Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2000, Том 2, Выпуск 4

УДК **517.98**

МОДУЛЯРНЫЕ МЕРЫ И ОПРЕРАТОРЫ МАГАРАМ

А. Г. Кусраев

Цель настоящей статьи — показать, что модулярные векторные меры и операторы Магарам тесно связаны друг с другом. Точнее говоря, при интегрировании по насыщенной мере возникает оператор Магарам, а интегральное представление оператора Магарам приводит к модулярной насыщенной мере.

1. Введение

Оператором Магарам называют порядково непрерывный оператор в K-пространстве, сохраняющий интервалы. Этот класс операторов впервые рассмотрела Д. Магарам, как вспомогательное техническое средство при построении теории положительных операторов в пространствах измеримых функций (см. цикл работ [14–17], а также небольшой обзор [18], содержащий краткое описание развитого ею метода и формулировку основных результатов). В. Люксембург и А. Шэп [13] распространили часть теории Д. Магарам, связанной с теоремой типа Радона — Никодима, на положительные операторы, действующие в K-пространствах. Термин «оператор Магарам» был введен в [4]. Свойство оператора сохранять интервалы названо свойством Магарам в [13]; такие операторы в [14–17] назывались full-valued. Подробнее об операторах Магарам см. в [5, 6, 7, 9].

Известно, что теорема Радона — Никодима не имеет места для мер со значениями в K-пространстве. Однако, М. Райт показал в [20], что теорема Радона — Никодима справедлива для специального класса модулярных мер с дополнительным условием насыщенности. Пусть Q — экстремальный компакт и $\mu : \mathcal{B} \to C(Q)$ — некоторая мера. Предположим, что $L^\infty(\mu)$ допускает структуру модуля над кольцом $C(Q)$. Тогда модулярность меры μ означает, что соответствующий интеграл является модульным гомоморфизмом из $L^\infty(\mu)$ в $C(Q)$. Эквивалентное условие заключается в том, что пространство $L^2(\mu)$ служит модулем Капланского — Гильберта (см. [12, 20]). Дополнительные сведения о модулярных и насыщенных мерах см. в книге [11], где, в частности, развит булевозначный подход к исследованию этого класса векторных мер.

© 2000 Кусраев А. Г.

Цель настоящей статьи — показать, что модулярные меры и операторы Магарам тесно связаны друг с другом. Точнее говоря, при интегрировании по насыщенной мере возникает оператор Магарам, а интегральное представление оператора Магарам приводит к модулярной насыщенной мере. Необходимые сведения имеются в [1, 2, 5, 7, 11].

2. Предварительные сведения

В этом параграфе приведем схему интегрирования лебеговского типа по мере со значениями в решеточно нормированном пространстве. Такое интегрирование было развито М. Райтом [23] для мер со значениями в алгебрах Стоуна, однако вся теория остается в силе для мер со значениями в произвольном K_σ-пространстве, см. [21, 22]. В нашем изложении мы следуем [11], где построения М. Райта [23] повторены в несколько более общей ситуации: интегрируемыми объектами являются элементы некоторого K_σ-пространства, как в [2, 3], а векторная решетка образов заменена на решеточно нормированное пространство. О векторном интегрировании в K-пространствах и соответствующем варианте теоремы Радона — Никодима см. также [19].

2.1. Пусть G — расширенное K-пространство с порядковой единицей $\mathbf{1}$, а (Y, F) — секвенциально *bo*-полное решеточно нормированное пространство над K-пространством F. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}$ полной булевой алгебры $\mathfrak{E}(\mathbf{1})$ единичных элементов пространства G и конечно аддитивную меру $\mu : \mathcal{A} \to Y$ ограниченной векторной вариации $|\mu| : \mathcal{A} \to F$. Это означает, что $\bigl|\mu(a)\bigr| \leqslant |\mu|\,(a)$ $(a \in A)$, причем имеет место формула (см. [10, 11]):

$$|\mu|\,(a) := \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} |\mu(a_k)| : a_k \wedge a_l = 0, \bigvee_{k=1}^{n} a_k = a \right\}.$$

Обозначим символом $S(\mathcal{A})$ векторную подрешетку в G, состоящую из всех $\mathcal{A}$-простых (конечнозначных) элементов G, т. е. $x \in S(\mathcal{A})$ означает, что имеет место представление $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, где $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ произвольны, а $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathcal{A}$ попарно дизъюнктны. Положим

$$I_\mu(x) := \int x\, d\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(e_k) \quad \bigl(x \in S(\mathcal{A})\bigr).$$

Справедливо следующее утверждение.

