Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2003, Том 5, Выпуск 3

УДК **517.98**

КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЫ В K-ПРОСТРАНСТВАХ

Е. К. Басаева

Введено понятие квазидифференциала отображения со значениями в пространстве Канторовича. Получены новые формулы для вычисления квазидифференциала произведения, супремума и инфимума.

Квазидифференцируемые функции и операторы введены в работах В. Ф. Демьянова, Л. Н. Поляковой, А. М. Рубинова [1, 2]. Квазидифференциальное исчисление, построенное в [1–4] и работах других авторов, достаточно хорошо разработано для скалярных функций. О современном состоянии теории квазидифференцируемых функций можно судить по сборнику трудов [5]. В [4; Приложение III] показано как методы квазидифференциального исчисления могут быть применены к отображениям, действующим в банаховы K-пространства. Однако квазидифференциалы операторов, действующих в более общих K-пространствах, до сих пор не исследовались.

Статья посвящена распространению квазидифференциального исчисления на операторы, действующие в произвольные K-пространства. Изучаются алгебраические и порядковые свойства квазидифференциалов отображений, определенных в произвольном векторном пространстве со значениями в пространстве Канторовича. Квазидифференциалы отображений, действующих в топологических векторных пространствах, предполагается рассмотреть в одной из последующих работ.

Отображение называют квазидифференцируемым во внутренней точке области определения, если в этой точке существует производная по направлениям, которая представляет собой разность двух сублинейных операторов. Вопрос линеаризации решается с помощью двойственности Минковского, которая естественным образом распространяется на разности сублинейных операторов, см. [6, 7]. Тем самым, возникает довольно широкий класс отображений, включающий выпуклые и вогнутые операторы, допускающий линеаризацию.

Задача выражения квазидифференциала составного отображения через квазидифференциалы составляющих отображений естественным образом распадается на три этапа: 1) нахождение явного вида производной по направлениям через производные по направлениям составляющих отображений; 2) представление производной по направлениям в виде разности сублинейных операторов, используя полученную на первом этапе информацию; 3) вычисление квазидифференциала через квазидифференциалы составляющих отображений. Первый этап состоит в вычислении соответствующих пределов и использует приемы классического анализа с некоторыми техническими модификациями. Второй этап либо очевиден, либо требует изобретения каких-либо искусственных приемов.

Третий этап опирается на двойственность Минковского, причем расширенную с класса сублинейных операторов на более широкий класс квазилинейных операторов.

В статье использованы обозначения и терминология из [6–8].

1. Предварительные сведения

При изучении сублинейных операторов и их опорных множеств удобно использовать *двойственность Минковского*: отображение $\partial : \mathrm{Sbl}(X,E) \to \mathrm{CS}(X,E)$, сопоставляющее каждому сублинейному оператору его субдифференциал (в нуле). В этом параграфе рассмотрено продолжение двойственности Минковского на класс квазилинейных операторов — операторов, представимых в виде разности сублинейных операторов, построенное в [7; 1.5.6, 1.5.7].

1.1. Пусть X — векторное пространство, E — произвольное K-пространство и $A := \mathrm{Orth}(E)$. Напомним (см. [7]), что *двойственностью Минковского* называют отображение $\partial : \mathrm{Sbl}(X,E) \to \mathrm{CS}(X,E)$, сопоставляющее сублинейному оператору p его опорное множество (= субдифференциал в нуле) ∂p. Это отображение служит изоморфизмом A-конических полурешеток $\mathrm{Sbl}(X,E)$ и $\mathrm{CS}_c(X,E)$, причем обратное отображение $\sup : \mathrm{CS}_c(X,E) \to \mathrm{Sbl}(X,E)$ множеству $\mathcal{U} \subset \mathrm{CS}_c(X,E)$ сопоставляет сублинейный оператор $\sup(\mathcal{U}) : X \to E$, действующий по правилу

$$\sup(\mathcal{U}) : x \mapsto \sup\{Tx : \ T \in \mathcal{U}\} \quad (x \in X).$$

Согласно теореме 1.5.6 из [7] A-конические полурешетки $\mathrm{Sbl}(X,E)$ и $\mathrm{CS}_c(X,E)$ погружаются в унитарные решеточно упорядоченные A-модули $[\mathrm{Sbl}(X,E)]$ и $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ соответственно. Более того, двойственность Минковского ∂ и отображение $\sup$ допускают продолжение до изоморфизмов решеточно упорядоченных A-модулей

$$[\partial] : [\mathrm{Sbl}(X,E)] \to [\mathrm{CS}_c(X,E)], \quad [\sup] : [\mathrm{CS}_c(X,E)] \to [\mathrm{Sbl}(X,E)],$$

причем $[\partial]^{-1} = [\sup]$. Остановимся немного подробнее на строении модулей $[\mathrm{Sbl}(X,E)]$ и $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ и изоморфизмов $[\partial]$ и $[\sup]$.

Как отмечено в [7; 1.5.7], $[\mathrm{Sbl}(X,E)]$ можно отождествить с A-подмодулем в E^X, состоящим из всех отображений из X в E, представимых в виде разности двух сублинейных операторов. Последнее множество, обозначаемое в дальнейшем символом $\mathrm{QL}(X,E)$, действительно является модулем: если $f = p - q$ для некоторых $p, q \in \mathrm{Sbl}(X,E)$ и $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, то имеют место равенства

$$\alpha f := \alpha \circ f = (\alpha^+ p + \alpha^- q) - (\alpha^- p + \alpha^+ q),$$

доказывающие, что $\alpha f \in \mathrm{QL}(X,E)$. Элементы $\mathrm{QL}(X,E)$ будем называть *квазилинейными операторами.* Итак, $\mathrm{QL}(X,E) := \mathrm{Sbl}(X,E) - \mathrm{Sbl}(X,E)$, причем структура упорядоченного A-модуля индуцирована из E^X, т. е. вводится поточечно. В частности, порядок в $\mathrm{QL}(X,E)$ определяется конусом положительных элементов $\{p \in \mathrm{QL}(X,E) : \ p(x) \geqslant 0 \ (x \in X)\}$.

Упомянутое отождествление производится следующим образом. Паре сублинейных операторов $p, q \in \mathrm{Sbl}(X,E)$ поставим в соответствие квазилинейный оператор $\phi(p,q) : x \mapsto p(x) - q(x)$ $(x \in X)$, $\varphi : \mathrm{Sbl}(X,E) \times \mathrm{Sbl}(X,E) \to [\mathrm{Sbl}(X,E)]$ — фактор-отображение. Очевидно, что пары (p,q) и (p',q') представляют один и тот же квазилинейный оператор в том и только в том случае, когда $p + q' = p' + q$, что означает эквивалентность этих пар, а значит и справедливость равенства $\varphi(p,q) = \varphi(p',q')$. Тем самым, существует единственный изоморфизм $i : [\mathrm{Sbl}(X,E)] \to \mathrm{QL}(X,E)$ такой, что $i \circ \varphi = \phi$. Иными словами, если $[p,q]$ — класс эквивалентности пары (p,q), то $i([p,q]) = p - q$.

1.2. *Множество $\mathrm{QL}(X,E)$ с указанными операциями и порядком представляет собой решеточно упорядоченный A-модуль. Если операторы $f_1,\dots,f_k \in \mathrm{QL}(X,E)$ представимы в виде $f_i = p_i - q_i$, где $p_i, q_i \in \mathrm{Sbl}(X,E)$ $(i = 1,\dots,k)$, то их супремум и инфимум (вычисляемые поточечно) также входят в $\mathrm{QL}(X,E)$, причем имеют место представления*

$$\bigvee_{i=1}^{n} f_i = \bigvee_{i=1}^{n} \Big\{ p_i + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} q_j \Big\} - \sum_{j=1}^{n} q_j, \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} f_i = \sum_{j=1}^{n} p_j - \bigvee_{i=1}^{n} \Big\{ q_i + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} p_j \Big\}.$$

$\lhd$ Определим операторы $p, q : X \to E$ формулами

$$p(x) := \bigvee_{i=1}^{n} \Big\{ p_i(x) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} q_j(x) \Big\}, \qquad q(x) := \sum_{j=1}^{n} q_j(x).$$

