Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2003, Том 5, Выпуск 1

УДК **517.98**

ИЗМЕРИМЫЕ РАССЛОЕНИЯ C^*-АЛГЕБР

И. Г. Ганиев, В. И. Чилин

Устанавливается, что инволютивная алгебра Банаха — Канторовича над кольцом всех измеримых функций, норма которой удовлетворяет условиям, аналогичным аксиомам C^*-алгебры, допускает единственное с точностью до $*$-изометрии представление посредством измеримого расслоения C^*-алгебр, обладающего векторнозначным лифтингом.

Настоящая работа посвящена изучению пространств Банаха — Канторовича, являющихся одновременно $*$-алгебрами, норма которых обладает C^*-свойством.

Такие объекты являются модулями над кольцом $L_0(\Omega)$ измеримых функций, и поэтому их естественно называть C^*-алгебрами над $L_0(\Omega)$. C^*-алгебры над $L_0(\Omega)$ дают новые содержательные примеры пространств Банаха — Канторовича, теория которых уже достаточно хорошо разработана (см., например [1]). Исследование свойств C^*-алгебр над $L_0(\Omega)$ с использованием методов булевозначного анализа предложено А. Г. Кусраевым [2].

В настоящей работе, следуя общей идеологии представления пространств Банаха — Канторовича в виде измеримых банаховых расслоений (см. [3]), дается описание C^*-алгебр над $L_0(\Omega)$ в виде измеримых расслоений классических C^*-алгебр, что позволяет изучать их методами общей теории банаховых измеримых расслоений.

Используются терминология и обозначения из [1–4].

Пусть $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ — измеримое пространство с полной конечной мерой, $L_0(\Omega)$ — $*$-алгебра классов эквивалентности комплексных измеримых функций, заданных на $(\Omega, \Sigma, \lambda)$.

Пусть U — произвольная $*$-алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Предположим, что U является модулем над $L_0(\Omega)$, причем $(fu)^* = \overline{f}u^*$, $(fu)v = f(uv) = u(fv)$ для всех $f \in L_0(\Omega)$, $u, v \in U$. Рассмотрим на U $L_0(\Omega)$-значную норму $\|\cdot\|$, наделяющую U структурой пространства Банаха — Канторовича, в частности, $\|fu\| = |f|\,\|u\|$ для всех $f \in L_0(\Omega)$, $u \in U$. Будем говорить, что $(U, \|\cdot\|)$ является *C^*-алгеброй над* $L_0(\Omega)$, если для любых $u, v \in U$ имеют место соотношения:

(1) $\|u \cdot v\| \leqslant \|u\|\,\|v\|$;

(2) $\|u^*\| = \|u\|$;

(3) $\|u^*u\| = \|u\|^2$.

Примерами C^*-алгебр над $L_0(\Omega)$ служат алгебры всех ограниченных $L_0(\Omega)$-линейных операторов, заданных на $L_0(\Omega)$-гильбертовых пространствах, а также их $*$-подалгебры, замкнутые по $L_0(\Omega)$-значной норме.

Пусть X отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторую C^*-алгебру $X(\omega)$.

Сечением X называется функция u, определенная почти всюду в Ω и принимающая значения $u(\omega) \in X(\omega)$, $\omega \in \operatorname{dom} u$, где $\operatorname{dom} u$ — область определения u.

Пусть L — некоторое множество сечений.

Определение 1. Пару (X, L) назовем *измеримым расслоением C^*-алгебр*, если
(1) пара (X, L) — измеримое расслоение банаховых пространств (см. [3]);
(2) если $u \in L$, то $u^* \in L$, где $u^* : \operatorname{dom} u \ \to \ u(\omega)^*$;
(3) если $u, v \in L$, то $u \cdot v \in L$, где $u \cdot v : \omega \in \operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v \ \to \ u(\omega) \cdot v(\omega)$.

