Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2003, Том 5, Выпуск 4

УДК **513.881**

О ДВУХ КЛАССАХ ПРОСТРАНСТВ КЁТЕ — ФРЕШЕ, В КОТОРЫХ КАЖДОЕ ДОПОЛНЯЕМОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО ИМЕЕТ БАЗИС

В. П. Кондаков, А. И. Ефимов

Рассматриваются два подмножества классов Драгилева (d_i), $i = 1, 2$, пространств Кёте — Фреше, содержащие, в частности, пространства Драгилева L_f типов 1 и 0 соответственно. Каждое дополняемое подпространство любого пространства из этих подмножеств имеет безусловный базис и изоморфно подходящему координатному подпространству.

В работе [1] было показано, что в пространстве степенных рядов конечного типа (определение см., например, в [1, 2]) любое дополняемое подпространство имеет базис и изоморфно подходящему координатному подпространству, т. е. подпространству, порождаемому некоторой частью основного базиса (ортов). Затем в [3, 4] этот результат был распространен на расширяющиеся подклассы класса (d_2), введенного в [5] (с естественным распространением на случай пространств Кёте, не являющихся ядерными). В обзорах [6, 7] отмечалось, что к моменту их написания не было известно подклассов другого класса (d_1), введенного в той же работе [5], с отмеченным свойством дополняемых подпространств. Некоторым исключением являлись так называемые «ручные» пространства в смысле [8] или блочно-разреженные пространства в смысле [9], в которых проекторы и автоморфизмы имеют сравнительно простой вид, обусловленный разреженностью определяющей матрицы Кёте (подробнее см. [9, 10]). Несколько позже было доказано существование базисов в дополняемых подпространствах ядерных пространств степенных рядов бесконечного типа ([11–13]) и совсем недавно — в пространствах класса Драгилева L_f типа 1 [14].

В настоящей работе среди счетно-гильбертовых пространств Кёте класса (d_1), имеющих упорядочиваемый базис (в смысле [15] или его можно назвать блочно-правильным в смысле правильности из [5]), выделен подкласс, содержащий целиком известный класс пространств L_f типа 1 ($(f)_1$ из [5] или [16]), в пространствах которого каждое дополняемое подпространство имеет базис и изоморфно подходящему координатному подпространству (теорема 1 ниже). Проверка отмеченного факта (наличия базиса) проводится применением метода «тупикового» пространства и интерполяции операторов в весовых пространствах по аналогии с методикой [1] (см. также [14–17]).

Аналогично описывается и некоторый подкласс пространств класса (d_2) с описанным выше свойством, и содержащий известные классы L_f и L_g типа 0 из [3, 4] и [6] (теорема 2 ниже).

1. Обозначения и предварительные сведения

Пусть $a = [a_r(n)]_{r,n\in\mathbb{N}}$ — бесконечная матрица действительных чисел с $0 \leqslant a_r(n) \leqslant a_{r+1}(n)$, $\sup_r a_r(n) > 0$ для всех $r, n \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Пространством Кёте называют пространство действительных или комплексных числовых последовательностей

$$l_p[a] = \left\{\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad \|\xi\|_r^p = \sum_n |\xi_n|^p a_r^p(n) < +\infty \ \ \forall r \in \mathbb{N}\right\},$$

наделенное набором полунорм $(\|\cdot\|_r)_{r\in\mathbb{N}}$, задающим топологию (при $p = \infty$ полунормы $\|\cdot\|_r$ по определению являются sup-полунормами).

Посредством линейной интерполяции для пространства Кёте $l_p[a]$ могут быть определены функции

$$a_r(t) = a_r(n) + (t-n)(a_{r+1}(n) - a_r(n)), \ n \leqslant t \leqslant n+1, \ n, r \in \mathbb{N},$$

которые будем называть *весовыми функциями.*

Базис (x_n) счетно-нормированного пространства E называют *правильным* (в смысле [5]), если существует такая система норм, определяющая топологию в E, что $\|x_n\|_r/\|x_n\|_{r+1} \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$ для любого $r \in \mathbb{N}$. Соответствующую такому выбору системы норм матрицу $a = [a_r(n) = \|e_n\|_r]_{r,n\in\mathbb{N}}$ для правильного базиса ортов (e_n) пространства Кёте тоже называют правильной. Заменой правильной матрицы на эквивалентную, в случае необходимости, можно обеспечить строгую монотонность $a_r(n)$ по n и r, а вместе с тем и строгую монотонность функций $a_r(t)$ по t. Всюду ниже при рассмотрении пространств с правильным базисом будет предполагаться наличие в пространстве непрерывной нормы. Последовательность единичных ортов $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_n = (\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}}$, является безусловным базисом в $l_p[a]$ с $\|e_n\|_r = a_r(n)$ и в том случае, когда этот базис является правильным, можно предполагать без утраты общности для матрицы Кёте $[a]$ выполнение условий:

1) $a_1(n) = 1, \ n \in \mathbb{N}, \quad a_r(n) \uparrow \infty \ (n \uparrow \infty), \ r \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$;
2) для любого $r \in \mathbb{N}$, $\ \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \downarrow 0 \quad$ при $n \uparrow \infty$.

Здесь условие (2) обеспечивается выбором системы норм из определения правильности базиса $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, а условие (1), в случае необходимости, может быть обеспечено диагональным преобразованием $e_n \to \frac{1}{a_1(n)}e_n$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. переходом к изоморфному пространству, определяемому матрицей Кёте $\left[\frac{a_r(n)}{a_1(n)}\right]$.