2.2. Указанная формула корректно определяет мажорируемый оператор $I_\mu : S(\mathcal{A}) \to Y$, причем

$$\left| \int x\, d\mu \right| \leqslant \int |x|\, d\,|\mu| \quad \bigl(x \in S(\mathcal{A})\bigr).$$

Рассмотрим главный идеал $G(\mathbf{1})$ порожденный единицей $\mathbf{1}$ и введем в нем норму $\|x\| := \inf\{\lambda : |x| \leqslant \lambda\mathbf{1}\}$. Тогда $G(\mathbf{1})$ — AM-пространство. Пусть $C(\mathcal{A})$ — замыкание $S(\mathcal{A})$ в AM-пространстве $G(\mathbf{1})$.

2.3. *Оператор I_μ допускает единственное мажорируемое продолжение на $C(\mathcal{A})$, которое обозначим тем же символом. При этом $\left|I_\mu\right| = I_{|\mu|}$.*

$\triangleleft$ См. [11; пп. 1.2.1, 1.2.2]. $\triangleright$

2.4. *Для каждого мажорируемого оператора $T : C(\mathcal{A}) \to Y$ существует единственная мажорируемая мера $\mu : \mathcal{A} \to Y$ такая, что*

$$Tx = \int x \, d\mu \quad \big(x \in C(\mathcal{A})\big).$$

Предположим теперь, что $\mathcal{A}$ — σ-подалгебра в $\mathfrak{E}(\mathbf{1})$. Рассмотрим расширенное K_σ-пространство $E \subset G$ состоящее из всех $\mathcal{A}$-значных разложений единицы (спектральных функций). Включение $E \subset G$ понимается в смысле отождествления K-пространств G и $\mathfrak{K}(\mathfrak{E}(\mathbf{1}))$.

2.5. Определим теперь интеграл от элемента, аппроксимируемого $\mathcal{A}$-простыми элементами. Скажем, что положительный элемент $x \in E$ *интегрируем* по мере μ, или *μ-интегрируем*, если существует возрастающая последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ положительных элементов в $S(\mathcal{A})$, o-сходящаяся в G к x, причем супремум $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int x_n \, d\left|\mu\right|$ существует в F. Для последовательности (x_n) последовательность интегралов $(I_\mu(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ будет bo-фундаментальной, поэтому можно определить интеграл от элемента x, полагая

$$I_\mu(x) := \int x \, d\mu := bo\text{-}\lim_{n\to\infty} \int x_n \, d\mu.$$

Корректность этого определения проверяется без труда, см. [11; п. 1.2.6]. Элемент $x \in E$ *интегрируем* ($=$ μ-интегрируем) если его положительная часть x^+ и отрицательная часть x^- интегрируемы. Обозначим символом $\mathcal{L}^1(\mu)$ множество всех интегрируемых элементов и для каждого $x \in \mathcal{L}^1(\mu)$ положим

$$I_\mu(x) := \int x \, d\mu := \int x^+ \, d\mu - \int x^- \, d\mu.$$

Легко проверить, что $\mathcal{L}^1(\mu)$ — фундамент в E и $I_\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to Y$ — линейный оператор. Заметим также, что из конструкции интеграла следует $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\left|\mu\right|)$. Определим в $\mathcal{L}^1(\mu)$ векторную норму со значениями в F:

$$\left|x\right|_1 := \int |x| \, d\left|\mu\right| \quad \big(x \in \mathcal{L}^1(\mu)\big).$$

Скажем, что два элемента $x, y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *μ-эквивалентны*, если существует единичный элемент $e \in \mathfrak{G}(\mathbf{1})$, для которого $|\mu|(\mathbf{1} - e) = 0$ и $[e]x = [e]y$. Множество $\mathcal{N}(\mu)$ всех элементов μ-эквивалентных нулю будет секвенциально o-замкнутым порядковым идеалом в $\mathcal{L}^1(\mu)$. Из определения интеграла видно, что $\mathcal{N}(\mu) = \{x \in \mathcal{L}^1(\mu) : |x|_1 = 0\}$. Введем K_σ-пространство $L^1(\mu)$ как фактор-пространство $\mathcal{L}^1(\mu)$ по σ-идеалу $\mathcal{N}(\mu)$. Класс эквивалентности элемента $x \in \mathcal{L}^1(\mu)$ будем обозначать символом $\tilde{x}$. Векторная норма на $\mathcal{L}^1(\mu)$ со значениями в F определяется формулой $|\tilde{x}|_1 := |x|$ $\big(x \in \mathcal{L}^1(\mu)\big)$. Таким образом, $\big(L^1(\mu), |\cdot|\big)$ — решеточно нормированное пространство.

