Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2003, Том 5, Выпуск 3

УДК **517.98**

О ГЕОМЕТРИИ РЕГУЛЯРНЫХ КРУГЛЫХ КОНУСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ l_1^n И l_1

К. В. Коробова

В работе исследуются геометрические свойства регулярных круглых конусов в пространствах l_1^n и l_1. Доказано, что любой регулярный круглый конус является н-дизъюнктно разложимым. Получены явные формулы для вычисления расстояния от точки до любого регулярного круглого конуса. Установлена связь между нормой элемента и расстоянием от точки до конуса.

1. Предварительные сведения

В настоящей работе мы следуем терминологии по геометрии конусов в банаховых пространствах из монографий [1–3]. Целью данной статьи является изучение некоторых геометрических свойств регулярных круглых конусов в пространствах l_1^n и l_1. Приведем необходимые определения и факты.

1.1. Пусть E — банахово пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, E_+ — конус в E. Конус E_+ называется *регулярным*, если выполнены следующие условия:

(1) $\pm x \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$ для любых $x, y \in E$,

(2) для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in E_+$ такой, что $\pm x \leq y$ и $\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|$.

Если условие 2 выполнено при $\varepsilon = 0$, то говорят о строго регулярном конусе. Таким образом, регулярный конус E_+ называется *строго регулярным*, если выполнено условие

(2′) для любого $x \in E$ существует $y \in E_+$ такой, что $\pm x \leqslant y$ и $\|y\| = \|x\|$.

Если E упорядочено замкнутым строго регулярным конусом E_+, то пишут $(E, E_+) \in (\mathfrak{R})$, см. [3].

1.2. Напомним один общий метод построения конуса в произвольном банаховом пространстве. Пусть X — банахово пространство, $f \in X^*$ — произвольный непрерывный линейный функционал на X такой, что $\|f\| = 1$. Для любого $\alpha \in (0, 1]$ определим

$$K(f, \alpha) := \{x \in X : \ f(x) \geqslant \alpha\|x\|\}.$$

Конус $K(f, \alpha)$ замкнут, нормален и несплющен [3].

Если H — гильбертово пространство над $\mathbb{R}$, то для любого $a \in H$, $\|a\| = 1$, конус $K(a, \alpha)$ имеет вид:

$$K(a, \alpha) = \{x \in X : \ (a, x) \geqslant \alpha\|x\|\}.$$

Если $\dim H > 1$, то для любого $a \in H$, $\|a\| = 1$, конус $K(a, \alpha)$ строго регулярен в H тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, см. [3].

1.3. Отметим, что класс регулярных конусов в пространствах l_1^n и l_1 совпадает с классом строго регулярных конусов [3]. Данная работа опирается на следующее описание всех регулярных круглых конусов, полученных в [4].

Теорема. *Конус $K(f,\alpha)$ является регулярным в l_1^n, $n > 1$, только при двух значениях $\alpha \in (0,1]$:*

(1) *при $\alpha = 1$ каждая координата вектора $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ равна $+1$ или -1; при этом имеется 2^n конусов, порождающих упорядоченные банаховы пространства, порядково изоморфные и линейно изометричные пространству l_1^n с естественным конусом положительных элементов;*

(2) *при $\alpha = 0.5$ одна из координат вектора $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ равна ± 1, а все остальные — нули; при этом имеется $2n$ конусов, порождающих упорядоченные банаховы пространства, порядково изоморфные и линейно изометричные пространству l_1^n с конусом*

$$K_1 = \big\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_1 \geqslant |x_2| + \cdots + |x_n|\big\}.$$

1.4. Пусть $(E, E_+) \in (\mathfrak{R})$. Для любого $x \in E$ обозначим через $|X|$ множество элементов $y \in E$ таких, что $\pm x \leqslant y$ и $\|x\| = \|y\|$. Положим

$$X_+ = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|X|, \qquad X_- = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|X|.$$