При таком выборе матрицы Кёте $[a]$ соответствующие функции $a_r(t)$, $t \geqslant 1$, $r \in \mathbb{N}$ будут строго монотонными, а значит, и имеющими обратные $a_r^{-1}(u)$ ($u \in \{a_r(t), \ t \geqslant 1\}$, $r \in \mathbb{N}$).

Заметим, что в важных частных случаях пространств Кёте с правильными базисами ортов функции $a_r(t)$ и обратные к ним появляются естественным образом без использования интерполяции. Например, для пространств Кёте вида $l_2[a]$, где $a_r(n) = \exp f(\lambda_r b_n)$, $\lambda_r \uparrow \lambda$, $\lambda = -1, 0, 1$ или ∞, а f — нечетная непрерывная функция, определенная на действительной оси, удовлетворяет условиям:

1) $f(t) \uparrow \infty$ при $t \uparrow \infty$;
2) $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{f(\theta t)} = 0$ для любого $\theta > 1$ (условие быстрого роста f);

3) для любого $\theta > 1$ $f(\theta t) - f(t) \uparrow \infty$ при $t \uparrow \infty$, $(b_n > 0)_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольна, имеются естественные функции $a_r(t) = \exp f(\lambda_r t)$ $(r \in \mathbb{N},\ t > 0)$ и обратные им $a_s^{-1}(u) = \frac{1}{\lambda_s} f^{-1}(\ln u)$.

Пространство Кёте — Фреше E с базисом ортов (e_n) относят к классу (d_i), $i = 1, 2$, если выполняется соответственно условие (1) или (2):

(1) $\exists r(1)\ \forall r\ \exists s(r),\ C > 0$

$$|e_n|_r^2 \leqslant C |e_n|_{r(1)} |e_n|_{s(r)} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

(2) $\forall r\ \exists s(r)\ \forall t,\ \exists C > 0$

$$|e_n|_r |e_n|_t \leqslant C |e_n|_{s(r)}^2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из условия (d_2) с помощью индуктивного процесса можно выбрать константы $C(r) > 0$ так, чтобы выполнялось условие $(\widetilde{d_2})$:

$$\forall r \exists s(r)\ \forall t \qquad \|e_n\|_r \|e_n\|_t \leqslant \|e_n\|_{s(r)}^2 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где используется новая система норм $(\|\cdot\|_r = C^{-1}(r)|\cdot|_r)$, эквивалентная исходной. Эти пространства являются обобщением пространств Кёте, определяемых (логарифмически выпуклыми) функциями Драгилева из [5] и пространств L_g, упоминавшихся в [6].

Напомним известное условие интерполяции линейного оператора, действующего в семействах весовых пространств (см. [18]).

Пусть заданы параметрические семейства гильбертовых пространств

$$H_\lambda = l_2(a_\lambda(n)) = \left\{ \xi = (\xi_n) :\ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 a_\lambda^2(n) = |\xi|_\lambda^2 < \infty \right\},\ \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2,$$

$$\mathcal{G}_{\lambda'} = l_2(b_{\lambda'}(n)) = \left\{ \xi = (\xi_n) :\ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 b_{\lambda'}^2(n) = \|\xi\|_{\lambda'}^2 < \infty \right\},\ \lambda_1' \leqslant \lambda' \leqslant \lambda_2',$$

$$H_{\lambda_1} \subset H_\lambda \subset H_{\lambda_2},\quad \mathcal{G}_{\lambda_1'} \subset \mathcal{G}_{\lambda'} \subset \mathcal{G}_{\lambda_2'},$$

и оператор T, определенный на плотном множестве во всех пространствах H_λ, допускает продолжение по непрерывности до ограниченного отображения $T : H_{\lambda_1} \to \mathcal{G}_{\lambda_1'}$ и до ограниченного отображения $T : H_{\lambda_2} \to \mathcal{G}_{\lambda_2'}$.
Если выполнено следующее условие

$$\forall \lambda' :\ \lambda_1' \leqslant \lambda' \leqslant \lambda_2'\ \ \exists \lambda(\lambda') :\ \lambda_1 \leqslant \lambda(\lambda') \leqslant \lambda_2,\quad C = C(\lambda', \lambda(\lambda')) > 0$$

$$\frac{b_{\lambda'}(n)}{a_{\lambda(\lambda')}(m)} \leqslant C \max\left\{ \frac{b_{\lambda_1'}(n)}{a_{\lambda_1}(m)},\ \frac{b_{\lambda_2'}(n)}{a_{\lambda_2}(m)} \right\} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

то оператор T допускает продолжение до ограниченного отображения $T : H_{\lambda(\lambda')} \to \mathcal{G}_{\lambda'}$.

Заметим, что это условие интерполяции оператора очевидно для весовых пространств с абсолютными базисами, т. е. семейств вида $l_1(a_\lambda(n))$, а в [18] показано, что оно же является и условием интерполяции оператора в семействах пространств $l_p(a_\lambda(n))$ с $1 < p < \infty$.

Ниже для пространств Кёте с правильным базисом будут рассматриваться парные композиции весовых функций с их обратными вида $a_s(a_r^{-1}(\cdot))$. Для краткости везде эти композиции будут называться парными композициями.

Определение 1. Будем говорить, что правильная матрица Кёте $[a_r(n)]$ определяется последовательностью весовых функций с упорядоченностью парных композиций с обратными функциями, если выполнено условие

$$\exists r(1)\ \forall r\ \exists s(r),\ C(r)>0$$

$$a_r(a_{r(1)}^{-1}(t)) \leqslant C(r)a_{s(r)}(a_r^{-1}(t)) \quad \forall t>1.$$

Для краткости, такие матрицы Кёте будем называть матрицами Кёте со свойством (s_1).