2.6. Теорема о монотонной сходимости. *Допустим, что $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность μ-интегрируемых элементов, для которой последовательность интегралов $\big(I_{|\mu|}(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ порядково ограничена в F. Тогда существует такой элемент $x \in \mathcal{L}^1(\mu)$, что в $L^1(\mu)$ выполнено $\tilde{x} = \bigvee_n \tilde{x}_n$ и*

$$\int x\, d\mu = bo\text{-}\lim_{n\to\infty} \int x_n\, d\mu.$$

$\lhd$ См. [11; п. 1.2.8]. $\rhd$

2.7. Теорема о мажорированной сходимости. *Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность μ-интегрируемых элементов и o-$\lim x_n = x$ в G. Если $y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и $|x_n| \leqslant y$ $(n \in \mathbb{N})$, то $x \in \mathcal{L}^1(\mu)$ и*

$$\int x\, d\mu = bo\text{-}\lim_{n\to\infty} \int x_n\, d\mu.$$

$\lhd$ См. [11; п. 1.2.9]. $\rhd$

2.8. Теорема. *Пусть $\mu : \mathcal{A} \to Y$ — счетно аддитивная мажорируемая мера. Тогда существуют фундамент $\mathcal{L}^1(\mu) \subset E$ и секвенциально bo-непрерывный мажорируемый оператор $I_\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to Y$ такие, что имеют место утверждения:*

(1) *$\mathcal{L}^1(\mu) \supset \mathcal{A}$;*

(2) *$I_\mu e = \mu(e)$ $(e \in \mathcal{A})$;*

(3) *если $L \supset \mathcal{A}$ и $Ie = \mu(e)$ $(e \in \mathcal{A})$ для некоторого фундамента $L \subset E$ и bo-непрерывного мажорируемого оператора $I : E \to Y$, то $L \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ и $Ix = I_\mu x$ $(x \in L)$;*

(4) *$\big|I_\mu\big| = I_{|\mu|}$.*

$\lhd$ См. [11; п. 1.2.4]. $\rhd$

2.9. Теорема. *Пусть E_0 — фундамент в E, содержащий порядковую единицу и $T : E_0 \to Y$ — секвенциально bo-непрерывный мажорируемый линейный оператор. Тогда существует единственная мажорируемая σ-аддитивная мера $\mu : \mathcal{A} \to Y$ такая, что $\mathcal{L}^1(\mu) \supset E_0$ и*

$$Tx = \int x\,d\mu, \quad |T|\,x = \int x\,d\,|\mu| \quad (x \in E_0).$$

$\triangleleft$ См. [11; п. 1.2.11]. $\triangleright$

2.10. *Решеточно нормированное пространство $\big(L^1(\mu), |\cdot|\big)$ br-полно.*

$\triangleleft$ Доказательство основано на тех же соображениях, что и доказательство теоремы Рисса — Фишера для скалярных мер. Приведем схему доказательства. Если последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ br-фундаментальна, то $|x_n - x_m| \leqslant r_k f$ $(n, m \geqslant k)$ для некоторого элемента $f \in F_+$ и числовой последовательности $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к нулю. Положим $L(f) := \{x \in L^1(\mu) : |x| \in F(f)\}$, где $F(f)$ — порядковый идеал, порожденный элементом f. Тогда $(x_n) \subset L(f)$ и достаточно убедиться в том, что $L(f)$ — банахово пространство с нормой $\|x\| := \|\,|x|\,\|_{F(f)}$. Допустим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ абсолютно сходится в $L(f)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ сходится в AM-пространстве $F(f)$, стало быть, r-сходится к той же самой сумме. Положим

$$t := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|, \quad \sigma_n := \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Как видно, последовательность (s_n) состоит из положительных членов, возрастает и $\int s_n d\mu \leqslant t$. Следовательно, по теореме о монотонной сходимости существует предел $y := o\text{-}\lim s_n$, содержащийся в $L^1(\mu)$. Неравенство $|\sigma_n| \leqslant s_n \leqslant y$ влечет, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ o-сходится. Для суммы этого ряда x_0 выполнена оценка $|x_0| \leqslant y$, откуда $x_0 \in L^1(\mu)$. Привлекая теорему 2.7 о сходимости, выводим $|\sigma_n - f_0| = \int |\sigma_n - x_0|\,d\,|\mu| \to 0$. $\triangleright$

Можно получать дальнейшие результаты о полноте пространства интегрируемых элементов при соответствующих дополнительных ограничениях. Например, можно установить секвенциальную bo-полноту $L^1(\mu)$, если пространство F регулярно. Однако разложимость зависит от существенно других свойств меры.

3. Модулярные векторные меры

В этом параграфе введем модулярные меры и выясним условия разложимости и полноты по векторной норме пространства суммируемых элементов.