Очевидно, что операторы p и q сублинейны, следовательно, достаточно установить, что $\bigvee_{i=1}^{n} f_i = p - q$. Последнее вытекает из следующих выкладок, в которых используется соотношение $a_1 \vee \dots \vee a_n + b = (a_1 + b) \vee \dots \vee (a_n + b)$, справедливое в любой векторной решетке:

$$\begin{aligned} \bigvee_{i=1}^{n} f_i(x) &= \bigvee_{i=1}^{n} \Big\{ p_i(x) - q_i(x) \Big\} = \bigvee_{i=1}^{n} \Big\{ p_i(x) - q_i(x) \Big\} + \sum_{j=1}^{n} q_j(x) - q(x) \\ &= \bigvee_{i=1}^{n} \Big\{ p_i(x) - q_i(x) + \sum_{j=1}^{n} q_j(x) \Big\} - q(x) = p(x) - q(x). \end{aligned}$$

Аналогично, применяя формулу $a_1 \wedge \dots \wedge a_n + b = (a_1 + b) \wedge \dots \wedge (a_n + b)$, выводим представление для поточечного инфимума:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i_1}^{n} f_i(x) &= \bigwedge_{i=1}^{n} \Big\{ p_i(x) - q_i(x) \Big\} = p(x) - \sum_{j=1}^{n} p_j(x) + \bigwedge_{i=1}^{n} \{ p_i(x) - q_i(x) \} \\ &= p(x) + \bigwedge_{i=1}^{n} \Big\{ -q_i(x) - \sum_{j=1}^{n} p_j(x) + p_i(x) \Big\} = p(x) - \bigvee_{i=1}^{n} \Big\{ q_i(x) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} p_j(x) \Big\} \\ &= p(x) - q(x), \end{aligned}$$

где на этот раз обозначено

$$p(x) := \sum_{j=1}^{n} p_j(x), \quad q(x) := \bigvee_{i=1}^{n} \Big\{ q_i(x) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} p_j(x) \Big\}.$$

Таким образом, точные границы конечного числа квазилинейных операторов также квазилинейны, что и требовалось. $\rhd$

1.3. Рассмотрим теперь подробнее *модуль опорных множеств* $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$. Прежде всего проверим, что в A-конической полурешетке $\mathrm{CS}_c(X,E)$ выполняетя закон сокращения.

(1) *Пусть $U, V, W \in \mathrm{CS}_c(X, E)$. Если $U + W \supset V + W$, то $U \supset V$. Если же $U + W = V + W$, то $U = V$.*

$\lhd$ Допустим, что $U = \partial p$, $V = \partial q$ и $W = \partial r$ для некоторых сублинейных операторов $p, q, r : X \to E$. Тогда, привлекая аддитивность и монотонность двойственности Минковского, выводим $\partial(p + r) = \partial p + \partial r \supset \partial q + \partial r = \partial(q + r)$. Отсюда $p + r \geqslant q + r$ и, стало быть, $p \geqslant q$ или, что то же самое $U = \partial p \supset \partial q = V$. Второе утверждение очевидным образом следует из первого. $\rhd$

Отношение эквивалентности в $\mathrm{CS}_c(X, E)$ вводится следующим образом: пары (U_1, V_1) и (U_2, V_2) эквивалентны в том и только в том случае, если $U_1 + V_2 = U_2 + V_1$, см. [8; 1.5.6]. Пусть $[U, V]$ обозначает класс эквивалентности пары опорных множеств (U, V). Тогда алгебраические операции (сложение и умножение на элементы кольца $\mathrm{Orth}(E)$) в $[\mathrm{CS}_c(X, E]$ вводятся формулами:

$$[U_1, V_1] + [U_2, V_2] := [U_1 + U_2, V_1 + V_2];$$
$$\alpha[U, V] := [\alpha^+ U + \alpha^- V,\ \alpha^+ V + \alpha^- U].$$

Эти определения корректны, так как согласуются с эквивалентностью в множестве упорядоченных пар опорных множеств. В частности, противоположный элемент задается формулой $-[U, V] = [V, U]$, а класс эквивалентности $[U, V]$ будет нулем в том и только в том случае, если $(U, V) \sim (\{0\}, \{0\})$, т. е. если $U = V$. Отношение порядка в модуле $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$ вводится с помощью конуса положительных элементов

$$K = \{[U, V] \in [\mathrm{CS}_c(X, E)] :\ U \supset V\}.$$

Тем самым, справедливы следующие соотношения:

$$[U_1, V_1] \geqslant [U_2, V_2] \leftrightarrow [U_1, V_1] - [U_2, V_2] \geqslant 0 \leftrightarrow U_1 - V_2 \supset V_1 - U_2.$$

Вложение $\iota : \mathrm{CS}_c(X, E) \to [\mathrm{CS}_c(X, E)]$ определяется формулой $\iota(U) = [U, \{0\}]$. Для произвольной пары опорных множеств $U, V \in \mathrm{CS}_c(X, E)$ будет $[U, V] = [U, \{0\}] + [\{0\}, V] = [U, \{0\}] - [V, \{0\}] = \iota(U) - \iota(V)$, откуда видно, что конус $\iota\big(\mathrm{CS}_c(X, E)\big)$ является воспроизводящим.

Согласно теореме 1.5.6 из [7] двойственность Минковского допускает распространение $[\partial]$ на модуль $[\mathrm{Sbl}(X, E)]$. Поскольку последний отождествляется с $\mathrm{QL}(X, E)$, то возникает изоморфизм из $\mathrm{QL}(X, E)$ на $\mathrm{CS}_c(X, E)$, который будем обозначать символом $\mathcal{D}$, т. е. полагаем по определению $\mathcal{D} := [\partial] \circ i^{-1}$. Обратный к нему изоморфизм имеет вид $\mathcal{S} := i \circ [\sup]$, так как $\mathcal{D}^{-1} = i \circ [\partial]^{-1} = \mathcal{S}$. Отображение $[\partial]$ определяется равенством $[\partial](\varphi(p, q)) = [\partial p, \partial q]$, значит, в силу наших соглашений можем написать $\mathcal{D}(\phi(p, q)) = [\partial p, \partial q]$, каковы бы ни были $p, q \in \mathrm{Sbl}(X, E)$. Итак, если $l = p - q$, то $\mathcal{D}l = [\partial p, \partial q]$, причем $\mathcal{D}l$ не зависит от конкретного представления l в виде разности сублинейных операторов. Элемент $\mathcal{D}l$ из A-модуля $\mathrm{CS}_c(X, E)$ назовем *квазидифференциалом (в нуле) оператора l*. При этом для опорных множеств ∂p и ∂q приняты следующие названия и обозначения: $\underline{\partial} l := \partial p$ — *субдифференциал в нуле оператора l* и $\overline{\partial} l := \partial q$ — *супердифференциал в нуле оператора l*.

Суммируя сказанное и учитывая 1.5.7 из [7], приходим к следующему утверждению.

(2) *Отображение $\mathcal{D} := [\partial] \circ i^{-1}$ осуществляет изоморфизм решеточно упорядоченных A-модулей $\mathrm{QL}(X, E)$ и $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$, причем обратный к нему изоморфизм имеет вид и $\mathcal{S} := i \circ [\sup]$. Таким образом, если для некоторых $l \in \mathrm{QL}(X, E)$ и $U, V \in \mathrm{CS}_c(X, E)$*

выполняется $\mathcal{D}l = [U, V]$ *(или, что то же самое,* $\mathcal{S}([U, V]) = l$*), то*

$$\underline{\partial} l = U, \quad \overline{\partial} l = V,$$
$$l(x) = \sup\{Sx : \ S \in U\} - \sup\{Tx : \ T \in V\} \quad (x \in X).$$

Разумеется субдифференциал и супердифференциал квазилинейной функции определяются неоднозначно, тогда как квазидифференциал — вполне определенный элемент модуля $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$. В самом деле, помимо представления $l = p - q$ верно также $l = (p + r) - (q + r)$, где r — произвольный сублинейный оператор, следовательно, $\mathcal{D}l = [\partial p, \partial q] = [\partial(p + r), \partial(q + r)]$. Пусть $l = p_1 - q_1 = p_2 - q_2$, где $p_i, q_i \in \mathrm{Sbl}(X, E)$ $(i = 1, 2)$. Тогда $p_1 + q_2 = p_2 + q_1$. Полагая $U_i = \partial p_i$, $V_i = \partial q_i$ $(i = 1, 2)$, и привлекая двойственность Минковского, получаем $U_1 + V_2 = U_2 + V_1$. Таким образом, если две пары опорных множеств определяют одну и ту же квазилинейную функцию l, то они эквивалентны. Верно и обратное: если пары (U_1, V_1) и (U_2, V_2) эквивалентны, то по ним восстанавливается одна и та же квазилинейная функция:

$$\sup_{S \in U_1} S(x) - \sup_{T \in V_1} T(x) = \sup_{S \in U_2} S(x) - \sup_{T \in V_2} T(x) \quad (x \in X).$$

1.4. Рассмотрим как преобразуются произведение на элемент кольца A, сумма и решеточные операции при изоморфизме $\mathcal{D}$.