В частности, любое пространство класса $(f)_0$ определяется канонической матрицей (из определения) со свойствами (s_1) и $(\widetilde{d_2})$.

Определение 2. Будем говорить, что правильная матрица Кёте $[a_r(n)]$ определяется последовательностью весовых функций с обратной упорядоченностью парных композиций с обратными функциями, если выполнено условие

$$\forall r\ \exists s(r), C(r)>0\ \ \forall s>s(r)\ :\ a_s(a_{s(r)}^{-1}(t)) < C(r)a_{s(r)}(a_r^{-1}(t))\ \ \forall t.$$

Для краткости, будем называть такие матрицы Кёте матрицами Кёте со свойством (s_2).

Если пространство Кёте из класса $(f)_1$, то его топология может всегда быть задана матрицей Кёте со свойством (s_2), например, $a_r(n)=\exp f((1-2^{-r})b_n)$. Заметим, что классы пространств Кёте, соответствующих матрицам со свойствами (s_1) и (s_2), могут пересекаться.

2. Результаты

Теорема 1. *Пусть $E=l_2\left([a_r(n)],\left(l_2^{M(n)}\right)\right)$, где $M(n)\leqslant\infty$, $n\in\mathbb{N}$, — блочное счетно-гильбертово пространство Кёте класса (d_1), определяемое правильной матрицей $[a_r(n)]$ со свойством (s_2) (обратной упорядоченности парных композиций с обратными функциями).*

Тогда произвольное дополняемое подпространство F в E изоморфно некоторому координатному подпространству в E вида $E=l_2\left([a_r(m(n))],\left(l_2^{L(n)}\right)\right)$, где $(m(n))$ — последовательность натуральных чисел без повторений и $L(n)\leqslant M(n)$, $n\in\mathbb{N}$.

$\lhd$ Так как E из класса (d_1), матрицу Кёте $[a]$ предполагаем выбранной так, что $\forall r\ \exists s(r),\ C(r)>0$

$$a_r^2(n)\leqslant C(r)a_{s(r)}(n),\quad a_1(n)=1\ \ (n=1,2,\dots).$$

При этом общность рассуждений не утрачивается, поскольку приводящее к этому преобразование, описанное выше, сохраняет условие (s_2). Пусть P — некоторый непрерывный линейный проектор из E на F, который существует по определению дополняемости F в E. Этому проектору соответствует инволютивный оператор $J=2P-I$, т. е. изоморфизм со свойством $J^2=I$ (здесь I — тождественный оператор в E). Если условие непрерывности P записывается в виде

$$\forall r\ \exists s(r),\ \widetilde{C}(r)>0:\ \ |Pe|_r\leqslant\widetilde{C}(r)|e|_{s(r)},\ e\in E,$$

где можем считать

$$|e|_r^2=\sum_n |e_n'(e)|^2a_r^2(n),\ r\in\mathbb{N}$$

(e'_n — координатные функционалы базиса ортов (e_n)), то условие непрерывности J имеет вид

$$|Je|_r \leqslant C(r)|e|_{s(r)}, \quad e \in E, \ r \in \mathbb{N}, \ C(r) = 3\widetilde{C}(r),$$

и ввиду инволютивности J

$$|e|_r \leqslant C(r)|Je|_{s(r)}, \ e \in E, \ r \in \mathbb{N}.$$

Введем новую систему норм $(\|\cdot\|_r)$:

$$\|e\|_r^2 = |e|_r^2 + |Je|_r^2, \quad e \in E, \ r \in \mathbb{N}.$$

Эта система норм эквивалентна исходной, так как при любом $r \in \mathbb{N}$

$$|e|_r \leqslant \|e\|_r \leqslant \widetilde{D}(r)|e|_{s(r)}, \ e \in E \quad \left(\widetilde{D}(r) = \sqrt{1 + (C(r))^2}\right),$$

и

$$\|Je\|_r = \|e\|_r \quad (\|Pe\|_r \leqslant \|e\|_r), \ r \in \mathbb{N}, \ e \in E.$$

Введем тупиковый вес $a_\infty(n) = a_n(n)$, и, как указано выше, неубывающую непрерывную функцию $a_\infty(t)$, $1 \leqslant t < \infty$. Затем определим пару «тупиковых» норм

$$]e[_\infty^2 = \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{2^r} \frac{\|e\|_r^2}{D^2(r)} \leqslant |e|_\infty^2 = \sum_{n=1}^\infty |e'_n(e)|^2 a_\infty^2(n),$$

где $D(r)$ таково, что $\|e\|_r \leqslant D(r)|e|_\infty$, со свойством $]Je[_\infty \leqslant]e[_\infty$, $e \in X_0 = \operatorname{span}(e_n)_{n=1}^\infty$. Обозначим пополнения X_0 по гильбертовым нормам $\|\cdot\|_1$ и $]\cdot[_\infty$ через H_0 и H_∞ соответственно. Очевидно, при этом H_∞ тождественно вложено в H_0 и, в случае необходимости, умножением нормы $\|\cdot\|_1$ на подходящее число можно добиться, чтобы норма $]\cdot[_0 = \mathrm{const} \cdot \|\cdot\|_1$ удовлетворяла неравенству $]\cdot[_0 \leqslant]\cdot[_\infty$.

Пусть (h_j) ортогональный базис одновременно в H_0 и H_∞ состоящий из части $(h_j)_{j\in\nu}$, порождающей PH_∞ и части $(h_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\nu}$, порождающей $(I-P)H_\infty$.