3.1. До конца параграфа предполагаем, что Y — пространство Банаха — Канторовича над K-пространством F и $\mu : \mathcal{A} \to Y$ — счетно аддитивная мера. Введем *нулевой идеал* меры μ формулой

$$\mathcal{N}(\mu) := \{a \in \mathcal{A} : \ (\forall\, a' \in \mathcal{A})\, a' \leqslant a \ \Rightarrow\ \mu(a') = 0\}.$$

Понятно, что $\mathcal{N}(\mu) = \mathcal{N}(|\mu|) = \{a \in \mathcal{A} : |\mu|\,(a) = 0\}$. Пусть $\tilde{\mathcal{A}}$ и ϕ обозначают фактор-алгебру $\mathcal{A}/\mathcal{N}(\mu)$ и каноническое фактор-отображение $\mathcal{A}/\mathcal{N}(\mu) \to \tilde{\mathcal{A}}$ соответственно. Существует единственная мера $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to Y$, для которой $\tilde{\mu} \circ \phi = \mu$. Более того, $|\tilde{\mu}| = \widetilde{|\mu|}$.

Пусть задан булев гомоморфизм $h : \mathbb{B} := \mathfrak{P}(F) \to \tilde{\mathcal{A}}$. Будем говорить, что μ *модулярна относительно* h или h*-модулярна*, если $b\tilde{\mu}(\phi a) = \tilde{\mu}(h(b) \wedge \phi(a))$ для всех $a \in \mathcal{A}$ и $b \in \mathbb{B}$. Как видно, модулярность меры μ означает, что $b\mu(a) = \mu(b' \wedge a')$ для всех $a' \in \phi(a)$ и $b' \in h(b)$.

Пусть $e := \bigvee\{b \in \mathbb{B} : \ (\forall\, a \in \mathcal{A})\, b\mu(a) = 0\}$. Тогда $e\mu(\mathcal{A}) = \{0\}$ и $\mu(\mathcal{A}) \subset (\mathbf{1} - e)Y$. Более того, $b\mu(\mathcal{A}) = \{0\}$ в том и только в том случае, если $h(b) \in \mathcal{N}(\mu)$. Тем самым, h инъективен на $[\mathbf{0}, \mathbf{1} - e]$. В дальнейшем будем считать, что $\mu(\mathcal{A})^{\perp\perp} = Y$ и в этом случае h представляет собой изоморфное вложение $\mathbb{B}$ в $\tilde{\mathcal{A}}$. Будем говорить, что h-модулярная мера μ *насыщенна* (относительно h), если для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $\mathbb{B}$ и произвольного семейства $(a_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $\mathcal{A}$ существует единственный (с точностью до эквивалентности) элемент $a \in \mathcal{A}$, такой, что $b_\xi\, |\mu|\,(a \triangle a_\xi) = 0$ для всех $\xi \in \Xi$. Это условие равносильно тому, что $h(b_\xi) \wedge \phi(a) = h(b_\xi) \wedge \phi(a_\xi)$ $(\xi \in \Xi)$, поскольку μ h-модулярна.

3.2. В работе [20] М. Райт определил модулярность меры следующим образом. Рассмотрим гомоморфизм $\pi : C(Q) \to L^\infty(\mu)$ (Q — экстремальный компакт). Меру $\mu : \mathcal{B} \to C(Q)$ называют модулярной относительно π, если

$$\int \pi(a) f\, d\mu = a \int f\, d\mu \quad (a \in C(Q),\ f \in L^1(\mu)).$$

Эквивалентность этого определения с данным выше вытекает из 2.10, 3.6 и наличия модульной структуры в разложимом решеточно нормированном пространстве (см. [5, 7]). Насыщенность же меры μ согласно М. Райту [20] означает, что пространство $L^2(\mu)$ представляет собой модуль Капланского — Гильберта. Это определение также равносильно данному выше в силу 3.6 и критерия полноты решеточно нормированного пространства из [5, 7].

3.3. *Мера μ модулярна относительно булева изоморфизма h в том и только в том случае, если таковой является ее точная мажоранта $|\mu|$.*

$\lhd$ Допустим, что μ h-модулярна и докажем соотношение $b\widetilde{|\mu|}\big(\phi(a)\big) = \widetilde{|\mu|}\big(h(b) \wedge \phi(a)\big)$. Оно равносильно равенству $b\,|\tilde{\mu}|\,\big(\phi(a)\big) = |\tilde{\mu}|\,\big(h(b) \wedge \phi(a)\big)$, поскольку $\widetilde{|\mu|} = |\tilde\mu|$. Теперь требуемое проверяется следующими простыми вычислениями использующими 2.1:

$$
\begin{aligned}
b\,|\tilde\mu|\,\big(\phi(a)\big) &= b\bigvee\left\{\sum_{k=1}^{n}\tilde\mu(\tilde a_k) : \tilde a_1\vee\dots\vee\tilde a_n = \phi(a)\right\}\\
&= \bigvee\left\{\sum_{k=1}^{n} b\tilde\mu\big(\phi(a_k)\big) : a_1\vee\dots\vee a_n = a\right\}\\
&= \bigvee\left\{\sum_{k=1}^{n}\tilde\mu\big(\phi(b')\wedge\phi(a_k)\big) : a_1\vee\dots\vee a_n = a\right\}\\
&= \bigvee\left\{\sum_{k=1}^{n}\tilde\mu\big(\phi(c_k)\big) : c_1\vee\dots\vee c_n = \phi(b')\wedge\phi(a)\right\}\\
&= |\mu|\,\big(h(b)\wedge\phi(a)\big),
\end{aligned}
$$

где конечные множества $\{\tilde a_1,\dots,\tilde a_n\}\subset\tilde{\mathcal A}$, $\{a_1,\dots,a_n\}\subset\mathcal A$, и $\{c_1,\dots,c_n\}\subset\mathcal A$ попарно дизъюнктны и $h(b)=\phi(b')$ для некоторого $b'\in\mathcal A$. Обратное утверждение следует из доказанного ниже предложения 4.3. $\triangleright$

3.4. *Пусть F — K-пространство счетного типа. Тогда всякая счетно аддитивная h-модулярная мера μ, определенная на σ-алгебре, будет насыщенной.*

$\triangleleft$ Для счетного разбиения единицы $(b_n)\subset\mathbb B$ и последовательности $(a_n)\subset\mathcal A$ положим $a := \bigvee\{c_n\wedge a_n : n\in\mathbb N\}$, где (c_n) — последовательность попарно дизъюнктных элементов в $\mathcal A$, для которых $h(b_n)=\phi(c_n)$ $(n\in\mathbb N)$. Используя модулярность и счетную аддитивность меры μ, выводим:

$$
\begin{aligned}
b_m\mu(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_m\mu(c_n\wedge a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_m\tilde\mu\big(\phi(c_n)\wedge\phi(a_n)\big)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde\mu\big(\phi(c_m)\wedge\phi(c_n)\wedge\phi(a_n)\big) = \tilde\mu\big(h(b_m)\wedge\phi(a_m)\big)\\
&= b_m\tilde\mu\big(\phi(a_m)\big) = b_m\mu(a_m).\ \triangleright
\end{aligned}
$$

В дальнейшем будем отождествлять меры μ и $\tilde\mu$, если это не ведет к путанице.

3.5. *Решеточно нормированное пространство $L^1(\mu)$ дизъюнктно разложимо в том и только в том случае, если μ — модулярная мера.*

$\triangleleft$ Пусть мера μ модулярна относительно некоторого булева гомоморфизма h. Докажем, что $b\,|x|_1 = \big|h(b)x\big|_1$ для всех $b\in\mathbb B$ и $x\in L^1(\mu)$. Отождествим единичный элемент $h(b) \in \mathcal{A}$ с порядковым проектором $[h(b)]$ в E и будем писать $h(b)x$ вместо $[h(b)]x$. Если $x = \tau_1 a_1 + \dots + \tau_n a_n$, где $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}$ произвольны, а $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ попарно дизъюнктны, то $h(b)x = \tau_1 h(b) \wedge a_1 + \dots + \tau_n h(b) \wedge a_n$ и можем написать

$$I_\mu(h(b)x) = \sum_{k=1}^{n} \tau_k \mu(h(b) \wedge a_k) = \sum_{k=1}^{n} \tau_k b\mu(a_k) = bI_\mu(x).$$

Возьмем теперь возрастающую последовательность $(x_n) \subset S(\mathcal{A})$ такую, что $I_\mu(x) = bo\text{-}\lim_n I_\mu(x_n)$. Тогда $h(b)x = o\text{-}\lim_n h(b)x_n$, поскольку порядковый проектор $[h(b)]$ порядково непрерывен. Более того, $h(b)x_n \leqslant x$, и значит $h(b)x \in L^1(\mu)$, так как $L^1(\mu)$ — порядковый идеал в E. Используя теорему 2.7 о сходимости, выводим

$$bI_\mu(x) = b\big(bo\text{-}\lim_{n\to\infty} I_\mu(x_n)\big) = bo\text{-}\lim_{n\to\infty} I_\mu(h(b)x_n) = I_\mu(h(b)x).$$

Отсюда видно, что $L^1(\mu)$ d-разложимо. Обратное очевидно. $\triangleright$

3.6. *Решеточно нормированное пространство $L^1(\mu)$ дизъюнктно полно в том и только в том случае, если мера μ насыщенна.*