(1) *Пусть* $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, $l \in \mathrm{QL}(X, E)$ *и* $\mathcal{D}l = [\underline{\partial} l, \overline{\partial} l]$. *Тогда квазидифференциал* $\mathcal{D}(\alpha l) = \alpha \mathcal{D} l$, *т. е. согласно 1.3*

$$\underline{\partial}(\alpha l) = \alpha^+ \underline{\partial} l + \alpha^- \overline{\partial} l, \quad \overline{\partial}(\alpha l) = \alpha^- \underline{\partial} l + \alpha^+ \overline{\partial} l.$$

$\lhd$ Из равенства $\mathcal{D}l = [\underline{\partial} l, \overline{\partial} l]$ видно, что $l = p - q$, где

$$p(x) = \sup_{S \in \underline{\partial} l} S(x), \quad q(x) = \sup_{T \in \overline{\partial} l} T(x).$$

Отсюда $\alpha l = (\alpha^+ p + \alpha^- q) - (\alpha^- p + \alpha^+ q)$. Остается применить двойственность Минковского с учетом ее аддитивности и однородности (см. [7; 1.4.12, 1.4.14 (5)]). $\rhd$

(2) *Пусть* $l_1, \ldots, l_n \in \mathrm{QL}(X, E)$ *и* $\mathcal{D}l_i = [\underline{\partial} l_i, \overline{\partial} l_i]$ $(i := 1, \ldots, n)$. *Тогда* $\mathcal{D}(l_1 + \cdots + l_n) = \mathcal{D}l_1 + \cdots + \mathcal{D}l_n$, *причем*

$$\underline{\partial}(l_1 + \cdots + l_n) = \underline{\partial}(l_1) + \cdots + \underline{\partial}(l_n), \quad \overline{\partial}(l_1 + \cdots + l_n) = \overline{\partial}(l_1) + \cdots + \overline{\partial}(l_n).$$

$\lhd$ Если $l_i = p_i - q_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то достаточно применить двойственность Минковского к равенству $l_1 + \cdots + l_n = (p_1 + \cdots + p_n) - (q_1 + \cdots + q_n)$. $\rhd$

(3) *Пусть* $l_1, \ldots, l_n \in \mathrm{QL}(X, E)$ *и* $\mathcal{D}l_i = [\underline{\partial} l_i, \overline{\partial} l_i]$ $(i := 1, \ldots, n)$. *Положим,* $g(x) := l_1(x) \vee \cdots \vee l_n(x)$ *и* $h(x) := l_1(x) \wedge \cdots \wedge l_n(x)$. *Тогда* $\mathcal{D}g = [\underline{\partial} g, \overline{\partial} g]$, $\mathcal{D}h = [\underline{\partial} h, \overline{\partial} h]$, *где*

$$\underline{\partial} g = \mathrm{op} \bigcup_{i=1}^{n} \left(\underline{\partial} l_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \overline{\partial} l_j \right), \quad \overline{\partial} g = \sum_{j=1}^{k} \overline{\partial} l_j,$$

$$\underline{\partial} h = \sum_{j=1}^{n} \underline{\partial} l_j, \quad \overline{\partial} h = \mathrm{op} \bigcup_{i=1}^{n} \left(\overline{\partial} l_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \underline{\partial} l_j \right).$$

$\lhd$ Из условия $\mathcal{D}l_i = [\underline{\partial} l_i, \overline{\partial} l_i]$ видно, что $l_i = p_i - q_i$, где

$$p_i(x) = \sup_{S \in \underline{\partial} l_i} S(x), \quad q_i(x) = \sup_{T \in \overline{\partial} l_i} T(x),$$

при всех $i = 1, \dots, n$. Предложение 1.2 дает выражение операторов g и h через операторы p_i и q_i. Для завершения доказательства достаточно применить двойственность Минковского. При этом следует воспользоваться аддитивностью двойственности Минковского, а также тем фактом, что точную верхнюю границу сублинейных операторов двойственность Минковского переводит в операторную оболочку опорных множеств этих операторов (см. [6, 7]). $\rhd$

2. Квазидифференцируемые отображения

В этом параграфе вводится класс квазидифференцируемых операторов и устанавливаются формулы квазидифференцирования суммы и произведения.

2.1. Пусть X — векторное пространство, E — некоторое K-пространство. Рассмотрим отображение $f : X \to E^{\cdot}$ и точку $x_0 \in \operatorname{core} \operatorname{dom}(f)$. Если для некоторого $h \in X$ существует предел

$$\begin{aligned} f'(x)h := f'_{x_0}(h) &:= o\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} \\ &= \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{0 < \alpha < \varepsilon} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{0 < \alpha < \varepsilon} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha}, \end{aligned}$$

то его называют (*односторонней*) *производной* или, реже, *производной Дини f в точке x_0 по направлению h*. Допустим, что в точке x_0 существует производная $f'(x_0)h$ по любому направлению $h \in X$. Тогда возникает отображение $f'(x_0) : X \to E$, которое называют также (*односторонней*) *производной* или *производной Дини по направлениям*. В этой ситуации говорят также что отображение f *дифференцируемо по направлениям* в точке x_0.

Говорят, что f *квазидифференцируемо* в точке x_0, если выполнены условия:

(1) существует односторонняя производная f в точке x_0 по направлениям;

(2) производная по направлениям $f'(x_0) : X \to E$ — квазилинейный оператор.

Итак, если отображение f квазидифференцируемо в точке x_0, то квазилинейному оператору $f'(x_0) \in \mathrm{QL}(X, E)$ в силу двойственности Минковского отвечает элемент $\mathcal{D}\big(f'(x_0)\big) \in [\mathrm{CS}_c(X, E)]$, который называют *квазидифференциалом* f в точке x_0 и обозначают символом $\mathcal{D}f(x_0)$.

Если $f'(x_0)$ представляется в виде разности сублинейных операторов, как указано в (2), то $\mathcal{D}f(x_0) = [\partial p, \partial q]$,

$$f'(x_0)h = \sup\{S(h) : \ S \in \partial p\} - \sup\{T(h) : \ T \in \partial q\} = p(h) - q(h) \quad (h \in X).$$

При этом опорные множества ∂p и ∂q принято называть соответственно *субдифференциалом* и *супердифференциалом* отображения f в точке x_0 и принято обозначать $\underline{\partial} f(x_0)$ и $\overline{\partial} f(x_0)$. Итак,

$$\mathcal{D}f(x_0) := [\partial p, \partial q] := [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)].$$

Допустим, что квазидифференцируемое отображение f имеет в точке x_0 квазидифференциал вида $\mathcal{D}f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \{0\}]$ (или $\mathcal{D}f(x_0) = [\{0\}, \overline{\partial} f(x_0)]$). Тогда говорят, что

f *субдифференцируемо* (соответственно, *супердифференцируемо*) в точке x_0. Если отображение f в некоторой точке $x_0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}(f)$ имеет производную по направлениям $T := f'(x_0)$, являющуюся линейным оператором, то это отображение одновременно субдифференцируемо и супердифференцируемо, причем $\mathcal{D}f(x_0) = [\{T\}, \{0\}] = [\{0\}, \{T\}]$.

Выпуклый оператор f субдифференцируем в каждой точке $x_0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}(f)$, так как существует производная по направлениям $f'(x_0)$ являющаяся сублинейным оператором. При этом $\underline{\partial} f(x_0) = \partial f(x_0)$. Оператор f называют вогнутым, если $-f$ — выпуклый оператор. Вогнутый оператор f супердифференцируем в любой точке $x_0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}(-f)$, причем $\overline{\partial} f(x_0) = -\partial(-f)(x_0)$. В этом случае производная по направлениям $f'(x_0)$ также существует, но является *суперлинейным* оператором, т. е. $-f'(x_0)$ — сублинейный оператор.

Еще более широкий класс квазидифференцируемых отображений составляют разности выпуклых операторов (или, что то же самое, суммы выпуклых и вогнутых операторов).

Рассмотрим теперь вопросы квазидифференцируемости суммы и произведения квазидифференцируемых отображений.