Считая последовательность (h_j) нормированной в $(H_0,]\cdot[_0)$, определим числа t_j из следующих равенств $]h_j[_\infty = a_\infty(t_j)$, выбирая каждый раз t_j равным максимальному значению из всех, удовлетворяющих равенству, что возможно, так как данный тупиковый вес является неубывающей функцией.

Для пары пространств $H_\infty \subset H_0$ образуем семейство промежуточных пространств H_r, путем пополнения линейной оболочки базиса ортов $(e_n)_{n=1}^\infty$ по «искусственным» нормам

$$\|e\|_r^{*2} = \sum_{j=1}^\infty |h'_j(e)|^2 a_r^2(t_j), \quad e \in X_0,$$

где h'_j — коэффициентные функционалы общего ортогонального базиса (h_j) (эти функционалы можно выразить в терминах скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_0$).

Другое семейство гильбертовых пространств $\{\mathcal{G}_r\}$ получим путем пополнения X_0 относительно естественных норм

$$|e|_r^2 = \sum_{n=1}^\infty |e'_n(e)|^2 a_r^2(n)$$

и тупиковой нормы

$$|e|_\infty^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n'(e)|^2 a_\infty^2(n).$$

Для указанных семейств гильбертовых пространств, согласно построению, имеем тождественные вложения $\mathcal{G}_\infty \subset H_\infty$, $\mathcal{G}_{s(0)} \subset H_0$, и, с другой стороны, естественные вложения $H_0 \subset \mathcal{G}_0$, $H_\infty \subset \mathcal{G}_q$. Посредством проверки условия интерполяции (1) операторов, осуществляющих указанные вложения, покажем, что последовательность норм $(\|\cdot\|_r^*)_{r=1}^\infty$ эквивалентна последовательности норм $(|\cdot|_r)_{r=1}^\infty$, задающей исходную топологию в E. Это и будет означать, что (h_j) — 2-абсолютный базис (как базис ортов счетно-гильбертова пространства Кёте), а значит, $(h_j)_{j\in\nu}$ — 2-абсолютный (безусловный) базис в F.

С одной стороны, тождественные вложения $\mathcal{G}_\infty$ в H_∞ и $\mathcal{G}_{s(0)}$ в H_0 можно рассматривать как линейный оператор T_{id} на $\operatorname{span}(e_n)$, который допускает распространение до ограниченного оператора в каждом из крайних пространств

$$T_{id} : \mathcal{G}_\infty \to H_\infty, \qquad T_{id} : \mathcal{G}_{s(0)} \to H_0.$$

Убедимся, что при любом r этот оператор допускает распространение до ограниченного оператора

$$T_{id} : \mathcal{G}_{s(r)} \to H_r,$$

где $s(r) \geqslant r$. Это даст нам одну серию оценок норм

$$\forall r \ \ \exists s(r),\ C(r) > 0 \ \ \|e\|_r^* \leqslant C(r)|e|_{s(r)}, \quad e \in E_{s(r)}.$$

Указанная интерполяция T_{id} возможна при выполнении условия интерполяции (1), которое при данном выборе индексов имеет конкретный вид

$$\frac{a_r(t_j)}{a_{s(r)}(i)} \leqslant B \max\left\{\frac{a_\infty(t_j)}{a_\infty(i)},\ \frac{1}{a_{s(0)}(i)}\right\} \quad \forall i, j,$$

где $B > 0$ — некоторая константа, которая может зависеть от r и $s(r)$. В этих неравенствах рассмотрим два возможных случая:

а) $t_j \geqslant i$ и тогда

$$\frac{a_r(t_j)}{a_\infty(t_j)} \leqslant A(r)\frac{a_r(i)}{a_\infty(i)} \leqslant A(r)\frac{a_{s(r)}(i)}{a_\infty(i)},$$

т. е.

$$\frac{a_r(t_j)}{a_{s(r)}(i)} \leqslant A(r)\frac{a_\infty(t_j)}{a_\infty(i)}, \text{ так как } \ s(r) > r,$$

где константа $A(r)$ выбирается так, чтобы неравенства выполнялись при $t_j < r$.

б) $t_j < i$ и в этом случае согласно условию (d_1)

$$a_r(t_j) < a_r(i) \leqslant C(r)\frac{a_{s(r)}(i)}{a_r(i)} \leqslant C(r)\frac{a_{s(r)}(i)}{a_{s(0)}(i)} \quad \text{при } s(0) < r,$$

т. е.

$$\frac{a_r(t_j)}{a_{s(r)}(i)} \leqslant C(r)\frac{1}{a_{s(0)}(i)}.$$

Таким образом, условие интерполяции для T_{id} действительно выполняется и «искусственные» нормы $\|\cdot\|_r^*$ мажорируются естественными нормами пространства.

Чтобы доказать другую серию неравенств

$$\forall r \ \ \exists s(r),\ A(r) > 0$$

$$|e|_r \leqslant A(r)\|e\|^*_{s(r)}, \quad e \in X_0,$$

покажем выполнение условия интерполяции оператора тождественного вложения T_{id}^{-1}, который допускает распространение до ограниченного оператора $T_{id}^{-1} : H_0 \to \mathcal{G}_0$, $T_{id}^{-1} : H_\infty \to \mathcal{G}_q$.