$\triangleleft$ Допустим, что μ насыщенна. Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(F)$, а $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — ограниченное по норме семейство в $L^1(\mu)$. Пусть $e_\xi(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ — спектральная функция элемента x_ξ и положим по определению

$$e(\lambda) := \bigvee_{\xi\in\Xi} h(b_\xi) \wedge e_\xi(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Функция $\lambda \mapsto e(\lambda)$ служит разложением единицы. Это можно проверить непосредственным вычислением, используя бесконечные дистрибутивные законы в векторной решетке. В обосновании нуждается лишь равенство $e := \bigwedge\{e(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = 0$. Поскольку $\big(h(b_\xi)\big)$ — разложение единицы в $\mathcal{A}/\mathcal{N}(\mu)$, то достаточно доказать, что $h(b_\xi) \wedge e = 0$ для всех $\xi \in \Xi$. Соответствующие вычисления имеют вид:

$$h(b_\eta) \wedge e = \bigwedge_{n=1}^{\infty} h(b_\eta) \wedge e(-n) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \left(h(b_\eta) \wedge \bigvee_{\xi\in\Xi} h(b_\xi) e_\xi(-n) \right)$$
$$= \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{\xi\in\Xi} h(b_\eta) \wedge h(b_\xi) e_\xi(-n) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} h(b_\eta) \wedge e_\eta(-n) = 0.$$

По теореме о реолизации расширенного K-пространства в виде векторной решетки всех разложений единицы в фиксированной полной булевой алгебре (см. [2, 3]) существует элемент x в максимальном расширении $mL^1(\mu)$, для которого $e(\lambda) = e^x_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Если $y \in L^1(\mu)$ — верхняя граница семейства $(|x_\xi|)$, то $|x| \leqslant y$, стало быть, $x \in L^1(\mu)$. Применив 1.4.2 (10) из [9], получим $e_\lambda^{h(b_\xi)x} = e_\lambda^{h(b_\xi)x_\xi}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, откуда $h(b_\xi)x = h(b_\xi)x_\xi$. Итак, мы проверили, что $L^1(\mu)$ дизъюнктно полно. Обратное утверждение очевидно и теорема доказана полностью. $\triangleright$

4. Интегральные операторы Магарам

В данном параграфе показано, что модулярная мера насыщенна в том и только в том случае, когда пространство суммируемых элементов с интегральной нормой — пространство Банаха — Канторовича, а интеграл — оператор Магарам. Устанавливается также вариант теоремы Радона — Никодима для насыщенных мер.

4.1. Теорема. *Для счетно аддитивной меры со значениями в пространстве Банаха — Канторовича равносильны следующие утверждения:*

(1) μ *— насыщенная мера;*

(2) $|\mu|$ *— насыщенная мера;*

(3) $L^1(\mu)$ *— пространство Банаха — Канторовича;*

(4) $L^1(\mu)$ *— порядково полная векторная решетка и оператор* $T : L^1(\mu) \to F$, *определенный формулой* $T\tilde{x} = I_{|\mu|}(x)$ $\big(x \in \mathcal{L}^1(\mu)\big)$, *является оператором Магарам.*

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Следует из 3.6.

(2) $\Rightarrow$ (3): Следует из 2.10, 3.6 и критерия полноты решеточно нормированного пространства из [5, 7].

(3) $\Rightarrow$ (4): Как нетрудно убедиться векторная решетка $L^1(\mu)$ порядково σ-полна. По теореме 2.6 F-значная норма в $L^1(\mu)$ секвенциально порядково непрерывна, т. е. для убывающей последовательности $(x_n) \subset L^1(\mu)$ выполняется $o\text{-}\lim_n |x_n| = 0$, если только $o\text{-}\lim_n x_n = 0$. Возьмем порядково ограниченное множество $M \subset L^1(\mu)$ с верхней границей $u \in L^1(\mu)$. Без ограничения общности можно предположить, что M содержит все элементы вида $x_1 \vee \dots \vee x_n$ и $bo\text{-}\sum_{\xi \in \Xi} h(b_\xi)x_\xi$, где $\{x_1, \dots, x_n\} \subset M$, $(x_\xi) \subset M$, и (b_ξ) — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(F)$. В самом деле, добавив к M такие элементы, множество верхних границ M не изменится. Положим $f := \sup\{|x| : x \in M\} \leqslant |u|$ и выберем последовательность $(x_n) \subset M$, для которой $f - |x_n| \leqslant (1/n)f$. Если $y_n := x_1 \vee \dots \vee x_n$, то $f - |y_n| \leqslant (1/n)f$ $(n \in \mathbb{N})$ и (y_n) возрастает. Если $y = \sup_n y_n$, то $|y| = f$. Возьмем теперь произвольный элемент $z \in M$ и проверим, что $z \leqslant y$. Для этого заметим, что $o\text{-}\lim_n y_n \vee z = y \vee z \geqslant y$ и $o\text{-}\lim_n |y_n \vee z| = |y \vee z| \leqslant f$,