2.2. Теорема. *Пусть операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\cdot}$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{core}\operatorname{dom} f_i$. Тогда их сумма также квазидифференцируема в этой точке и*

$$\mathcal{D}(f_1 + \dots + f_n)(x_0) = \mathcal{D}f_1(x_0) + \dots + \mathcal{D}f_n(x_0).$$

Иными словами, если $\mathcal{D}f_i(x_0) = [\underline{\partial} f_i(x_0), \overline{\partial} f_i(x_0)]$ $(i = 1, \dots, n)$, то квазидифференциал суммы

$$\mathcal{D}(f_1 + \dots + f_n)(x_0) = \big[\underline{\partial}(f_1 + \dots + f_n)(x_0), \overline{\partial}(f_1 + \dots + f_n)(x_0)\big]$$

вычисляется по формулам

$$\underline{\partial}(f_1 + \dots + f_n)(x_0) = \underline{\partial} f_1(x_0) + \dots + \underline{\partial} f_n(x_0),$$
$$\overline{\partial}(f_1 + \dots + f_n)(x_0) = \overline{\partial} f_1(x_0) + \dots + \overline{\partial} f_n(x_0).$$

$\lhd$ Рассмотрим произвольные квазидифференцируемые в точке x_0 отображения $f_1, \dots, f_n$. Покажем, что сумма $f := f_1 + \dots + f_n$ имеет производную по направлениям в точке x_0:

$$f'(x_0)h = o\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\bigg(\sum_{i=1}^{n} f_i(x_0 + \alpha h) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_0) \bigg)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \bigg(o\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\Big(f_i(x_0 + \alpha h) - f_i(x_0) \Big) \bigg) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0)h.$$

Предположим, что $f_i'(x_0)h = p_i(h) - q_i(h)$ $(i = 1, \dots, n)$, тогда

$$f'(x_0)h = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0)h = \sum_{i=1}^{n} \big(p_i(h) - q_i(h) \big) = \sum_{i=1}^{n} p_i(h) - \sum_{i=1}^{n} q_i(h).$$

Так как операторы $p_1 + \dots + p_n$ и $q_1 + \dots + q_n$ сублинейны, то тем самым установлена квазидифференцируемость отображения f в точке x_0. Далее в силу аддитивности отображения $\mathcal{D} : \mathrm{QL}(X, E) \to [\mathrm{CS}_c(X, E)]$ (см. 1.4 (2)) будет

$$\mathcal{D}f(x_0) = \mathcal{D}\Bigg(\bigg(\sum_{i=1}^{n} f_i \bigg)'(x_0) \Bigg) = \mathcal{D}\bigg(\sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0) \bigg) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}\big(f_i'(x_0) \big) = \mathcal{D}f_1(x_0) + \dots + \mathcal{D}f_2(x_0). \ \rhd$$

2.3. *Теорема.* *Пусть оператор $f : X \to E^{\cdot}$ квазидифферецируем в точке $x_0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}(f)$ и $\lambda \in \operatorname{Orth}(E)$. Тогда оператор $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ также квазидифференцируем в этой точке и*

$$\mathcal{D}(\lambda f)(x_0) = \lambda \mathcal{D} f(x_0).$$

Иными словами, если $\mathcal{D}f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$, то для квазидифференциала $\mathcal{D}(\lambda f)(x_0) = [\underline{\partial}(\lambda f)(x_0), \overline{\partial}(\lambda f)(x_0)]$ справедливы равенства

$$\underline{\partial}(\lambda f)(x_0) = \lambda^+ \underline{\partial} f(x_0) + \lambda^- \overline{\partial} f(x_0),$$

$$\overline{\partial}(\lambda f)(x_0) = \lambda^+ \overline{\partial} f(x_0) + \lambda^- \underline{\partial} f(x_0).$$

$\lhd$ В силу o-непрерывности произвольного ортоморфизма производная по направлению отображения λf вычисляется следующим образом:

$$(\lambda f)'(x_0)h = o\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{(\lambda f)(x_0 + \alpha h) - (\lambda f)(x_0)}{\alpha} = o\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} \lambda \left(\frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} \right)$$
$$= \lambda \cdot o\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = \lambda f'(x_0)h.$$

Пусть $f'(x_0) = p - q$ для некоторых $p, q \in \operatorname{QL}(X, E)$. Тогда в силу установленного выше равенства

$$(\lambda f)'(x_0)h = \lambda f'(x_0)h = \lambda(p(h) - q(h)) = (\lambda^+ - \lambda^-)(p(h) - q(h))$$
$$= \Big(\lambda^+ p(h) + \lambda^- q(h)\Big) - \Big(\lambda^- p(h) + \lambda^+ q(h)\Big).$$

Отсюда видна квазидифференцируемость оператора λf в точке x_0. Наконец, в силу однородности отображения $\mathcal{D}$ (см. 1.4 (1)) имеем

$$\mathcal{D}(\lambda f)(x_0) = \mathcal{D}(\lambda f)'(x_0) = \mathcal{D}\lambda f'(x_0) = \lambda \mathcal{D} f(x_0).$$

Формулы для вычисления субдифференциала и супердифференциала отображения λf вытекают из 1.4 (1). $\rhd$

2.4. Если в условиях теоремы 2.3 положить $E = \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то получим, что для квазидифференцируемой в точке x_0 функции $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ функция λf также квазидифференцируема в точке x_0 и при этом формулы для вычисления субдифференциала и супердифференциала принимают вид (см. [4]):

$$\underline{\partial}(\lambda f)(x_0) = \begin{cases} \lambda \underline{\partial} f(x_0) & \text{при } \lambda \geqslant 0, \\ -\lambda \overline{\partial} f(x_0) & \text{при } \lambda \leqslant 0, \end{cases} \qquad \overline{\partial}(\lambda f)(x_0) = \begin{cases} \lambda \overline{\partial} f(x_0) & \text{при } \lambda \geqslant 0, \\ -\lambda \underline{\partial} f(x_0) & \text{при } \lambda \leqslant 0. \end{cases}$$

2.5. *Если операторы f_1 и $f_2 : X \to E^{\cdot}$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{core}\operatorname{dom}(f_2)$, то их разность $f_1 - f_2$ квазидифференцируема в этой точке и*

$$\mathcal{D}(f_1 - f_2)(x_0) = \mathcal{D} f_1(x_0) - \mathcal{D} f_2(x_0).$$

$\lhd$ Следует из 2.2 и 2.3. $\rhd$

3. Квазидифференциал произведения

Далее рассмотрим вопрос о квазидифференцируемости произведения $g \cdot f$ двух квазидифференцируемых отображений $f, g : X \to E^{\cdot}$, действующего по правилу $g \cdot f : x \mapsto g(x)f(x)$. Однако последнее соотношение имеет смысл только, если в E введена структура кольца. При этом для осуществления указанной программы нужно будет потребовать, чтобы E была f-алгеброй с единицей (см. [8] или [7; П1.12]). Но всякая f-алгебра с единицей изоморфна алгебре своих ортоморфизмов (см. [8], [7; П.2.5 (7)]), поэтому естественно рассмотреть ситуацию, когда рассматриваемые отображения принимают значения в $E^{\cdot}$ и $\mathrm{Orth}(E)^{\cdot}$, причем умножение $E^{\cdot} \times \mathrm{Orth}(E)^{\cdot} \to E$ имеет вид $(\pi, e) \mapsto \pi(e)$. Тогда произведение $g \cdot f : x \mapsto g(x)f(x)$ определено корректно.

3.1. Выясним, как связаны между собой модули $\mathrm{QL}(X, \mathrm{Orth}(E))$ и $\mathrm{QL}(X, E)$, $[\mathrm{CS}_c(X, \mathrm{Orth}(E))]$ и $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$.

(1) Для отображения $\varphi : X \to \mathrm{Orth}(E)$ и элемента $e \in E$ определим отображение $m_e(\varphi) := \varphi(\cdot)e : X \to E$, действующее по формуле $m_e(\varphi) : x \mapsto \varphi(x)e$. Возьмем теперь сублинейный оператор $p \in \mathrm{Sbl}(X, \mathrm{Orth}(E))$. Если $e \in E_+$, то $m_e(p) \in \mathrm{Sbl}(X, E)$. Для произвольного $e \in E$ выполняется $m_e(p) \in \mathrm{QL}(X, E)$, так как $p(\cdot)e = p(\cdot)e^+ - p(\cdot)e^-$. Пусть квазилинейный оператор $l \in \mathrm{QL}(X, \mathrm{Orth}(E))$ допускает представление $l = p - q$, где $p, q \in \mathrm{Sbl}(X, \mathrm{Orth}(E))$. Тогда для произвольного $e \in E$ имеем

$$m_e(l) = p(\cdot)e - q(\cdot)e = \big(p(\cdot)e^+ + q(\cdot)e^-\big) - \big(p(\cdot)e^- + q(\cdot)e^+\big),$$

следовательно, $m_e(l) \in \mathrm{QL}(X, E)$.