Для каждого фиксированного значения индекса r естественной нормы в E подберем свое значение $q = q(r)$ так, чтобы выполнялись неравенства: $r < s(r) < q(r)$, где $s(r)$ определено из условия (s_2). При каждом выборе q условие интерполяции оператора T_{id}^{-1}, а точнее, непрерывности вложения $T_{id}^{-1} : H_{s(r)} \to \mathcal{G}_r$, имеет конкретный вид

$$\frac{a_r(j)}{a_{s(r)}(t_i)} \leqslant D \max\left\{1,\ \frac{a_{q(r)}(j)}{a_\infty(t_i)}\right\} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

В одном из возможных случаев, а именно, $a_r(j) \geqslant a_{s(r)}(t_i)$, имеем

$$B(r)\frac{a_{s(r)}(t_i)}{a_\infty(t_i)} \geqslant \frac{a_{s(r)}(t_i)}{a_{s(r)}(a_r^{-1}(a_{s(r)}(t_i)))},$$

согласно свойству (s_2), где константа $B(r)$ обеспечивает неравенства при $t_i < s(r)$, и тогда

$$B(r)\frac{a_{s(r)}(t_i)}{a_\infty(t_i)} \geqslant \frac{a_r(j)}{a_{s(r)}(a_r^{-1}(a_r(j)))}.$$

Следовательно,

$$B(r)\frac{a_{s(r)}(t_i)}{a_\infty(t_i)} \geqslant \frac{a_r(j)}{a_{s(r)}(j)} > \frac{a_r(j)}{a_{q(r)}(j)}.$$

В случае $a_r(j) \leqslant a_{s(r)}(t_i)$ очевидно, что

$$\frac{a_r(j)}{a_{s(r)}(t_i)} < 1$$

и вложение $T_{id}^{-1} : H_{s(r)} \to \mathcal{G}_r$ доказано, а вместе с тем полностью доказана эквивалентность системы «искусственных» норм $(\|\cdot\|_r^*)$ системе норм $(|\cdot|_r)$, задающей исходную топологию E. Отсюда следует, что последовательность (h_j) является 2-абсолютным базисом пространства E и его подпоследовательность $(h_j)_{j\in\nu}$ — 2-абсолютным базисом в F. Согласно теореме о единственности безусловного базиса в указанных пространствах (см., [19; теорема 5] или [20; теорема 3]) базис (h_j) квазиэквивалентен базису единичных ортов, а подпространство F, порождаемое подпоследовательностью $(h_j)_{j\in\nu}$, изоморфно координатному подпространству, порождаемому подпоследовательностью ортов, квазиэквивалентной $(h_j)_{j\in\nu}$. $\triangleright$

Следствие 1. *Пусть* $E = l_2\left([a_r(n)], \left(l_2^{M(n)}\right)\right)$, *где* $M(n) \leqslant \infty,\ n \in \mathbb{N}$, *— блочное счетно-гильбертово пространство Кёте, определяемое правильной матрицей* $[a_r(n)]$ *со свойством* (s_2), *и выполнены условия:*

(1) $a_1(n) \geqslant 1,\ n \in \mathbb{N}$;

(2) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln a_{s(1)}(t)}{\ln a_{s(2)}(t)} = 0$ *для любого* $s(1) < s(2)$, $s(1) \geqslant 1$.

Тогда любое дополняемое подпространство F в E изоморфно некоторому своему координатному подпространству. В частности, это утверждение верно для всех счетно-гильбертовых пространств L_f типа 1, где f — функция быстрого роста, удовлетворяющая условию выпуклости.

$\lhd$ Достаточно заметить, что условия (1) и (2) очевидным образом обеспечивают принадлежность пространства E классу (d_1). $\rhd$

Теорема 2. *Пусть $E = l_2\Big([a_r(n)], \Big(l_2^{M(n)}\Big)\Big)$, где $M(n) \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{N}$, — блочное счетно-гильбертово пространство Кёте класса (d_2), определяемое правильной матрицей $[a_r(n)]$ со свойствами $(\widetilde{d_2})$ и (s_1) (упорядоченности парных композиций с обратными функциями).*

Тогда произвольное дополняемое подпространство F в E изоморфно некоторому координатному подпространству в E вида $l_2\Big([a_r(m(n))], \Big(l_2^{L(n)}\Big)\Big)$, где $(m(n))$ — последовательность натуральных чисел без повторений и $L(n) \leqslant M(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

$\lhd$ Как и в доказательстве предыдущей теоремы повторим построение весовых координатных «тупиковых» пространств и параметрических семейств гильбертовых пространств $\{H_\lambda\}$ и $\{\mathcal{G}_\lambda\}$. Оценивая «искусственные» нормы сверху каноническими, как и выше, приходим к проверке условия интерполяции (1), которое при данном выборе индексов имеет вид

$$\frac{a_r(t_j)}{a_{s(r)}(i)} \leqslant B \max\left\{\frac{a_\infty(t_j)}{a_\infty(i)},\ \frac{a_1(t_j)}{a_{s(0)}(i)}\right\} \quad (i, j \in \mathbb{N}),$$

где $B > 0$ — некоторая константа, которая может зависеть от r и $s(r)$. В этих неравенствах рассмотрим два возможных случая:

а) $t_j \geqslant a_r^{-1}(C(r)a_{s(r)}(i))$, где $C(r) > 1$ и $s(r)$ из условия (s_1), и тогда

$$\frac{a_r(t_j)}{a_\infty(t_j)} \leqslant A(r)C(r)\frac{a_{s(r)}(i)}{a_\infty(a_r^{-1}(C(r)a_{s(r)}(i))} \leqslant A(r)C(r)\frac{a_{s(r)}(i)}{a_\infty(i)},$$

т. е.

$$\frac{a_r(t_j)}{a_{s(r)}(i)} \leqslant A_1(r)\frac{a_\infty(t_j)}{a_\infty(i)}, \text{ так как } s(r) > r.$$

(Здесь константа $A(r)$ подбирается так, чтобы неравенство было справедливо при $t_j < r$).