так как $y_n \vee z \in M$. Таким образом, $f \leqslant |y| \leqslant |y \vee z| \leqslant f$, значит, $f = |y \vee z|$. Поскольку норма $L^1(\mu)$ аддитивна на конусе, имеют место равенства $f = \big|(y \vee z - y) + y\big| = |y \vee z - y| + |y| = |y \vee z - y| + f$, откуда $|y \vee z - y| = 0$ и $y \vee z = y$. Тем самым установлено, что $y = \sup(M)$ и $L^1(\mu)$ порядково полно.

Рассмотрим направленное вниз множество D и пусть $\inf(D) = 0$. Положим $f := \inf\{|x| : x \in D\}$. Повторив приведенные выше рассуждения, можно выбрать последовательность $(y_n) \subset L^1(\mu)$ (не содержащихся, вообще говоря, в D) такую, что $f = \inf_n |y_n|$ и $0 = \inf_n y_n$. Так как норма порядково σ-непрерывна, то получаем $f = 0$. Тем самым, T порядково непрерывен, поскольку $Tx = \big|x^+\big| - \big|x^-\big|$. Ввиду свойства разложимых решеточно нормированных пространств (см. [5, 7]) $L^1(\mu)$ допускает согласованную модульную структуру над $\mathrm{Orth}(F)$. Следовательно, если $0 \leqslant f \leqslant Tx$ для некоторого $0 \leqslant x \in L^1(\mu)$, то существует $\pi \in \mathrm{Orth}(F)$ такой, что $f = \pi Tx = \pi\,|x| = |\pi x| = T(\pi x)$. Таким образом T обладает свойством Магарам.

(4) $\Rightarrow$ (1): Непосредственно следует из свойств оператора Магарам, см. [7]. $\triangleright$

4.2. Пусть $\nu : \mathcal{A} \to F$ и $\mu : \mathcal{A} \to Y$ — конечно аддитивные меры. Говорят, что μ *абсолютно непрерывна относительно* ν и пишут $\mu \ll \nu$, если $\big|\mu(a)\big| \in \nu(A)^{\perp\perp}$ для всех $a \in \mathcal{A}$. Как видно, из $\mu \ll \nu$ следует $\mathcal{N}(\nu) \subset \mathcal{N}(\mu)$, поэтому корректно определен булев гомоморфизм $\varrho : \mathcal{A}/\mathcal{N}(\nu) \to \mathcal{A}/\mathcal{N}(\mu)$ формулой $\varrho \circ \phi' = \phi$, где ϕ' — канонический фактор-гомоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}/\mathcal{N}(\nu)$. Обозначим символом χ_a порядковый проектор в E, соответствующий единичному элементу $a \in \mathcal{A}$.

4.3. *ν h $\mu \ll \nu$, μ $h \circ \varrho$.*

$\triangleleft$ Не ограничивая общности можно предположить, что ν положительна. По условию для каждого $b \in \mathbb{B}$ выполняется $\big|\mu\big(h(b) \wedge \phi(a)\big)\big| \in \nu\big(h(b) \wedge \phi'(a)\big)^{\perp\perp}$, стало быть, $b^{\perp}\mu\big(h(b) \wedge \phi(a)\big) = 0$ для всех $b \in \mathbb{B}$ и $a \in \mathcal{A}$. Отсюда выводим $\mu\big(h(b) \wedge \phi(a)\big) = b\mu\big(h(b) \wedge \phi(a)\big)$. Заменив b на $b^{\perp}$, получим $b\mu\big(h(b^{\perp}) \wedge \phi(a)\big) = 0$, откуда $b\mu(\phi(a)) = b\mu\big(h(b) \wedge \phi(a)\big)$. Следовательно, $b\mu(\phi(a)) = \mu\big(h(b) \wedge \phi(a)\big)$, что и требовалось. $\triangleright$