Множества X_+ и X_- называются множествами *положительных* (соответственно *отрицательных*) *частей элемента* x. Если $y \in |X|$, т. е. $\pm x \leqslant y$ и $\|y\| = \|x\|$, то положим $x_+ = 1/2(y + x)$, $x_- = 1/2(y - x)$, $|x| = x_+ + x_-$. Из определения следует, что $|x|$, x_+ и $x_- \in E$, $|x| \geqslant \pm x$, причем

$$x = x_+ - x_-, \quad |x| = x_+ + x_-, \quad \|x_+ - x_-\| = \|x_+ + x_-\|, \quad \|x\| = \||x|\|.$$

1.5. При вычислении расстояния от точки до конуса воспользуемся следующим результатом из [3].

Утверждение. *Пусть $(E, E_+) \in (\mathfrak{R})$ и $x \notin E_+$. Элемент $x_+ \in E_+$ является ближайшим к x элементом конуса E_+ тогда и только тогда, когда существует $f \in E_+^*$, $\|f\| = 1$, $f(x_+) = 0$, $f(x_-) = \|x_-\|$. В этом случае $d(x, E_+) = \|x_-\|$.*

1.6. Пусть E — банахово пространство над $\mathbb{R}$ со строго регулярным замкнутым конусом E_+. Элементы $x, y \in E_+$ называются *н-дизъюнктными* или *ортогональными по Роберу* (обозначается $x \underset{R}{\perp} y$), если $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ для любого $\lambda \geqslant 0$. Если $\forall x \in E$ найдутся x_+, x_- такие, что $x = x_+ - x_-$ и $x_+ \underset{R}{\perp} x_-$, то конус E_+ называется н-дизъюнктно разложимым [3].

2. Основные результаты

2.1. Рассмотрим конус $K(f,\alpha)$ в пространстве l_1^n $(n \geqslant 1)$, где $\alpha = 0.5$ и функционал f имеет j-ую координату, равную единице, а остальные координаты нулевыми. Обозначим такой конус через K_j. Как отмечено в 1.3, конусами типа $\pm K_j$ исчерпываются все нерешеточные конусы в этом пространстве [4]:

$$K_j = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in l_1^n : \ x_j \geqslant \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |x_i| \right\}.$$

В дальнейшем рассматриваются конусы типа K_j, так как для конуса $-K_j$ рассуждения аналогичные.

2.2. Теорема. *Пусть $(l_1^n, K_j) \in (\mathfrak{R})$. Произвольный элемент $x \in l_1^n$ можно представить в виде разности $x = x_+ - x_-$, где x_+ и x_- ортогональны по Роберу. При этом x_+ является ближайшим к x элементом конуса K_j и расстояние $d(x, K_j)$ равно норме элемента x_-. Кроме того,*

(1) *если x принадлежит конусу, то $x_+ = x$, $x_- = 0$,*

(2) *если $-x$ принадлежит конусу, то $x_+ = 0$, $x_- = x$,*

(3) *если $\pm x$ не принадлежат конусу, то положительная и отрицательная части вычисляются по формулам:*

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{A + x_j}{2}\left(\frac{x_1}{A}, \frac{x_2}{A}, \dots, \frac{x_{j-1}}{A}, 1, \frac{x_{j+1}}{A}, \dots, \frac{x_n}{A}\right), \\ x_- &= \frac{A - x_j}{2}\left(\frac{-x_1}{A}, \frac{-x_2}{A}, \dots, \frac{-x_{j-1}}{A}, 1, \frac{-x_{j+1}}{A}, \dots, \frac{-x_n}{A}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где $A = \sum_{i \neq j} |x_i|$.