б) $t_j < a_r^{-1}(C(r)a_{s(r)}(i))$ и с использованием условия (s_1) получаем

$$\frac{a_r(t_j)}{a_{s(r)}(i)} = \frac{a_r(t_j)a_1(t_j)}{a_{s(r)}(i)a_1(t_j)} \leqslant \frac{C(r)a_{s(r)}(i)a_1(t_j)}{a_{s(r)}(i)a_1(a_r^{-1}(C(r)a_{s(r)}(i)))} \leqslant C(r)\frac{a_1(t_j)}{a_r(i)} < C(r)\frac{a_1(t_j)}{a_{s(0)}(i)},$$

т. е.

$$\frac{a_r(t_j)}{a_{s(r)}(i)} \leqslant C(r)\frac{a_1(t_j)}{a_{s(0)}(i)}.$$

Таким образом, условие интерполяции для T_{id} действительно выполняется и «искусственные» нормы $\|\cdot\|_r^*$ мажорируются естественными нормами пространства.

Чтобы доказать другую серию неравенств

$$\forall r \ \ \exists \varphi(r), \ A(r) > 0$$

$$|e|_r \leqslant A(r)\|e\|_{s(r)}^*, \quad e \in X_0,$$

покажем выполнение условия интерполяции оператора тождественного вложения T_{id}^{-1}, который допускает распространение до ограниченного оператора $T_{id}^{-1} : H_0 \to \mathcal{G}_0,\ \ T_{id}^{-1} : H_\infty \to \mathcal{G}_q$.

Для каждого фиксированного значения индекса r естественной нормы в E подберем свое значение $q = q(r)$ так, чтобы выполнялись неравенства: $r < s(r) < q(r)$, где $s(r)$ определено из условия $(\widetilde{d}_2)$. При каждом выборе q условие интерполяции оператора T_{id}^{-1}, а точнее, непрерывности вложения $T_{id}^{-1} : H_{s(r)} \to \mathcal{G}_r$, имеет конкретный вид

$$\frac{a_r(j)}{a_{s(r)}(t_i)} \leqslant D \max\left\{1,\ \frac{a_{q(r)}(j)}{a_\infty(t_i)}\right\} \quad (i, j \in \mathbb{N}).$$

В одном из возможных случаев, а именно, $j \geqslant t_i$, имеем

$$B(r)\frac{a_{s(r)}(t_i)}{a_\infty(t_i)} \geqslant \frac{a_{s(r)}(t_i)}{\frac{a^2_{s(r)}(t_i))}{a_r(t_i)}} = \frac{a_r(t_i)}{a_{s(r)}(t_i)},$$

согласно свойству $(\widetilde{d}_2)$, где константа $B(r) \geqslant 1$ обеспечивает неравенства при $t_i < s(r)$, и тогда

$$B(r)\frac{a_{s(r)}(t_i)}{a_\infty(t_i)} \geqslant \frac{a_r(j)}{a_{s(r)}(j)},$$

так как $t_i \leqslant j$. Следовательно,

$$B(r)\frac{a_{s(r)}(t_i)}{a_\infty(t_i)} \geqslant \frac{a_r(j)}{a_{s(r)}(j)} > \frac{a_r(j)}{a_{q(r)}(j)}.$$

В случае $j < t_i$ очевидно, что

$$\frac{a_r(j)}{a_{s(r)}(t_i)} < 1$$

и вложение $T_{id}^{-1} : H_{s(r)} \to \mathcal{G}_r$ доказано, а вместе с тем полностью доказана эквивалентность системы «искусственных» норм $(\|\cdot\|_r^*)$ любой системе норм вида $(|\cdot|_r^*)$, задающей исходную топологию E. Отсюда следует, что последовательность (h_j) является 2-абсолютным базисом пространства E и подпоследовательность $(h_j)_{j\in\nu}$ — 2-абсолютным базисом в F. Как и в конце доказательства теоремы 1 требуемое утверждение следует из теоремы о единственности безусловного базиса в рассматриваемых пространствах (см. [20; теорема 7]). $\rhd$

Следствие 2. *Пусть* $E = l_2\left([a_r(n)], \left(l_2^{M(n)}\right)\right)$, *где* $M(n) \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{N}$, — *блочное счетно-гильбертово пространство Кёте, определяемое правильной матрицей* $[a_r(n)]$ *со свойством* (s_1), *и выполнены условия:*

(1) $a_r(n) \leqslant 1,\ \forall r, n \in \mathbb{N}$;

(2) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln a_{s(1)}(t)}{\ln a_{s(2)}(t)} = 0$ *при* $s(1) < s(2)$, $s(1) \geqslant 1$.

Тогда любое дополняемое подпространство F в E изоморфно некоторому своему координатному подпространству. В частности, это утверждение верно для всех счетно-гильбертовых пространств L_f типа 0, где f — функция быстрого роста, удовлетворяющая условию выпуклости.

$\lhd$ Достаточно заметить, что условия (1) и (2) очевидным образом обеспечивают принадлежность пространства E классу (d_2) и условие $(\widetilde{d}_2)$. $\rhd$

Заметим, что для оставшихся не разобранными в данной работе пространств L_f типа ∞ выполняются условия (1) и (2) следствия 1 и свойство (s_1), а для пространств L_f типа -1 выполняются условия (1) и (2) следствия 2 и свойство (s_2).