(2) Аналогично, для множества U отображений из X в $\mathrm{Orth}(E)$ и элемента $e \in E^+$ положим $m_e(U) := U(\cdot)e := \{m_e(\varphi) : \varphi \in U\}$. Если U — опорное множество, то легко проверить, что $m_e(U)$ — также опорное множество. Если же $e \in E$ — произвольный элемент, то $m_e(U)$ обозначает класс эквивалентности, определяемый парой опорных множеств $(U(\cdot)e^+, U(\cdot)e^-)$, т. е. $m_e(U) = [U(\cdot)e^+, U(\cdot)e^-] \in [\mathrm{CS}_c(X, \mathrm{Orth}(E))]$. Наконец, для $[U, V] \in [\mathrm{CS}_c(X, \mathrm{Orth}(E))]$ положим

$$m_e([U, V]) := [U(\cdot)e^+ + V(\cdot)e^-, U(\cdot)e^- + V(\cdot)e^+].$$

Итак, одним и тем же символом m_e мы обозначили два разных отображения, действующие из $\mathrm{QL}(X, \mathrm{Orth}(E))$ в $\mathrm{QL}(X, E)$ и из $[\mathrm{CS}_c(X, \mathrm{Orth}(E))]$ в $[\mathrm{CS}_c(X, E)]$, ввиду тесной их взаимосвязи.

(3) *Для произвольного квазилинейного оператора* $l \in \mathrm{QL}(X, \mathrm{Orth}(E))$ *и любого элемента* $e \in E$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{D}(m_e(l)) = m_e(\mathcal{D}(l)).$$

$\lhd$ Достаточно установить, что для сублинейного оператора $p \in \mathrm{Sbl}(X, \mathrm{Orth}(E))$ и положительного $e \in E$ верно $\partial(m_e(p)) = m_e(\partial p)$. Тогда требуемое следует непосредственно из определений (1) и (2). Включение $m_e(\partial p) \subset \partial(m_e(p))$ очевидно. Докажем противоположное включение.

Возьмем произвольный оператор $T \in \partial(m_e(p))$, т. е. $T \in L(X, E)$ и $Tx \leqslant p(x)e$ для всех $x \in X$. Отсюда видно, что $\pi T = T$, где π — порядковый проектор на полосу e^{dd}. В максимальном расширении mE K-пространства E выберем порядковую единицу и, тем самым, мультипликативную структуру, для которой она служит кольцевой единицей.

Существует положительный элемент $d \in mE$ такой, что $de = \pi\mathbf{1}$. Положим $S_0 x := d \cdot Tx$ $(x \in X)$. Очевидно, что S_0 — линейный оператор из X в mE. Возьмем произвольный оператор $S_1 \in \partial p$ и введем новый оператор $S : X \to mE$ формулой $S := \pi S_0 + \pi^d S_1$. Тогда для произвольного $x \in X$ имеют место соотношения

$$Sx = \pi S_0 x + \pi^d S_1 x = \pi d \cdot Tx + \pi^d S_1 \leqslant \pi d \cdot p(x)e + \pi^d p(x) = \pi(\mathbf{1})p(x) + \pi^d p(x) = p(x).$$

Тем самым, $S \in \partial p$, откуда, в частности, следует, что образ S содержится в E, так как $Sx \in [-p(-x), p(x)] \subset E$. Кроме того, $(Sx)e = \pi(S_0 x)e = \pi(d \cdot Tx)e = \pi Tx = Tx$, стало быть, $T = m_e(S) \in m_e(\partial p)$, что и требовалось. $\triangleright$

Ниже для объектов вида $m_e(\mathcal{D}l)$ используем более короткое и выразительное обозначение $(\mathcal{D}l)e$. Так, если рассматриваются отображения $f : X \to E^{\cdot}$ и $g : X \to \mathrm{Orth}(E)^{\cdot}$, то выражение $\mathcal{D}g(x_0)f(x_0)$ — иное обозначение для $m_e(\mathcal{D}g(x_0))$, где $e := f(x_0)$, а $g(x_0)\mathcal{D}f(x_0)$ понимается в соответствии с 1.4 (1).

3.2. Теорема. *Пусть отображения $f : X \to E^{\cdot}$ и $g : X \to \mathrm{Orth}(E)^{\cdot}$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{core}\operatorname{dom}(g)$. Тогда отображение $gf = g \cdot f : X \to E^{\cdot}$, действующее по правилу $gf : x \mapsto g(x)f(x)$, также квазидифференцируемо в этой точке и справедлива формула*

$$\mathcal{D}(g \cdot f)(x_0) = g(x_0)\mathcal{D}f(x_0) + \mathcal{D}g(x_0)f(x_0).$$

Более того, если $\mathcal{D}(gf)(x_0) = [\underline{\partial}(gf)(x_0), \overline{\partial}gf(x_0)]$, то имеют место представления

$$\underline{\partial}(gf)(x) = g^+(x_0)\underline{\partial}f(x_0) + g^-(x_0)\overline{\partial}f(x_0) + \underline{\partial}g(x_0)f^+(x_0) + \overline{\partial}g(x_0)f^-(x_0),$$

$$\overline{\partial}(gf)(x) = g^+(x_0)\overline{\partial}f(x_0) + g^-(x_0)\underline{\partial}f(x_0) + \overline{\partial}g(x_0)f^+(x_0) + \underline{\partial}g(x_0)f^-(x_0).$$

$\triangleleft$ Пусть f и g квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{core}\operatorname{dom}(g)$. Для $\alpha > 0$ положим $\varphi(\alpha, h) := f(x_0 + \alpha h) - f(x_0) - \alpha f'(x_0)h$. По условию $o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \varphi(\alpha, h)/\alpha = 0$, следовательно, для некоторого $e' \in E^+$ будет $|\varphi(\alpha, h)|/\alpha \leqslant e'$ при всех достаточно малых α. Полагая $e := e' + |f'(x_0)h|$ можем написать

$$|(g(x_0 + \alpha h) - g(x_0))(f'(x_0)h + \varphi(\alpha, h)/\alpha)| \leqslant |g(x_0 + \alpha h) - g(x_0)|(e) \xrightarrow[\alpha\downarrow 0]{(o)} 0.$$

Учитывая доказанное, можно написать следующую цепочку равенств:

$$(gf)'(x_0)h = o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\Big(g(x_0 + \alpha h)f(x_0 + \alpha h) - g(x_0)f(x_0)\Big)$$

$$= o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\Big(g(x_0 + \alpha h)f(x_0 + \alpha h) - g(x_0)f(x_0 + \alpha h) + g(x_0)f(x_0 + \alpha h) - g(x_0)f(x_0)\Big)$$

$$= o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{(g(x_0 + \alpha h) - g(x_0))}{\alpha} f(x_0) + o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} \big(g(x_0 + \alpha h) - g(x_0)\big)\left(f'(x_0)h + \frac{\varphi(\alpha, h)}{\alpha}\right)$$

$$+ o\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} g(x_0) \cdot \frac{(f(x_0 + \alpha h) - f(x_0))}{\alpha} = g'(x_0)(h) \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)h.$$

Итак, отображение gf имеет производную по направлениям в точке x_0, причем

$$(gf)'(x_0)h = g'(x_0)(h)f(x_0) + g(x_0)f'(x_0)(h) \quad (h \in X).$$

В силу квазидифференцируемости f и g существуют $r, s \in \mathrm{Sbl}(X, \mathrm{Orth}(E))$ и $p, q \in \mathrm{Sbl}(X, E)$ такие, что $g'(x_0)(h) = r(h) - s(h)$ и $f'(x_0)(h) = p(h) - q(h)$. Покажем, что производная $(gf)'(x_0)$ представима в виде разности сублинейных операторов

$$\begin{aligned}(gf)'(x_0)h =& g'(x_0)(h)f(x_0) + g(x_0)f'(x_0)(h)\\ =&(r(h) - s(h))f(x_0) + g(x_0)(p(h) - q(h))\\ =&r(h)f(x_0) - s(h)f(x_0) + g(x_0)p(h) - g(x_0)q(h)\\ =&r(h)f^+(x_0) - r(h)f^-(x_0) - s(h)f^+(x_0) + s(h)f^-(x_0)\\ &+ g^+(x_0)p(h) - g^-(x_0)p(h) - g^+(x_0)q(h) + g^-(x_0)q(h)\\ =&\big(r(h)f^+(x_0) + s(h)f^-(x_0) + g^+(x_0)p(h) + g^-(x_0)q(h)\big)\\ &- \big(r(h)f^-(x_0) + s(h)f^+(x_0) + g^-(x_0)p(h) + g^+(x_0)q(h)\big).\end{aligned}$$