Сечение s называется ступенчатым, если оно имеет вид $s(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(\omega)\chi_{A_i}(\omega)$, где $c_i \in L$ и $A_i \in \Sigma,\ i = 1, \ldots, n$.

Сечение u называется измеримым, если существует такая последовательность $\{s_n\}$ ступенчатых сечений, что $s_n(\omega) \to u(\omega)$ п. в.

Пусть $M(\Omega, X)$ — множество всех измеримых сечений, $L_0(\Omega, X)$ — факторизация $M(\Omega, X)$ по отношению равенства почти всюду. Через $\hat{u}$ обозначим класс, содержащий сечение $u \in M(\Omega, X)$, и $\|\hat{u}\|$ — класс из $L_0(\Omega)$, содержащий $\|u(\omega)\|$.

Положим $\hat{u} \cdot \hat{v} = \widehat{u(\omega) \cdot v(\omega)}$ и $\hat{u}^* = \widehat{u(\omega)^*}$.

Теорема 1. *Если X измеримое расслоение C^*-алгебр над Ω, то $L_0(\Omega, X)$ является C^*-алгеброй над $L_0(\Omega)$.*

$\lhd$ Согласно теореме 4.1.14 [3] $L_0(\Omega, X)$ есть пространство Банаха — Канторовича над $L_0(\Omega)$. Поскольку $X(\omega)$ $*$-алгебра для всех $\omega \in \Omega$, то $L_0(\Omega, X)$ — $*$-алгебра. Так как $X(\omega)$ — банахова алгебра, то $\|\hat{u}\cdot\hat{v}\| = \|\widehat{u(\omega) \cdot v(\omega)}\|_{X(\omega)} \leqslant \|u(\omega)\|_{X(\omega)} \widehat{\cdot \|} v(\omega)\|_{X(\omega)} = \|\widehat{u(\omega)}\|_{X(\omega)} \cdot \|\widehat{v(\omega)}\|_{X(\omega)} = \|\hat{u}\| \cdot \|\hat{v}\|$. Аналогично устанавливается, что $\|\hat{u}^*\| = \|\hat{u}\|$ и $\|\hat{u}^* \cdot \hat{u}\| = \|\hat{u}\|^2$. Следовательно, $L_0(\Omega, X)$ есть C^*-алгебра над $L_0(\Omega)$. $\rhd$

Пусть $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ — алгебра ограниченных измеримых функций на $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, а $L^\infty(\Omega)$ — алгебра классов существенно ограниченных измеримых функций.

Символом $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ обозначим множество $\{u \in M(\Omega, X) : \|u(\omega)\|_{X(\omega)} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\}$.

Факторизация $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ по отношению равенства почти всюду обозначается через $L^\infty(\Omega, X)$. Ясно, что $L^\infty(\Omega, X)$ — C^*-алгебра над $L^\infty(\Omega)$ относительно операций, индуцированных из $L_0(\Omega, X)$.

Определение 2. (ср. [3]) Пусть $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ лифтинг [3]. Отображение $\ell : L^\infty(\Omega, X) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ будем называть *векторнозначным лифтингом, ассоциированным с p*, если для любых $\hat{u}, \hat{v} \in L^\infty(\Omega, X)$ и $e \in L^\infty(\Omega)$ имеют место соотношения
(1) $\ell(\hat{u}) \in \hat{u}$ и $\operatorname{dom} \ell(\hat{u}) = \Omega$;
(2) $\|\ell(\hat{u})\|_{X(\omega)} = p(\|\hat{u}\|)$;
(3) $\ell(\hat{u} + \hat{v}) = \ell(\hat{u}) + \ell(\hat{v})$;
(4) $\ell(\hat{u} \cdot \hat{v}) = \ell(\hat{u}) \cdot \ell(\hat{v})$;
(5) $\ell(\hat{u}^*) = \ell(\hat{u})^*$;
(6) $\ell(e\hat{u}) = p(e)\ell(\hat{u})$;
(7) множество $\{\ell(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ плотно в $X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть X и Y измеримые расслоения C^*-алгебр над одним и тем же пространством с мерой $(\Omega, \Sigma, \lambda)$. Отображение $H : \omega \in \Omega \to H(\omega)$, где $H(\omega) : X(\omega) \to Y(\omega)$ инъективный $*$-гомоморфизм C^*-алгебр, назовем *C^*-вложением X в Y*, если $\{Hu : u \in M(\Omega, X)\} \subset M(\Omega, Y)$.

