Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2004, Том 6, Выпуск 3

УДК **517.946**

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Доказаны существование и единственность решения нелокальной краевой задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками для трех возможных случаев расположения корней характеристического уравнения.

А. В. Дзарахохов, В. А. Елеев

Пусть Ω — конечная односвязная область, ограниченная отрезками AA_0, BB_0 и A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = l$, $y = h$ соответственно, расположенных в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками

$$AC : \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0, \qquad BC : \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = l,$$

оператора $L_m = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (-y)^m \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $m = \mathrm{const} > 0$, выходящими из точки $C(\frac{1}{2}, y_c)$, $y_c = -[(m+2)l/4]^{2/(m+2)}$.

Введем обозначения: $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$ — параболическая, а $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$ — гиперболическая части смешанной области Ω.

В области Ω рассмотрим смешанное нагруженное уравнение третьего порядка

$$0 = \begin{cases} Lu + \sum\limits_{j=1}^{n} k_j(x,y)u(x^j, y) = f(x,y), & y > 0, \\ L_m u + b_0(x,y)u + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x,y) D_{0x}^{\rho_i} u(x,0) = d(x,y), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $Lu = u_{xxx} - u_y + a_1(x,y)u_x + a_0(x,y)u$, $D_{0x}^{\rho_i}$ — оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) интегрирования порядка $-\rho_i$ при $\rho_i < 0$ и дробного дифференцирования при $\rho_i > 0$, который при $\rho_i < 1$ задается формулой (см. [1])

$$D_{0x}^{\rho_i} f = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\rho_i)} \int\limits_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1+\rho_i}}, & \rho_i < 0, \\ \frac{d}{dx} D_{0x}^{\rho_i - 1} f(x), & \rho_i > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Предполагается, что x^j, $j = 1, \dots, n$, — фиксированные точки из интервала $(0, l)$, причем для определенности будем считать, что $0 \leqslant x^1 < \ldots < x^n < l$, $\rho_i < \rho_{i-1} < \ldots \rho_1 = \rho$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{(3,1)}(\Omega_1) \cap C_{x,y}^{(2,2)}(\Omega_2)$, $u_x \in C(\overline{\Omega}_1)$;

2) $u(x,y)$ — регулярное решение уравнения (1) при $y \neq 0$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяют краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \quad u(l,y)=\varphi_2(y), \quad u_x(0,y)-u_x(l,y)=\varphi_3(y), \quad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{3}$$

$$u(x,-x)=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1/2, \tag{4}$$

где $\varphi_i(y)\in C[0,h]\cap C^2]0,h[$, $i=1,\dots,3$, $\psi(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^3]0,l[$.

Случай I. Пусть $a_1(x,y)=\theta_1=\mathrm{const}$, $a_0(x,y)=\theta_0=\mathrm{const}$, $k_j(x,y)=\lambda_j=\mathrm{const}$, $j=1,\dots,n$, $m=0$, $b_i(x,y)=0$, $i=0,\dots,n$, $f(x,y)=0$, $d(x,y)=0$.

Переходя к пределу в уравнении (1) при $y\to 0+$, получим функциональное соотношение между $u(x,0)=\tau(x)$ и $u_y(x,0)=\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_1 на линию $y=0$, в виде

$$\tau'''(x)-\nu(x)+\theta_1\tau'(x)+\theta_0\tau(x)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tau(x^j)=0. \tag{5}$$