Вновь воспользовавшись линейностью отображения $\mathcal{D}$, с учетом 3.1 (3) получаем:

$$\mathcal{D}(g\cdot f)(x_0) = \mathcal{D}\big((gf)'(x_0)\big) = \mathcal{D}\big(g'(x_0)f(x_0) + g(x_0)f'(x_0)\big)$$
$$= \mathcal{D}(g'(x_0))f(x_0) + g(x_0)\mathcal{D}(f'(x_0)) = \mathcal{D}g(x_0)f(x_0) + g(x_0)\mathcal{D}f(x_0). \ \rhd$$

3.3. Рассмотрим два частных случая установленной теоремы.

(1) Пусть f и x_0 — те же, что и в 3.2, а $g : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — квазидифференцируемая в точке x_0 функция. Определим отображение $\tilde{g} : X \to \mathrm{Orth}(E)^{\cdot}$ формулой $\tilde{g}(x) := g(x)I_E$. Тогда отображения $\tilde{g}$ и f удовлетворяют условиям теоремы 3.2, следовательно, отображение, действующее по правилу $gf : x \mapsto g(x)f(x)$, квазидифференцируемо в точке x_0 и справедливы формулы

$$\underline{\partial}(gf)(x_0) = \begin{cases} g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) + f^+(x_0)\underline{\partial}g(x_0) + f^-(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0,\\ -g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) + f^+(x_0)\underline{\partial}g(x_0) + f^-(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0,\end{cases}$$

$$\overline{\partial}(gf)(x_0) = \begin{cases} g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) + f^+(x_0)\overline{\partial}g(x_0) + f^-(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0,\\ -g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) + f^+(x_0)\overline{\partial}g(x_0) + f^-(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0,\end{cases}$$

(2) При $E = \mathbb{R}$ из теоремы 3.2 следует хорошо известный результат: для квазидифференцируемых в точке x_0 функций $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ и $g : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ функция $g \cdot f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ также квазидифференцируема в точке x_0 и при этом формулы для вычисления субдифференциала и супердифференциала принимают вид (см. [4]):

$$\underline{\partial}(gf)(x_0) = \begin{cases} g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) + f(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0,\ f(x_0) \geqslant 0,\\ -g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) + f(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0,\ f(x_0) \geqslant 0,\\ -g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) - f(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0,\ f(x_0) \leqslant 0,\\ g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) - f(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0,\ f(x_0) \leqslant 0,\end{cases}$$

$$\overline{\partial}(gf)(x_0) = \begin{cases} g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) + f(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0,\ f(x_0) \geqslant 0,\\ -g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) + f(x_0)\overline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0,\ f(x_0) \geqslant 0,\\ -g(x_0)\underline{\partial}f(x_0) - f(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \leqslant 0,\ f(x_0) \leqslant 0,\\ g(x_0)\overline{\partial}f(x_0) - f(x_0)\underline{\partial}g(x_0) & \text{при } g(x_0) \geqslant 0,\ f(x_0) \leqslant 0.\end{cases}$$

3.4. *Теорема.* *Пусть отображение $f : X \to \mathrm{Orth}(E)^{\cdot}$ квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}(f)$. Допустим, что для каждого $x \in \operatorname{dom}(f)$ ортоморфизм $f(x)$ обратим* *и обозначим символом* $1/f := \frac{1}{f}$ *отображение, действующее по правилу* $x \mapsto (f(x))^{-1}$. *Тогда отображение* $1/f$ *квазидифференцируемо в точке* x_0 *и*

$$\mathcal{D}(1/f)(x_0) = -\big(f(x_0)\big)^{-2}\mathcal{D}f(x_0).$$

Иными словами, если обозначить $\mathcal{D}(1/f)(x_0) = [\underline{\partial}(1/f)(x_0), \overline{\partial}(1/f)(x_0)]$, *то имеют место представления*

$$\underline{\partial}(1/f)(x_0) = (f(x_0))^{-2}\overline{\partial}f(x_0), \quad \overline{\partial}(1/f)(x_0) = (f(x_0))^{-2}\underline{\partial}f(x_0).$$

$\lhd$ Умножив разностное отношение $\alpha^{-1}\big((1/f)(x_0+\alpha h) - (1/f)(x_0)\big)$ на элемент $\mathbf{1} := I_E = f(x_0)f(x_0+\alpha h)(f(x_0))^{-1}(f(x_0+\alpha h))^{-1}$, получим

$$\frac{(1/f)(x_0+\alpha h) - (1/f)(x_0)}{\alpha} = \frac{f(x_0) - f(x_0+\alpha h)}{\alpha} \cdot f(x_0)^{-1} \cdot f(x_0+\alpha h)^{-1}.$$

Переходя к o-пределу при $\alpha \downarrow 0$, приходим к равенству $(1/f)'(x_0)h = -(f(x_0))^{-2}f'(x_0)h$.

Пусть теперь p, q — сублинейные операторы такие, что $f'(x_0)(h) = p(h) - q(h)$. Тогда

$$(1/f)'(x_0)h = (f(x_0))^{-2}q(h) - (f(x_0))^{-2}p(h).$$

Поскольку $(f(x_0))^{-2}$ — положительный ортоморфизм, то понятно, что $(1/f)'(x_0) \in \mathrm{QL}(X, \mathrm{Orth}(E))$ и отображение $(1/f)$ квазидифференцируемо в точке x_0. Формула для вычисления квазидифференциала отображения $(1/f)$ следует, как и выше, из линейности отображения $\mathcal{D}$. $\rhd$

3.5. Если для отображения $g : X \to \mathrm{Orth}(E)^{\cdot}$ существует $1/g$, то положим по определению $f/g := \frac{f}{g} = f \cdot (1/g)$.

Пусть отображения $f : X \to E^{\cdot}$ *и* $g : X \to \mathrm{Orth}(E)^{\cdot}$ *квазидифференцируемы в точке* $x_0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{core}\operatorname{dom}(g)$, *причем существует* $1/g$. *Тогда отображение* $f/g := 1/g \cdot f$ *квазидифференцируемо в точке* x_0 *и*

$$\mathcal{D}(f/g)(x_0) = \frac{g(x_0)\mathcal{D}f(x_0) - \mathcal{D}g(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

$\lhd$ Следует из 3.2 и 3.4. $\rhd$

4. Квазидифференциалы супремума и инфимума

В [4] доказана квазидифференцируемость максимума и минимума скалярных функций и приведены явные формулы их вычисления (см. 4.4). В текущем параграфе устанавливается квазидифференцируемость супремума и инфимума отображений, действующих в K-пространства. Формулы для вычисления соответствующих квазидифференциалов принципиально отличаются от своих скалярных аналогов.

4.1. *Пусть отображения* $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\cdot}$ *дифференцируемы по направлениям в точке* x_0. *Тогда отображение* $f := f_1 \vee \dots \vee f_n$ *также дифференцируемо по направлениям в точке* x_0 *и имеет место точная формула*

$$f'(x_0)h = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x_0)h \right\},$$

где

$$\Gamma_n(x_0) := \Gamma_n(x_0; f_1, \dots, f_n) := \Big\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \ \alpha_k \in \mathrm{Orth}^+(E), \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k = I_E, \ \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x_0) = f(x_0)\Big\}.$$

$\lhd$ Покажем сначала, что выполняется неравенство $\geqslant$. Для произвольного набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)$ справедливы соотношения

$$\frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = \frac{f(x_0+\alpha h) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x_0)}{\alpha} \\ \geqslant \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x_0+\alpha h) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x_0)}{\alpha} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{f_i(x_0+\alpha h) - f_i(x_0)}{\alpha}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha \downarrow 0$, получим

$$f'(x_0)h \geqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i'(x_0)h, \qquad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0).$$

В силу произвольности набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)$ отсюда следует требуемое.

