v\rangle\right| - \left|v_{\lambda^{(s)}}^{(s)} - \frac{1}{m_s}\langle\varphi_s, v\rangle\right|.$$

С учетом того, что вектор v есть обобщенное векторное произведение $N-1$ векторов, его координаты представляют собой миноры $(N-1)$-го порядка матрицы, составленной из нормальных векторов для гиперплоскостей. Скалярное произведение $\langle\varphi_j, v\rangle$ можно записать как определитель N-го порядка матрицы, составленной из строки φ_j и $N-1$ вектор-строк, ортогональных v. Таким образом, с учетом единиц на главной диагонали получаем следующее выражение для $g(v)$:

$$\left|\det\begin{pmatrix}\lambda_{j_1}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_1}^{(j_k)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{j_k}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_k}^{(j_k)}\end{pmatrix}\right| + \left|\det\begin{pmatrix}\lambda_{j_1}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_1}^{(j_k)} & \lambda_{j_1}^{(s)}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_{j_k}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_k}^{(j_k)} & \lambda_{j_k}^{(s)}\\ \lambda_{s}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{s}^{(j_k)} & \lambda_{s}^{(s)}\end{pmatrix}\right|$$
$$- \left|\det\begin{pmatrix}\lambda_{j_1}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_1}^{(j_k)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{j_k}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_k}^{(j_k)}\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}\lambda_{j_1}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_1}^{(j_k)} & \lambda_{j_1}^{(s)}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_{j_k}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_k}^{(j_k)} & \lambda_{j_k}^{(s)}\\ \lambda_{s}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{s}^{(j_k)} & \lambda_{s}^{(s)}\end{pmatrix}\right|.$$

Отсюда следует, что для положительности $g(v)$ главный минор $(k+1)$-го порядка должен быть того же знака, что и главный минор k-го порядка. Главный минор k-го порядка положителен по предположению индукции.

Тем самым необходимость условия в теореме 1 доказана.

2. Достаточное условие сходимости интеграла (2)

Пусть для системы (1) выполняется условие положительности главных миноров матриц (4). Рассмотрим функцию $g(v)$, определенную равенством (9). Из неравенства треугольника видно, что эта функция неотрицательна: $g(v) \geq 0$. Это означает, что в неравенствах, определяющих область сходимости (7), в правой части всегда стоит неотрицательное число. Таким образом, область сходимости интеграла (2) непустая, если функция $g(v)$ не обращается в 0 на компакте $\|v\| = 1$. В силу однородности функции $g(v)$ это равносильно свойству ее положительности при $v \neq 0$. Докажем это свойство.

Функция $g(v)$, определенная в (9), может обратиться в 0, только если все слагаемые

$$\sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} \left|v_\lambda^{(j)}\right| + \left|\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j, v\rangle\right| - \left|\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j, v\rangle - \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} v_\lambda^{(j)}\right|, \quad j = 1, \dots, n,$$

равны 0, а такое возможно, только если $(-\langle\varphi_j, v\rangle)$ и все $v_\lambda^{(j)}$ будут иметь один и тот же знак при каждом j. Таким образом, свойство $g(v) = 0$ равносильно совокупности систем следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon_j v_\lambda^{(j)} \geq 0, & \lambda \in \Lambda^{(j)},\ j = 1, \dots, n,\\ -\varepsilon_j\langle\varphi_j, v\rangle \geq 0, & j = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{10}$$

где $\varepsilon_j = \pm 1$. Обозначим $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Заметим, что первая группа неравенств в каждой системе определяет некоторый $N = |\Lambda|-$мерный ортант R_ε в пространстве $\mathbb{R}^N$. Этот ортант можно представить как объединение n-мерных конусов, определяемых следующим образом.

Обозначим через $\tau^{(j)} = \left(\left\{\tau_\lambda^{(j)}\right\}_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}\right)$ вектор размерности $N_j = |\Lambda^{(j)}|$.