Для изучения вопроса о существовании базисов в дополняемых подпространствах некоторых представителей класса пространств Кёте типа $(f)_\infty$ в [11–13] использовался другой (более сложный) подход. Здесь можно отметить некоторое обобщение известных результатов о базисах в «обобщенно-ручных» дополняемых подпространствах пространств Кёте указанного класса $(f)_\infty$ (ср. 8–10).

Пусть $g(\cdot)$ — неотрицательная, монотонно возрастающая на $[0,\infty)$ дифференцируемая функция со свойством

$$\forall a > 1 \quad \frac{g(t)}{g(at)} \downarrow 0 \quad \text{при} \quad t \uparrow \infty.$$

В пространстве Кёте $E = l_2[g(ra_n)]$ проектор P назовем *обобщенно-ручным*, если имеется представление пространства Кёте $E = l_2[g(\varphi(r)a_n)]$ со строго возрастающей функцией $\varphi(\cdot)$, при которой условие непрерывности проектора P имеет вид

$$|Je|_r \leqslant |e|_{r+1}, \quad e \in E, \quad r = 1, 2, \dots,$$

где $J = 2P - I$, а $|\cdot|_r$ — канонические нормы из определения пространства Кёте E, и

$$\sup_r \frac{\varphi(r)}{\varphi(r-1)} = L < +\infty.$$

Очевидно, в случае конкретного пространства Кёте с $g(t) = \exp t$ (или $g(t) = \exp f(t)$) обычные ручные проекторы из [8] удовлетворяют указанным условиям.

Теорема 3 (ср. [8, 9, 17]). *В пространстве Кёте $E = l_2[g(ra_n)]$ указанного вида из класса (d_1) образ каждого обобщенно-ручного проектора имеет безусловный базис, квазиэквивалентный части базиса единичных ортов.*

$\lhd$ Выбрав, согласно определению обобщенно-ручного проектора P, представление пространства $E = l_2[g(\varphi(r)a_n)]$, определим сразу четыре «тупиковые» нормы. Первая норма определяется достаточно произвольно

$$|e|_\infty^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |e_i'(e)|^2 g^2(\varphi(r(i))a_i),$$

где $(\varphi(r(i)))$ можно взять монотонно растущей, чтобы норма $|\cdot|_\infty$ была конечна на плотном множестве из PE, например, из условия конечности $|Pe_i|_\infty$ $(i = 1, 2, \dots)$. Здесь (e_i) — базис ортов и $(e_i'(\cdot))$ — последовательность координатных функционалов. Вводя вспомогательные гильбертовы нормы $\|e\|_r^2 = |e|_r^2 + |Je|_r^2 \leqslant 2|e|_{r+1}$ $(r = 1, 2, \dots)$ и определяя точные константы $D(r) > 0$ $\forall r \in \mathbb{N}$ $|e|_r \leqslant D(r)|e|_\infty$, положим

$$|e|_{\infty 1}^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|e|_k^2}{k^2 D^2(k)} \leqslant \frac{\pi^2}{6} |e|_\infty^2,$$

$$|e|_{\infty 2}^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|e|_{k-1}^2}{k^2 D^2(k)} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|e\|_{k-1}^2}{k^2 D^2(k)} = \|e\|_\infty \leqslant 2|e|_\infty^2$$

для элементов плотного в E множества.

Одновременно определяются две дифференцируемые монотонно возрастающие функции

$$\Phi_1(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g^2(\varphi(k)t)}{k^2 D^2(k)}, \qquad \Phi_2(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g^2(\varphi(k-1)t)}{k^2 D^2(k)}, \qquad t \geqslant 0.$$

Также как в доказательстве теоремы 1 возьмем общий ортогональный базис $(h_i)_{i=1}^{\infty}$ в двух гильбертовых пространствах $H_1 \subset H_2$, полученных пополнением E по нормам $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_1$ соответственно, который составлен из двух частей $(h_i)_{i\in\nu}$, $(h_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\nu}$, порождающих плотные подмножества в PE и $(I-P)E$. Этот базис предполагаем нормированным в H_1, т. е. $\|h_i\|_1 = 1$. Тогда, поскольку E не предполагается гильбертовым (в этом случае все ясно), имеем

$$\sup_i \|h_i\|_\infty = \infty$$

и определим последовательности чисел (c_i), (b_i) следующим образом:

$$\|h_i\|_\infty^2 = \Phi_1(c_i) = \Phi_2(b_i) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Тем самым определяются две системы «искусственных» норм, аналогичные одной системе «искусственных» норм из доказательства теоремы 1,

$$\|e\|_r^{*2} = \sum_{i=1}^{\infty} |h_i'(e)|^2 g^2(\varphi(r)c_i),$$

$$]e[_r^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |h_i'(e)|^2 g^2(\varphi(r)b_i) \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Дословно повторив рассуждения доказательства теоремы 1, можно проверить условия интерполяции операторов тождественных вложений гильбертовых пространств, получаемых пополнением E по построенным искусственным и естественным нормам

$$|e|_r^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |e_i'(e)|^2 g^2(\varphi(r)a_i) \quad (r = 1, 2, \dots).$$

В результате получаем, что система норм $(\|\cdot\|_r^*)_{r=1}^{\infty}$ мажорируется естественными нормами, а система норм $(]\cdot[_r)_{r=1}^{\infty}$ мажорирует систему естественных норм.