4.4. Теорема Радона — Никодима. *Пусть $\mu, \nu : \mathcal{A} \to F$ — счетно аддитивные меры, причем μ положительна и насыщенна. Если ν абсолютно непрерывна относительно μ, то существует такой элемент $y \in \mathcal{L}^1(\mu)$, что*

$$\nu(a) = \int \chi_a y \, d\mu \quad (a \in \mathcal{A}).$$

$\lhd$ Предположим сначала, что $|\nu| \leqslant \mu$. Определим оператор $S_\nu : L^1(\mu) \to F$ формулой

$$S_\nu(\tilde{x}) := \int x\, d\mu \quad (x \in \mathcal{L}^1(\mu)).$$

Как видно, $S_\nu \ll T$, стало быть, по теореме Радона — Никодима для операторов Магарам (см. [5, 13]) можно найти такой $\rho \in \mathrm{Orth}(L^1(\mu))$, что $|\rho| \leqslant I$ и $S_\nu(u) = T(\rho u)$ $(u \in L(\mu))$. Ортоморфизм ρ представляется в виде $\rho(u) = \tilde{y}u$ для некоторого $\tilde{y} \in L^1(\mu)$, $|y| \leqslant \mathbf{1}$, откуда

$$\nu(a) = T(\chi_a \tilde{y}) = \int \chi_a y\, d\mu \quad (a \in \mathcal{A}).$$

Чтобы рассмотреть общий случай, положим $\nu_n := \nu \wedge (n\mu)$ и $S_n := S_{\nu_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $\nu_n \nearrow \nu$, $S_n \nearrow S_\nu$ и в силу доказанного выше существует возрастающая последовательность $(y_n) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, для которой $\nu_n(a) = I_\mu(\chi_a y_n)$ $(a \in \mathcal{A})$. Поскольку $I_\mu(y_n) = \nu_n(\mathbf{1}) \leqslant \nu(\mathbf{1})$, можно применить теорему о монотонной сходимости. Таким образом, элемент $y := \sup_n y_n$ содержится в $\mathcal{L}^1(\mu)$ и $\nu(a) = I_\mu(\chi_a y)$ $(a \in \mathcal{A})$. $\rhd$

4.5. Теорему 4.4 по-существу установил М. Райт в [20] другим способом. Он вывел этот факт из следующего вспомогательного утверждения, непосредственно вытекающего из одного результата И. Капланского [12; теорема 5] (см. [20; лемма 4.2]):

Пусть μ — насыщенная мера со значениями в $C(Q)$ и $T : L^2(\mu) \to C(Q)$ — ограниченный по норме модульный гомоморфизм. Тогда существует единственная функция $g \in L^2(\mu)$, для которой

$$Tf = \int fg\, d\mu \quad \big(f \in L^2(\mu)\big).$$

4.6. *Пусть μ — положительная насыщенная мера. Тогда отображение $x \to \nu_x$, где ν_x определяется формулой $\nu_x(a) := I_\mu(\chi_a x)$ $(a \in \mathcal{A})$, будет решеточным изоморфизмом векторных решеток $L^1(\mu)$ и $\{\mu\}^{\perp\perp}$.*

Литература

1. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
2. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: ГИФМЛ, 1961.—407 с.

3. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.
4. *Кусраев А. Г.* Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.
5. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
6. *Кусраев А. Г.* Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 84–123.
7. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы // В кн: Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки СО РАН, 1995.—С. 212–292.
8. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартная теория векторных решеток // В кн: Векторные решетки и интегральные операторы / Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
9. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
10. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* О порядково непрерывной составляющей мажорируемого оператора // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 4.—С. 127–139.
11. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Некоторые вопросы теории векторных мер.—Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки СО АН СССР, 1988.—182 с.
12. *Kaplansky I.* Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—V. 75, No. 4, P. 839–858.
13. *Luxemburg W. A. J. and Schep A.* A Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math. (N.S.).—1978.—V. 40.—P. 357–375.
14. *Maharam D.* The representation of abstract measure functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1949.—V. 65, No. 2.—P. 279–330.
15. *Maharam D.* Decompositions of measure algebras and spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1950.—V. 69, No. 1.—P. 142–160.
16. *Maharam D.* The representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc.—1953.—V. 75, No. 1.—P. 154–184.
17. *Maharam D.* On kernel representation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—V. 79, No. 1.—P. 229–255.
18. *Maharam D.* On positive operators // Contemp. Math.—1984.—V. 26.—P. 263–277.
19. *Wickstead A. W.* Stone algebra valued measures: integration of vector-valued

functions and Radon–Nikodým type theorems // Proc. London Math. Soc.—1982.—V. 45, No. 2.—P. 193–226.
20. *Wright J. D. M.* A Radon–Nikodým theorem for Stone algebra valued measures // Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—V. 139.—P. 75–94.
21. *Wright J. D. M.* Stone algebra valued measures and integrals // Proc. London Math. Soc. Proc. London Math. Soc.—1969.—V. 19, No. 3.—P. 107–122.
22. *Wright J. D. M.* The measure extension problem for vector lattices // Ann. Inst. Fourier (Grenoble).—1971.—V. 21.—P. 65–68.
23. *Wright J. D. M.* Vector lattice measure on locally compact spaces // Math. Z.—1971.—V. 120.—P. 193–203.

г. Владикавказ *Статья поступила 15 июня 2000 г.*