Рассмотрим семейство стандартных симплексов

$$\mathfrak{S}_j = \Big\{\tau^{(j)} \in \mathbb{R}^{N_j}_{\geq 0} : \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} \tau_\lambda^{(j)} = 1\Big\}.$$

Для каждой точки $\tau = (\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(n)})$ из декартова произведения $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \dots \times \mathfrak{S}_n$ указанных симплексов и любого набора знаков $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ определим n-мерный конус

$$L_{\tau,\varepsilon} := \left\{v \in \mathbb{R}^N \mid v = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) = (\varepsilon_1 t_1 \tau^{(1)}, \dots, \varepsilon_n t_n \tau^{(n)}) : t \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}\right\}.$$

Нетрудно видеть, что $R_\varepsilon = \bigcup\limits_{\tau\in\mathfrak{S}} L_{\tau,\varepsilon}$.

Сужение системы (10) на поверхность $L_{\tau,\varepsilon}$ записывается в виде

$$\begin{cases} t_j \geq 0, & j = 1, \dots, n, \\ -\varepsilon_j\big(\varepsilon_1\langle\varphi_j^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle t_1 + \dots + \varepsilon_n\big\langle\varphi_j^{(n)}, \tau^{(n)}\big\rangle t_n\big) \geq 0, & j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

С помощью величин $a_j^k := \big\langle\varphi_j^{(k)}, \tau^{(k)}\big\rangle$ образуем матрицу $A := \big\|a_j^k\big\|_{j,k=1}^n$. В силу свойства полилинейности определителей и положительности векторов $\tau^{(j)}$ матрица A наследует свойство положительности главных миноров матриц (4). Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} t_j \geq 0, & j = 1, \dots, n, \\ \varepsilon_j\big(-\varepsilon_1 a_j^1 t_1 - \dots - \varepsilon_n a_j^n t_n\big) \geq 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Так как матрица A невырожденная, n неравенств определяют в пространстве $\mathbb{R}^n$ некоторый n-мерный конус K. Покажем, что пересечение этого конуса и ортанта $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$, определяемого первыми n неравенствами, состоит из одной точки 0. Конус K имеет вид

$$K = \left\{t = -(D_\varepsilon A^{-1} D_\varepsilon)s : s \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}\right\},$$

где D_ε — диагональная матрица с элементами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ на диагонали. Воспользуемся теоремой о разбиении $\mathbb{R}^n$ на многогранные углы [11, разд. 7.6].

Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ — два базиса, причем каждый набор векторов $\nu_1, \dots, \nu_n$, где $\nu_i = e_i$ или ϵ_i, является базисом. Каждый такой базис порождает конус $\left\{\lambda_1\nu_1 + \dots + \lambda_n\nu_n,\ \lambda \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}\right\}$. Очевидно, что число таких конусов равно 2^n.

Теорема 3 (о разбиении $\mathbb{R}^n$ на многогранные углы [10, 11]). *Пусть для определенности базис $e_1, \dots, e_n$ положительно ориентирован. Тогда рассматриваемые 2^n конусов покрывают $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда знак ориентации каждого из базисов $\nu_1, \dots, \nu_n$ равен $(-1)^s$, где s — число векторов ϵ_j в этом базисе.*

Образующими ортанта $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ являются базисные векторы $e_1, \dots, e_n$, образующими конуса K — строки матрицы $-D_\varepsilon\big(\|A_{ij}\|_1^n\big)^T D_\varepsilon$, где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице $A = \|a_{ij}\|_1^n$. Далее потребуется известное тождество Якоби [11, разд. 2.6], состоящее в следующем. Для любого натурального числа p из промежутка $1 \le p < n$ и произвольной перестановки $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ имеем

$$\begin{vmatrix} A_{i_1 j_1} & \dots & A_{i_1 j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_p j_1} & \dots & A_{i_p j_p} \end{vmatrix} = (-1)^{\sigma} |A|^{p-1} \begin{vmatrix} a_{i_{p+1} j_{p+1}} & \dots & a_{i_{p+1} j_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_n j_{p+1}} & \dots & a_{i_n j_n} \end{vmatrix}.$$

Отметим, что в силу тождества Якоби транспонированная присоединенная матрица $\left(\|A_{ij}\|_1^n\right)^T$ сохраняет свойство положительности диагональных миноров. Оба этих набора векторов образуют базисы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Покажем, что последовательное замещение векторов из первого набора соответствующими векторами второго набора приводит к чередованию ориентации этих наборов векторов.