Обратное неравенство докажем по индукции. Пусть $n = 2$, т. е. $f(x) = f_1(x) \vee f_2(x)$. Для произвольного $e \in E$ обозначим символом $[e]$ порядковый проектор на полосу на полосу e^{dd}. Определим проекторы π_1, π_2 и π_3 равенствами:

$$\pi_1 = [(f_1(x_0) - f_2(x_0)^+], \qquad \pi_2 = [(f_2(x_0) - f_1(x_0)^+], \qquad \pi_3 = I_E - \pi_1 - \pi_2.$$

Очевидно, что для любого ненулевого проектора $\rho \leqslant \pi_1$ ($\rho \leqslant \pi_2$) выполняется $\rho f_1 > \rho f_2$ ($\rho f_2 > \rho f_1$). Заметим, что π_1, π_2 и π_3 попарно дизъюнктны. Кроме того, $\pi_3 f_1(x_0) = \pi_3 f_2(x_0)$. Действительно, если это не так, то для некоторого ненулевого $\rho \leqslant \pi_3$ будет $\rho f_1 > \rho f_2$ ($\rho f_2 > \rho f_1$), следовательно, $\rho \leqslant \pi_1$ ($\rho \leqslant \pi_2$) и $\rho = 0$ ввиду дизъюнктности π_1 и π_3 (π_2 и π_3). Таким образом, справедливо представление

$$f = \pi_1 f + \pi_2 f + \pi_3 f.$$

Положим $e_0 := (f_1(x_0) - f_2(x_0))^+$ и заметим, что $e_0 = \pi_1 f_1(x_0) - \pi_1 f_2(x_0)$. Пусть $e \in E_+$ — общий регулятор сходимости в пределах $f_i(x_0) = r\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0} f_i(x_0+\alpha h)$ $(i = 1, 2)$. Подберем разбиение (ρ_n) проектора π_1 и последовательность, строго положительных чисел (λ_n) так, чтобы $\lambda_n \rho_n e \leqslant \frac{1}{2}\rho_n e_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ существует число $\varepsilon_n > 0$ такое, что при всех $\alpha \in (0, \varepsilon_n)$ выполняется $|f_i(x_0+\alpha h) - f_i(x_0)| < \lambda_n e$ $(i = 1, 2)$. Отсюда для $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (0, \varepsilon_n)$ выводим

$$\rho_n f_2(x_0+\alpha h) \leqslant \rho_n f_2(x_0) + \lambda_n \rho_n e \leqslant \rho_n f_2(x_0) + \frac{1}{2}\rho_n e_0 \\ = \rho_n f_1(x_0) - \frac{1}{2}\rho_n e_0 \leqslant \rho_n f_1(x_0) - \lambda_n \rho_n e \leqslant \rho_n f_1(x_0+\alpha h).$$

Если для некоторого порядкового проектора $\rho \leqslant \pi_1$ при достаточно малых $\alpha > 0$ выполняется $\rho f_2(x_0+\alpha h) \leqslant \rho f_1(x_0+\alpha h)$, то $(\rho f)'(x_0)h \leqslant \rho f_1'(x_0)h$. Действительно, справедливость указанного предположения с учетом равенства $\rho f(x_0) = \rho f_1(x_0)$ позволяет написать

$$\frac{\rho f(x_0+\alpha h)-\rho f(x_0)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\Big(\rho f_1(x_0+\alpha h)-\rho f_1(x_0)\Big) \vee \Big(\rho f_2(x_0+\alpha h)-\rho f_1(x_0)\Big)$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\Big(\rho f_1(x_0+\alpha h)-\rho f_1(x_0)\Big) \vee \Big(\rho f_1(x_0+\alpha h)-\rho f_1(x_0)\Big) \longrightarrow \rho f_1'(x_0)h.$$

Таким образом, для каждого из проекторов ρ_n имеем $\rho_n f'(x_0)h = (\rho_n f)'(x_0)h \leqslant \rho_n f_1'(x_0)h$. Суммируя последнее неравенство по n, получим $\pi_1 f'(x_0)h \leqslant \pi_1 f_1'(x_0)h$. Аналогично устанавливается, что $\pi_2 f'(x_0)h \leqslant \pi_2 f_2'(x_0)h$.

Осталось найти производную отображения $\pi_3 f$.

$$\frac{\pi_3 f(x_0+\alpha h)-\pi_3 f(x_0)}{\alpha} = \frac{(\pi_3 f_1)(x_0+\alpha h)\vee(\pi_3 f_2)(x_0+\alpha h)-(\pi_3 f_1)(x_0)\vee(\pi_3 f_2)(x_0)}{\alpha}$$
$$= \frac{1}{\alpha}\Big((\pi_3 f_1)(x_0+\alpha h)-(\pi_3 f_1)(x_0)\vee(\pi_3 f_2)(x_0)\Big)$$
$$\vee\Big((\pi_3 f_2)(x_0+\alpha h)-(\pi_3 f_1)(x_0)\vee(\pi_3 f_2)(x_0)\Big)$$
$$= \frac{1}{\alpha}\Big((\pi_3 f_1)(x_0+\alpha h)-(\pi_3 f_1)(x_0)\Big) \vee \Big((\pi_3 f_2)(x_0+\alpha h)-(\pi_3 f_2)(x_0)\Big).$$

Переходя к пределу при $\alpha \downarrow 0$ получаем

$$\pi_3 f'(x_0)h = \pi_3 f_1'(x_0)h \vee \pi_3 f_2'(x_0)h = \alpha_1\pi_3 f_1'(x_0)h + \alpha_2\pi_3 f_2'(x_0)h$$

для некоторых положительных ортоморфизмов α_1 и α_2, $\alpha_1+\alpha_2 = I_E$. Пологая $\gamma_i := \pi_i + \pi_3\alpha_i$ $(i=1,2)$, замечаем, что $(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_2(x_0)$ и приходим к следующим оценкам:

$$\begin{aligned} f'(x_0)h &\leqslant \pi_1 f_1'(x_0)h + \pi_2 f_2'(x_0)h + \alpha_1\pi_3 f_1'(x_0)h + \alpha_2\pi_3 f_2'(x_0)h \\ &= (\pi_1+\pi_3\alpha_1)f_1'(x_0)h + (\pi_2+\pi_3\alpha_2)f_2'(x_0)h = \gamma_1 f_1'(x_0)h + \gamma_2 f_2'(x_0)h. \\ &\leqslant \bigvee_{(\beta_1,\beta_2)\in\Gamma_2(x_0)} \big(\beta_1 f_1'(x_0)h + \beta_2 f_2'(x_0)h\big). \end{aligned}$$

Обратное неравенство доказано. Как видно, супремум в правой части достигается на паре $(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_2(x_0)$, т. е. полученная формула является точной.

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо при $n=k$, т. е.

$$(f_1\vee\dots\vee f_k)'(x_0)h = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\Gamma_k(x_0)} \Big\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i'(x_0)h\Big\}.$$

Положим $g = f_1\vee\dots\vee f_k$. Пользуясь индукционным предположением и уже установленным равенством для $n = 2$, выводим: $f(x) = f_1 \vee \dots \vee f_k \vee f_{k+1}(x)$, тогда

$$f'(x_0)h = \bigvee_{(\beta_1,\beta_2)\in\Gamma_2(x_0;g,f_{k+1})} \Big\{\beta_1(f_1 \vee \dots \vee f_k)'(x_0)h + \beta_2 f'_{k+1}(x_0)h\Big\}$$

$$= \bigvee_{(\beta_1,\beta_2)\in\Gamma_2(x_0;g,f_{k+1})} \Big\{\beta_1 \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\Gamma_k(x_0;f_1,\dots,f_k)} \Big(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f'_i(x_0)h\Big) + \beta_2 f'_{k+1}(x_0)h\Big\}$$

$$= \bigvee_{(\beta_1,\beta_2)\in\Gamma_2(x_0;g,f_{k+1})} \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\Gamma_k(x_0;f_1,\dots,f_k)} \Big\{\beta_1\Big(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f'_i(x_0)h\Big) + \beta_2 f'_{k+1}(x_0)h\Big\}$$

$$= \bigvee_{(\beta_1,\beta_2)\in\Gamma_2(x_0;g,f_{k+1})} \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\Gamma_k(x_0;f_1,\dots,f_k)} \Big\{\sum_{i=1}^{k}\beta_1\alpha_i f'_i(x_0)h + \beta_2 f'_{k+1}(x_0)h\Big\}$$

$$= \bigvee_{(\gamma_1,\dots,\gamma_{k+1})\in\Gamma_{k+1}(x_0;f_1,\dots,f_{k+1})} \Big\{\sum_{i=1}^{k+1}\gamma_i f'_i(x_0)h\Big\},$$