В случае равенства $\{Hu : u \in M(\Omega, X)\} = M(\Omega, Y)$ вложение H называется C^*-изоморфизмом из X на Y (в этой ситуации расслоения X и Y будут называться C^*-изоморфными).

Теорема 2. *Для любой C^*-алгебры U над $L_0(\Omega)$ существует единственное с точностью до C^*-изоморфизма измеримое расслоение C^*-алгебр с векторнозначным лифтингом такое, что U — C^*-изоморфно $L_0(\Omega, X)$.*

$\lhd$ Положим $\Gamma = \{u \in U : \|u\| \in L^\infty(\Omega)\}$. Ясно, что Γ является $L^\infty(\Omega)$-модулем, (bo)-плотным в U. Кроме того, Γ — $*$-алгебра и $\|u^*u\| = \|u\|^2$ для любого $u \in \Gamma$. Определим полунорму α_ω на Γ равенством $\alpha_\omega(u) = p(\|u\|)(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, где p — лифтинг в $L^\infty(\Omega)$.

Пусть $I^0_\omega = \{u \in \Gamma : \alpha_\omega(u) = 0\}$, $\Gamma_\omega = \Gamma / I^0_\omega$, $\|\cdot\|_\omega$ норма на Γ_ω, порожденная полунормой α_ω.

Пусть $\pi_\omega : \Gamma \to \Gamma_\omega$ проекция из Γ в Γ_ω. Тогда $\pi_\omega(u \cdot v) = \pi_\omega(u) \cdot \pi_\omega(v)$ и $\pi_\omega(u^*) = \pi_\omega(u)^*$. Так как $\|\pi_\omega(u)\|_\omega = \alpha_\omega(u)$ для $u \in \Gamma$, то $\|\pi_\omega(u)\pi_\omega(v)\|_\omega = \|\pi_\omega(u \cdot v)\|_\omega = \alpha_\omega(u \cdot v) = p(\|u \cdot v\|)(\omega) \leqslant p(\|u\| \cdot \|v\|)(\omega) = p(\|u\|)(\omega) \cdot p(\|v\|)(\omega) = \alpha_\omega(u) \cdot \alpha_\omega(v) = \|\pi_\omega(u)\|_\omega \cdot \|\pi_\omega(v)\|_\omega$ для всех $\omega \in \Omega$ и $u, v \in \Gamma$. Аналогично $\|\pi_\omega(u)^*\|_\omega = \|\pi_\omega(u^*)\|_\omega = \alpha_\omega(u^*) = p(\|u^*\|)(\omega) = p(\|u\|)(\omega) = \alpha_\omega(u) = \|\pi_\omega(u)\|_\omega$. Кроме этого, имеем $\|\pi_\omega(u) \cdot \pi_\omega(u)^*\|_\omega = \|\pi_\omega(u \cdot u^*)\|_\omega = \alpha_\omega(u \cdot u^*) = p(\|u \cdot u^*\|)(\omega) = p(\|u\|^2)(\omega) = p(\|u\|)^2(\omega) = \alpha_\omega(u)^2 = \|\pi_\omega(u)\|^2_\omega$.

Таким образом, $(\Gamma_\omega, \|\cdot\|_\omega)$ удовлетворяет всем аксиомам C^*-алгебры, кроме полноты. Пополнение $X(\omega)$ инволютивной алгебры Γ_ω есть C^*-алгебра [4].