$\lhd$ Обозначим через $A = \sum\limits_{i=1, i\neq j}^{n} |x_i|$, тогда конус имеет вид $K_j = \{x : x_j \geqslant A\}$. Случаи (1) и (2) очевидны. Рассмотрим случай, когда $\pm x$ не принадлежат конусу. Покажем, что $x = x_+ - x_-$. Действительно, j-ая координата вектора $x_+ - x_-$ равна $\frac{A + x_j}{2} - \frac{A - x_j}{2} = x_j$, а любая другая i-ая координата вычисляется

$$\frac{A + x_j}{2} \cdot \frac{x_i}{A} - \frac{A - x_j}{2} \cdot \frac{-x_i}{A} = \frac{Ax_i + x_j x_i + Ax_i - x_j x_i}{2A} = \frac{2x_i A}{2A} = x_i.$$

Покажем, что найденные x_+ и x_- лежат на границе конуса K_j. Действительно,

$$1 \geqslant \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{|x_i|}{A} = \frac{\sum_{i=1, i\neq j}^{n} |x_i|}{A} = \frac{A}{A} = 1.$$

Докажем, используя утверждение из пункта 1.5, что x_+ является ближайшим к x элементом конуса и $d(x, K_j) = \|x_-\|$. Для этого найдем функционал $f \in K_j^*$, $\|f\| = 1$, такой что $f(x_+) = 0$, $f(x_-) = \|x_-\|$. В нашем случае этот функционал имеет вид

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad \text{где} \quad f_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ i = j, \\ \operatorname{sgn}(x_i), & \text{если} \ \ i \neq j. \end{cases}$$

Действительно, $f \in K_j^*$, так как для любого $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K_j$, имеем

$$f(x) = x_j - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \operatorname{sgn}(x_i) = x_j - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |x_i| \geqslant 0,$$

и x принадлежит конусу, т. е. $x_j \geqslant \sum\limits_{i=1, i\neq j}^{n} |x_i|$. Кроме того, $\|f\| = 1$, так как $\|f\| =$

$\sup\{|f_i|,\ i=1,\dots,n\}=1$. Нетрудно видеть, что $f(x_+)=0$. Действительно:

$$\begin{aligned}f(x_+)&=\frac{A+x_j}{2}-\frac{A+x_j}{2}\left(\frac{x_1}{A}+\frac{x_2}{A}+\dots+\frac{x_{j-1}}{A}+\frac{x_{j+1}}{A}+\dots+\frac{x_n}{A}\right)\\&=\frac{A+x_j}{2}-\frac{A+x_j}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}\operatorname{sgn}(x_i)x_i}{A}=\frac{A+x_j}{2}-\frac{A+x_j}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}|x_i|}{A}\\&=\frac{A+x_j}{2}-\frac{A+x_j}{2}\cdot\frac{A}{A}=\frac{A+x_j}{2}-\frac{A+x_j}{2}=0.\end{aligned}$$

Остается показать справедливость равенства $f(x_-)=\|x_-\|$. Вычисления аналогичные вышеприведенным дают

$$\begin{aligned}f(x_-)&=\frac{A-x_j}{2}-\frac{A-x_j}{2}\left(\frac{-x_1}{A}+\frac{-x_2}{A}+\dots+\frac{-x_{j-1}}{A}+\frac{-x_{j+1}}{A}+\dots+\frac{-x_n}{A}\right)\\&=\frac{A-x_j}{2}-\frac{A-x_j}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}\operatorname{sgn}(x_i)x_i}{A}=\frac{A-x_j}{2}-\frac{A-x_j}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}|x_i|}{A}\\&=\frac{A-x_j}{2}-\frac{A-x_j}{2}\cdot\frac{A}{A}=\frac{A-x_j}{2}-\frac{A-x_j}{2}=A-x_j=\|x_-\|.\end{aligned}$$

Таким образом, условия утверждения из 1.5 выполнены и $x_+\in K_j$ является ближайшим к $x\notin K_j$ элементом конуса K_j и $d(x,K_j)=\|x_-\|$.