что и требовалось доказать. $\triangleright$

4.2. *Пусть отображения $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\cdot}$ дифференцируемы по направлениям в точке x_0. Тогда отображение $g := f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ также дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и имеет место формула*

$$g'(x_0)h = \bigwedge_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Delta_n(x_0)} \Big\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f'_i(x_0)h\Big\},$$

где

$$\Delta_n(x_0) := \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n) := \Big\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) :\ \alpha_k \in \operatorname{Orth}^+(E),$$
$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = I_E,\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(x_0) = g(x_0)\Big\}.$$

$\triangleleft$ Воспользуемся формулой $g = f_1 \wedge \dots \wedge f_n = -\big((-f_1) \vee \dots \vee (-f_n)\big)$. Применив теорему 4.1 и правило умножения на -1 (см. 2.3), получим требуемое. $\triangleright$

4.3. *Теорема.* *Пусть отображения $f_1, \dots, f_m : X \to E^{\cdot}$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}(f)$. Положим $f := f_1 \vee \dots \vee f_n$ и $g := f_1 \wedge \dots \wedge f_n$. Тогда отображения f и g квазидифференцируемы в точке x_0 и для квазидифференциалов $\mathcal{D}f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$ и $\mathcal{D}g(x_0) = [\underline{\partial} g(x_0), \overline{\partial} g(x_0)]$ имеют место представления*

$$\underline{\partial} f(x_0) = \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Big(\underline{\partial} f_k(x_0) + \sum_{l\neq k}\overline{\partial} f_l(x_0)\Big)\Big),$$

$$\overline{\partial} f(x_0) = \sum_{k=1}^{n}\overline{\partial} f_k(x_0), \qquad \underline{\partial} g(x_0) = \sum_{k=1}^{n}\underline{\partial} f_k(x_0),$$

$$\overline{\partial} g(x_0) = \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Delta_n(x_0)} \Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Big(\overline{\partial} f_k(x_0) + \sum_{l\neq k}\underline{\partial} f_l(x_0)\Big)\Big).$$

$\lhd$ Ограничимся случаем отображения f, отображение g рассматривается аналогично. Из предложения 4.1 следует дифференцируемость по направлениям f в точке x_0, причем

$$f'(x_0)h = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_n(x_0)} \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i'(x_0)h\right\}.$$

В силу квазидифференцируемости f_i имеют место представления $f_i'(x_0)h = p_i(h) - q_i(h)$ $(i = 1,\dots,n)$, где p_i, q_i — сублинейные операторы. Таким образом, справедливы равенства

$$\begin{aligned}
f'(x_0)h &= \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_n(x_0)} \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i\big(p_i(h) - q_i(h)\big)\right\}\\
&= \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_n(x_0)} \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i\big(p_i(h) - q_i(h)\big)\right\} + \sum_{i=1}^n q_i(h) - \sum_{i=1}^n q_i(h)\\
&= \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_n(x_0)} \left\{\sum_{i=1}^n \Big(\alpha_i p_i(h) - \alpha_i q_i(h) + q_i(h)\Big)\right\} - \sum_{i=1}^n q_i(h)\\
&= \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_n(x_0)} \left\{\sum_{i=1}^n \Big(\alpha_i p_i(h) + \sum_{j\neq i}\alpha_j q_i(h)\Big)\right\} - \sum_{i=1}^n q_i(h)\\
&= \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_n(x_0)} \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i\Big(p_i(h) + \sum_{j\neq i} q_j(h)\Big)\right\} - \sum_{i=1}^n q_i(h).
\end{aligned}$$

Обозначим через

$$P(h) = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_n(x_0)} \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i\Big(p_i(h) + \sum_{j\neq i} q_j(h)\Big)\right\}, \qquad Q(h) = \sum_{i=1}^n q_i(h).$$

Очевидно, что P и Q сублинейные операторы и $\underline{\partial} f(x_0) = \partial P$, а $\overline{\partial} f(x_0) = \partial Q$. Таким образом, осталось вычислить субдифференциалы ∂P и ∂Q:

$$\begin{aligned}
\partial P &= \partial\left(\bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_n(x_0)} \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i\Big(p_i + \sum_{j\neq i} q_j\Big)\right\}\right)\\
&= \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_n(x_0)} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\Big(\partial p_i + \sum_{j\neq i} \partial q_j\Big)\right),\\
\partial Q &= \partial\Big(\sum_{i=1}^n q_i\Big) = \sum_{i=1}^n \partial q_i.
\end{aligned}$$

Полученные соотношения совпадают с требуемыми с точностью до обозначений. $\rhd$

4.4. Сформулируем теорему 4.3 в скалярном случае $E = \mathbb{R}$ (см. [4]). Его принципиальное отличие состоит в том, что точные границы достигаются, т. е. существует некоторое количество индексов $k \in \{1,\dots,n\}$, для которых $f(x_0) = f_k(x_0)$ и $g(x_0) = f_k(x_0)$. В этой связи множества $\Gamma_n(x_0)$ и $\Delta_n(x_0)$, а с ними и формула для вычисления квазидифференциалов несколько упрощаются. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема. *Пусть функции $f_1,\dots,f_n : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \bigcap_{k=1}^n \operatorname{core}\operatorname{dom}(f_k)$. Положим $f := f_1 \vee \dots \vee f_n$ и $g := f_1 \wedge \dots \wedge f_n$. Тогда функции f и g*

квазидифференцируемы в точке x_0 *и их квазидифференциалы могут быть вычислены по формулам*

$$\underline{\partial} f(x_0) = \operatorname{co} \bigcup_{k \in R(x_0)} \Big(\underline{\partial} f_k(x_0) + \sum_{i \in R(x_0), i \neq k} \overline{\partial} f_i(x_0) \Big),$$

$$\overline{\partial} f(x_0) = \sum_{i \in R(x_0)} \overline{\partial} f_i(x_0), \qquad \underline{\partial} g(x_0) = \sum_{i \in Q(x_0)} (\underline{\partial} f_i(x_0),$$

$$\overline{\partial} g(x_0) = \operatorname{co} \bigcup_{k \in Q(x_0)} \Big(\overline{\partial} f_k(x_0) + \sum_{i \in Q(x_0), i \neq k} \underline{\partial} f_i(x_0) \Big),$$

где $R(x_0) := \{k \in \{1, \dots, n\} : f(x_0) = f_k(x_0)\}$ *и* $Q(x_0) := \{k \in \{1, \dots, n\} : g(x_0) = f_k(x_0)\}$.

$\lhd$ В рассматриваемом случае множество $\Gamma_n(x_0)$ перепишем в виде

$$\Gamma_n(x_0) = \Big\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \ \alpha_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (f(x_0) - f_k(x_0)) = 0 \Big\}.$$

Равенство $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (f(x_0) - f_k(x_0)) = 0$ влечет $\alpha_k (f(x_0) - f_k(x_0)) = 0$ для всех k, так как $f(x_0) \geqslant f_k(x_0)$ и, стало быть, сумма состоит из неотрицательных слагаемых. Таким образом, число α_k отлично от нуля лишь только в том случае, когда соответствующий номер k входит $R(x_0)$, поэтому в формулах из 4.3 объединение и суммирование следует производить по номерам из $R(x_0)$. Аналогично, вид множества $\Delta_n(x_0)$ приводит к суммированию и объединению по множеству номеров $Q(x_0)$. $\rhd$

Литература

1. *Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н., Рубинов А. М.* Об одном обобщении понятия субдифференциала // В кн.: Тез. всес. конф. по динамическому управлению. Свердловск.—1979.—С. 79–84.
2. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* О квазидифференцируемых функционалах // Докл. АН СССР.—1980.–Т. 250, № 1.—С. 21–25.
3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация.—М.: Наука.—1981.—384 с.
4. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука.—1990.—432 с.
5. Quasidifferentiability and Related Topics / edited by Dem'yanov V. F., Rubinov A. M.—Dordrecht: Kluwer Academic Puplishers, 2000.—400 p.
6. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.
7. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. I.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002.—viii+372 с.
8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—Москва: Наука, 2003.—619 с.

Статья поступила 7 сентября 2003 г.

Басаева Елена Казбековна
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
E-mail: `helen@alanianet.ru`