Остается проверить эквивалентность этих двух систем «искусственных» норм. С одной стороны, ввиду монотонности функции $g(\cdot)$ имеем $c_i \leqslant b_i$ при любом i. Чтобы показать оценки в другую сторону, воспользуемся равенством

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{g^2(\varphi(k)c_i) - g^2(\varphi(k-1)b_i)}{k^2 D^2(k)} = 0,$$

справедливым при любом i, и применим формулу Лагранжа к разности двух значений функции g^2 в каждом слагаемом. Тогда будем иметь

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(g^2)'(\theta(k,i)[\varphi(k)c_i - \varphi(k-1)b_i]}{k^2 D^2(k)} = 0,$$

откуда

$$b_i \leqslant \left[\sup_k \frac{\varphi(k)}{\varphi(k-1)}\right] c_i.$$

Следовательно, все три системы «искусственных» и естественных норм эквивалентны и (h_i) является безусловным базисом пространства E, квазиэквивалентным базису единичных ортов, согласно [20]. Часть этого базиса порождает образ проектора PE и теорема доказана. $\triangleright$

В [8, 9] указаны классы пространств Кёте, в которых все непрерывные линейные проекторы являются обобщенно-ручными.

Приведенные результаты довольно просто распространить и на пространства Кёте вида $l_2[a] \times \omega\big(l_2^{N(i)}\big)$, где

$$\omega\big(l_2^{N(i)}\big) = \Big\{x = (x_i) : \ x_i \in l_2^{N(i)}, \ N(i) \leqslant +\infty, \ i \in \mathbb{N}, \ |x|_r^2 = \sum_{i=1}^{r} \|x_i\|_{l_2}^2, \ r \in \mathbb{N}\Big\},$$

а $l_2[a]$ — пространство Кёте как в теоремах 1 и 2. Известно, что в указанных пространствах любое дополняемое подпространство представляется в виде декартова произведения $F \times G$, где F — дополняемо в $l_2[a]$, а G — в $\omega\big(l_2^{N(i)}\big)$. В сомножителе $\omega\big(l_2^{N(i)}\big)$ всякое дополняемое подпространство также изоморфно какому-нибудь координатному подпространству.

Литература

1. *Митягин Б. С.* Квазиэквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Studia Math.—1971.—Т. 37.—С. 111–137.
2. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир, 1967.—266 с.
3. *Ahonen H.* On nuclear Köthe spaces defined by Dragilev functions // Series A. Mathematics Dissertationes. 38. Ann. Acad. Sc. Fennicae. Helsinki. 1981.
4. *Кондаков В. П.* О базисах в некоторых функциональных пространствах и их дополняемых подпространствах // Мат. вестник. Белград.—1988.—С. 267–270.
5. *Драгилев М. М.* О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сб.—1965.—Т. 68.—№ 2.—С. 153–173.
6. *Kocatepe M., Nurlu Z.* Some special Köthe spaces / T. Terzioglu (ed). Advances in the Theory of Frechet Spaces.—Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ.—1989.—P. 269–296.
7. *Krone J.* On Pelczynski's problem / T. Terzioglu (ed). Advances in the Theory of Frechet Spaces, Dordrecht; Boston; London; Kluwer Acad. Publ.—1989.—P. 297–304.
8. *Dubinsky E. D., Vogt D.* Complemented subspaces in tame power series spaces // Studia Math.—1989.—V. 93, № 4.—P. 71–85.
9. *Кондаков В. П.* Об операторах и дополняемых подпространствах в пространствах Кёте, определяемых разреженными матрицами // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 35, № 5.—С. 1096–1112.
10. *Драгилев М. М., Кондаков В. П.* Об одном классе ядерных пространств // Мат. заметки.—1970.—Т. 8, вып. 2.— С. 169–179.
11. *Kondakov V. P.* Geometric conditions and the existence of bases in Frechet spaces // Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону.—1998.—С. 145–147.
12. *Кондаков В. П.* О существовании базисов в дополняемых ядерных подпространствах пространств степенных рядов бесконечного типа.— М., 1998. Деп. в ВИНИТИ 11.12.98, № 3653-В98.
13. *Кондаков В. П.* Существование базисов в ядерных дополняемых подпространствах пространств степенных рядов бесконечного типа // Функц. анализ и его прил.—2000.—Т. 34, вып. 2.—С. 81–83.
14. *Кондаков В. П.* О дополняемых подпространствах некоторых пространств Кёте бесконечного типа // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 44, № 1.—С. 112–119.

15. *Баран В. И., Кондаков В. П.* Квазиэквивалентность абсолютных базисов в пространствах классов (d_1) и (d_2) // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 235, № 4.—С. 729–732.
16. *Драгилев М. М.* Базисы в пространствах Кёте.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983.—144 с.
17. *Кондаков В. П.* Замечания о существовании безусловных базисов в весовых счетно-гильбертовых пространствах и их дополняемых подпространствах // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 42, № 6.—С. 1300–1313.
18. *Peetre J.* On interpolation functions 3 // Acta Sci. Math.—1969.—V. 30, № 3.—P. 235–239.
19. *Кондаков В. П.* Вопросы геометрии ненормируемых пространств.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983.—72 с.
20. *Кондаков В. П.* О строении безусловных базисов некоторых пространств Кёте // Studia Math. 1983.—Т. 76, № 2.—С. 137–151.

Статья поступила 2 июня 2003 г.

Кондаков Владимир Петрович, д. ф.-м. н.
г. Ростов, Ростовский государственный университет,
E-mail: kond@ns.math.rsu.ru

Ефимов Анатолий Иванович
г. Ростов, Ростовский государственный университет,
E-mail: anatefim@mail.ru