Пусть в базисе $e_1, \dots, e_n$ заменены векторы с номерами $J = \{j_1, \dots, j_p\}$. Тогда матрица, образованная векторами полученного набора, имеет вид

$$(-(A^*)^T D_\varepsilon) E_J + (E - E_J),$$

где E_J — диагональная $(n \times n)$-матрица, у которой диагональные элементы с номерами j_k равны 1, а остальные элементы равны 0. Определитель полученной матрицы равен

$$\det[(-D_\varepsilon (A^*)^T D_\varepsilon) E_J + (E - E_J)]$$
$$= (-1)^p \begin{vmatrix} \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_1} A_{j_1}^{j_1} & \dots & \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_p} A_{j_p}^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{j_p} \varepsilon_{j_1} A_{j_1}^{j_p} & \dots & \varepsilon_{j_p} \varepsilon_{j_p} A_{j_p}^{j_p} \end{vmatrix} = (-1)^p \begin{vmatrix} A_{j_1}^{j_1} & \dots & A_{j_p}^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{j_1}^{j_p} & \dots & A_{j_p}^{j_p} \end{vmatrix}.$$

Здесь минор присоединенной матрицы положителен в силу тождества Якоби, поэтому при замещении p векторов в наборе $e_1, \dots, e_n$ соответствующими образующими конуса K знак меняется p раз, что соответствует условиям теоремы о разбиении $\mathbb{R}^n$ на непересекающиеся конусы. Отсюда получаем, что конус K и ортант $\mathbb{R}^n_{\ge 0}$ имеют только одну общую точку.

В силу произвольного выбора поверхности $L_{\tau,\varepsilon}$ получаем, что система (10) имеет только нулевое решение. Таким образом, доказана достаточность условия в теореме 1.

В заключение отметим следующий любопытный факт из области линейной алгебры, вытекающий из доказательства теоремы 1.

Следствие. *Пусть $a^{(i)}$ — строки неотрицательной квадратной $(n \times n)$-матрицы $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$, определяющие кусочно-линейную функцию*

$$g_A(v) = g_A(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n (|v_i| + |\langle a^{(i)}, v\rangle| - |\langle a^{(i)}, v\rangle - v_i|).$$

Все главные миноры матрицы A положительны тогда и только тогда, когда функция $g_A(v)$ положительна для всех $v \ne 0$.

Для доказательства этого утверждения достаточно в теореме 1 в качестве системы (1) рассмотреть систему уравнений вида

$$y_j^{m_j} + x^{(j)} y_1^{a_{1j}} \dots y_n^{a_{nj}} - 1 = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mellin H. J.* Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1921. V. 172. P. 658–661.
2. *Антипова И. А.* Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 4. С. 3–20.
3. *Antipova I. A., Zykova T. V.* Mellin transforms and algebraic functions // Integral Transform. Spec. Funct. 2015. V. 26, N 10. P. 753–767.
4. *Садыков Т. М.* О многомерной системе дифференциальных гипергеометрических уравнений // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1141–1153.
5. *Дикенштейн А., Садыков Т. М.* Базисы в пространстве решений системы уравнений Меллина // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 9. С. 59–80.
6. *Антипова И. А.* Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 972–980.
7. *Степаненко В. А.* О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций // Вестн. КрасГУ. 2003. Т. 1. С. 35–48.
8. *Nilsson L.* Amoebas, discriminants, and hypergeometric functions: Doctoral thes. Department of Mathematics, Stockholm University, Sweden, 2009.
9. *Садыков Т. М., Цих А. К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.
10. *Samelson H., Thrall R. M., Wesler O.* A partition theorem for Euclidean n-space // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9. P. 805–807.
11. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: МЦНМО, 2015.
12. *Антипова И. А., Цих А. К.* Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76, № 5. С. 29–56.
13. *Kulikov V. R.* Conditions for convergence of the Mellin–Barnes integral for solution to system of algebraic equations // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2014. V. 7, N 3. P. 339–346.
14. *Жданов О. Н., Цих А. К.* Исследование кратных интегралов Меллина — Барнса с помощью многомерных вычетов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 282–298.

Статья поступила 25 июня 2016 г.

Куликов Владимир Русланович
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
v.r.kulikov@mail.ru