Пусть $i_\omega : \Gamma_\omega \to X(\omega)$ каноническое вложение. Известно, что $i_\omega(x \cdot y) = i_\omega(x) \cdot i_\omega(y)$ и $i_\omega(x^*) = i_\omega(x)^*$ для любых $x, y \in \Gamma_\omega$. Поэтому $\gamma_\omega = \pi_\omega \circ i_\omega$ $*$-гомоморфизм из Γ в $X(\omega)$.

Зададим отображение X, ставящее в соответствие каждому $\omega \in \Omega$ построенную выше C^*-алгебру $X(\omega)$. Через L обозначим множество всех таких сечений $\tilde{u}$, для которых $\tilde{u}(\omega) = \gamma_\omega(u)$, где $u \in \Gamma$. Ясно, что (X, L) является измеримым расслоением банаховых пространств. Справедливость условий (2) и (3) из определения измеримого расслоения C^*-алгебр вытекает из определения L. Это означает, что (X, L) есть измеримое расслоение C^*-алгебр.

Рассмотрим $L_0(\Omega, X)$ — C^*-алгебру над $L_0(\Omega)$ с $L_0(\Omega)$-значной нормой $\|\cdot\|_{L_0(\Omega,X)}$. Покажем, что U — C^*-изоморфно $L_0(\Omega, X)$.

Для $u \in \Gamma$ положим $\Phi_0(u) = \hat{\tilde{u}}$. Очевидно, что Φ_0 — изометрия. Кроме того, Φ_0 удовлетворяет следующим равенствам:

$$\Phi_0(u \cdot v) = \widehat{\widetilde{u \cdot v}} = \widehat{\gamma_\omega(u \cdot v)} = \widehat{\gamma_\omega(u) \cdot \gamma_\omega(v)} = \widehat{\gamma_\omega(u)} \cdot \widehat{\gamma_\omega(v)} = \hat{\tilde{u}} \cdot \hat{\tilde{v}} = \Phi_0(u) \cdot \Phi_0(v)$$

и

$$\Phi_0(u^*) = \widehat{\widetilde{u^*}} = \widehat{\gamma_\omega(u^*)} = \widehat{\gamma_\omega(u)}^* = (\hat{\tilde{u}})^* = \Phi_0(u)^*.$$

Аналогично, как и в доказательстве теоремы 3.4.2 [3], Φ_0 продолжается до L_0-модульного изометрического изоморфизма Φ из U на $L_0(\Omega, X)$. Кроме того, ясно, что Φ будет сохранять умножение и инволюцию, т. е. Φ является C^*-изоморфизмом из U на $L_0(\Omega, X)$.

Теперь покажем, что (X, L) измеримое расслоение с векторнозначным лифтингом. Сначала установим, что $\Gamma = L^\infty(\Omega, X)$. Так как U C^*-изоморфно $L_0(\Omega, X)$, то U можно отождествить с $L_0(\Omega, X)$. По определению $\Gamma = \{\hat{u} \in L_0(\Omega, X) : \|\hat{u}\| \in L^\infty(\Omega)\}$. Так как $L^\infty(\Omega, X) = \{\hat{u} \in L_0(\Omega, X) : \|\hat{u}\| \in L^\infty(\Omega)\}$, получаем, что $\Gamma = L^\infty(\Omega, X)$ (более точно, Γ отождествляется с $L^\infty(\Omega, X)$ с помощью C^*-изоморфизма Φ). Так как $\|\gamma_\omega(\hat{u})\|_{X(\omega)} = \|\pi_\omega(\hat{u})\|_{X(\omega)} = p(\|\hat{u}\|)(\omega) \leqslant \|p(\|\hat{u}\|)\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|\,|\hat{u}|\,\|_{L^\infty(\Omega)}$ для любого $\hat{u} \in \Gamma$ и для всех

$\omega \in \Omega$, то $\gamma_\omega(\hat{u}) \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$. Определим отображение $\ell : L^\infty(\Omega, X) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ равенством $\ell(\hat{u})(\omega) = \gamma_\omega(\hat{u})$.