Покажем н-дизъюнктность элементов x_+ и x_-, определяемых формулами (1). Справедливы равенства

$$\begin{aligned}\|x_++tx_-\|&=\left|\frac{A+x_j}{2}+t\frac{A-x_j}{2}\right|+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\left|\frac{A+x_j}{2}\cdot\frac{x_i}{A}+t\frac{A-x_j}{2}\cdot\frac{-x_i}{A}\right|\\&=\left(\frac{A+x_j}{2}+t\frac{A-x_j}{2}\right)+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\frac{|x_i|}{A}\left|\frac{A+x_j}{2}-t\frac{A-x_j}{2}\right|\\&=\left(\frac{A+x_j}{2}+t\frac{A-x_j}{2}\right)+\left|\frac{A+x_j}{2}-t\frac{A-x_j}{2}\right|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_+-tx_-\|&=\left|\frac{A+x_j}{2}-t\frac{A-x_j}{2}\right|+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\left|\frac{A+x_j}{2}\cdot\frac{x_i}{A}-t\frac{A-x_j}{2}\cdot\frac{-x_i}{A}\right|\\&=\left|\frac{A+x_j}{2}-t\frac{A-x_j}{2}\right|+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\frac{|x_i|}{A}\left|\frac{A+x_j}{2}+t\frac{A-x_j}{2}\right|\\&=\left|\frac{A+x_j}{2}-t\frac{A-x_j}{2}\right|+\left(\frac{A+x_j}{2}+t\frac{A-x_j}{2}\right).\end{aligned}$$

Из этих вычислений следует, что $\|x_++tx_-\|=\|x_+-tx_-\|$, т. е. элементы x_+ и x_- ортогональны по Роберу. $\triangleright$

2.3. *Утверждение.* *Пусть $x\in l_1^n$, l_1^n упорядочено конусом K_j. Тогда*

$$\|x\|=\max\{d(x,K_j),d(-x,K_j)\}=\begin{cases}d(-x,K_j), & \text{если } x_j>0,\\ d(x,K_j), & \text{если } x_j<0.\end{cases}$$

$\lhd$ Рассмотрим два случая. Случай $|x_j| > A$: если $x_j > 0$, то по теореме 2.2 (1) $x = x_+$ и $\|x\| = \|x_+\| = d(-x, K_j)$, а если $x_j < 0$, то по теореме 2.2 (2) $x = -x_-$ и $\|x\| = \|x_-\| = d(x, K_j)$.

Случай $|x_j| < A$: по формулам (1)

$$\|x_+\| = \frac{x_j + A}{2}\left(1 + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{|x_i|}{A}\right) = A + x_j,$$

$$\|x_-\| = \frac{A - x_j}{2}\left(1 + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{|x_i|}{A}\right) = A - x_j,$$

следовательно,

$$\|x\| = |x_j| + A = x_j + A = \|x_+\| = d(-x, K_j) \quad \text{при } x_j \geqslant 0$$

и

$$\|x\| = |x_j| + A = -x_j + A = \|x_-\| = d(x, K_j) \quad \text{при } x_j < 0. \ \rhd$$

2.4. Замечание. Теорема 2.2 и следствие 2.3 справедливы также для пространства l_1.

Литература

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин.: Изд-во КГУ, 1977.—84 с.
2. *Вулих Б. З.* Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах.—Калинин.: Изд-во КГУ, 1978.—84 с.
3. *Худалов В. Т.* Упорядоченные банаховы пространства и их приложения.—Владикавказ: Иристон, 1999.—200 с.
4. *Вишняков Ю. Г., Худалов В. Т.* Описание всех регулярных круглых конусов в l_1^n // Вестник СОГУ. Естественные науки.—1999.—№ 1.—С. 5–6.

Статья поступила 15 марта 2002 г.

Коробова Карина Валерьевна
г. Владикавказ, Владикавказский институт управления
E-mail: `g_k_v@mail.ru`