Поскольку Γ отождествляется с $L^\infty(\Omega, X)$ с помощью Φ, то элемент $\hat{u} \in \Gamma$ отождествляется с элементом $\Phi(\hat{u}) = \widehat{\gamma_\omega(\hat{u})}$. Это означает, что $\ell(\hat{u}) \in \hat{u}$. Так как $\gamma_\omega(\hat{u})$ определен для всех $\omega \in \Omega$, то $\operatorname{dom} \ell = \Omega$. Точно так же, из определения ℓ следует, что $\|\ell(\hat{u})\| = p(\|\hat{u}\|)$. Линейность ℓ очевидна. Из равенств $\ell(\hat{u} \cdot \hat{v})(\omega) = \gamma_\omega(\hat{u} \cdot \hat{v}) = \gamma_\omega(\hat{u}) \cdot \gamma_\omega(\hat{v}) = \ell(\hat{u})(\omega) \cdot \ell(\hat{v})(\omega)$ и $\ell(\hat{u}^*)(\omega) = \gamma_\omega(\hat{u}^*) = \gamma_\omega(\hat{u})^* = \ell(\hat{u})^*(\omega)$ следуют свойства (4), (5) из определения векторнозначного лифтинга. Свойство (6) проверяется аналогично.

По построению $\{\ell(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ плотно в $X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Покажем теперь единственность X (с точностью до C^*-изоморфизма). Пусть X и Y измеримые расслоения C^*-алгебр с векторнозначными лифтингами ℓ и ℓ' для которых $L_0(\Omega, X)$ и $L_0(\Omega, Y)$ C^*-изоморфны U.

Пусть i — C^*-изоморфизм из $L^\infty(\Omega, X)$ на $L^\infty(\Omega, Y)$. Определим линейную изометрию $H_0(\omega)$ из $X_0(\omega) = \{\ell(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ в $Y_0(\omega) = \{\ell'(\hat{v})(\omega) : \hat{v} \in L^\infty(\Omega, Y)\}$ равенством $H_0(\omega)(\ell(\hat{u})(\omega)) = \ell'(i(\hat{u}))(\omega)$. Из равенств $H_0(\omega)(\ell(\hat{u}_1)(\omega) \cdot \ell(\hat{u}_2)(\omega)) = H_0(\omega)(\ell(\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2)(\omega)) = \ell'(i(\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2))(\omega) = \ell'(i(\hat{u}_1) \cdot i(\hat{u}_2))(\omega) = \ell'(i(\hat{u}_1))(\omega) \cdot \ell'(i(\hat{u}_2))(\omega) = H_0(\omega)(\ell(\hat{u}_1)(\omega)) \cdot H_0(\omega)(\ell(\hat{u}_2)(\omega))$ и $H_0(\omega)(\ell(\hat{u})^*(\omega)) = H_0(\omega)(\ell(\hat{u}^*)(\omega)) = \ell'(i(\hat{u}^*))(\omega) = \ell'(i(\hat{u})^*)(\omega) = \ell'(i(\hat{u}))^*(\omega) = H_0(\omega)(\ell(\hat{u})(\omega))^*$ следует, что $H_0(\omega)$ сохраняет умножение и инволюцию. Ввиду плотности $X_0(\omega)$ в $X(\omega)$ и $Y_0(\omega)$ в $Y(\omega)$, оператор $H_0(\omega)$ продолжается до $*$-изоморфизма C^*-алгебры $X(\omega)$ на C^*-алгебру $Y(\omega)$. Таким образом, X и Y — C^*-изоморфны. $\rhd$

Литература

1. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
2. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ инволютивных банаховых алгебр.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1996.—96 с.
3. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно-нормированных пространств. // Тр. ИМ СО РАН.—1995.—Т. 29.—С. 63–211.
4. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления.—М.: Наука, 1974.—399 с.

г. Ташкент

Статья поступила 11 марта 2003 г.