Функциональное соотношение, между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_2 на линию $y=0$, имеет вид [2]

$$\tau'(x)-\nu(x)=\psi'(x/2). \tag{6}$$

Исключая $\nu(x)$ из (5) и (6), с учетом граничных условий (3) получим для определения $\tau(x)$ следующую задачу

$$\tau'''(x)+(\theta_1-1)\tau'(x)+\theta_0\tau(x)=-\psi'(x/2)-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tau(x^j)=\rho(x), \tag{7}$$

$$\tau(0)=\varphi_1(0), \quad \tau(l)=\varphi_2(0), \quad \tau'(0)-\tau'(l)=\varphi_3(0). \tag{8}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению

$$\tau'''(x)+(\theta_1-1)\tau'(x)+\theta_0\tau(x)=0, \tag{7$'$}$$

имеет вид

$$k^3+(\theta_1-1)k+\theta_0=0. \tag{9}$$

Введем обозначение $s=\frac{\theta_0^2}{4}+\frac{(\theta_1-1)^3}{27}$. Известно [3], что уравнение (9) имеет один действительный и два комплексных корня, если $s>0$. Оно имеет три различных действительных корня, если $s<0$. При $s=0$ все три корня уравнения (9) действительны, причем два из них равны.

Рассмотрим случай когда $s=0$. В этом случае имеем, что $k_1=3\theta_0/(\theta_1-1)$, $k_2=k_3=k=-3\theta_0/[2(\theta_1-1)]$. Так как общее решение уравнения (7$'$) имеет вид

$$\tau(x)=c_1e^{k_1x}+(c_2+c_3x)e^{kx},$$

то методом вариации постоянных, находим общее решение уравнения (7) в виде

$$\tau(x)=\gamma_1e^{k_1x}+(\gamma_2+\gamma_3x)e^{kx}+N(x), \tag{10}$$

где

$$N(x)=-(k-k_1)^{-2}\int\limits_0^x\Big(e^{k_1(x-t)}+[1+(k-k_1)(x+t)]e^{k(x-t)}\Big)\psi'\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$-(k-k_1)^{-2}\int\limits_0^x \Big(e^{k_1(x-t)}+[1+(k-k_1)(x-t)]e^{k(x-t)}\Big)\sum_{j=1}^n \lambda_j\tau(x^j)\,dt = G(x)+P(x)\omega_j,$$

где $G(x)$ — первое слагаемое, $P(x)$ — коэффициент перед суммой, обозначенной нами через ω_j, последнего равенства.

Считая пока $N(x)$ известной, подставим (10) в граничное условие (8). В результате получим систему линейных уравнений относительно γ_i, $i=1,2,3$, которая разрешима, если ее определитель $\Delta=[k+(k_1-k)l]e^{kl}+k[(1-k)l-1]e^{2kl}+[k_1(1+(k-1)l)]e^{(k_1+k)l}-k_1e^{k_1l}\neq 0$. Решая систему находим

$$\begin{aligned}\gamma_1=\Delta^{-1}\Big(&-\big(G'(0)-G'(l)+k(1-e^{kl})\varphi_1(0)-\varphi_3(0)\big)e^{kl}\\&+\big(1-(1+kl)e^{kl}\big)\big(G(l)+\varphi_1(0)e^{kl}-\varphi_2(0)\big)\Big)-\Delta^{-1}\Big((P'(0)-P'(l))e^{kl}\\&+\big(1-(1+kl)e^{kl}P(l)\big)\Big)\omega_j=\rho_1+\rho_2\omega_j,\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2=\Delta^{-1}\Big(&-\big(\varphi_3(0)+G'(0)-G'(l)-k_1(1-e^{k_1l})\varphi_1(0)\big)e^{kl}\\&+(1-(1+kl)e^{kl})\big(\varphi_2(0)-G(l)-\varphi_1(0)e^{k_1l}\big)\Big)+\Delta^{-1}\Big((P'(0)-P'(l))e^{kl}\\&-(1-(1+kl)e^{kl}P(l))\Big)\omega_j=\rho_3+\rho_4\omega_j,\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3=\Delta^{-1}\Big(&\big(\varphi_3(0)+G'(0)-G'(l)\big)e^{kl}-k(\varphi_2(0)-G(l))(1-e^{kl})\\&-\big(\varphi_3(0)+G'(0)-G'(l)\big)e^{k_1l}+k_1(1-e^{k_1l})(\varphi_2(0)-G(l))-\varphi_1(0)k(1-e^{kl})e^{k_1l}\\&-k_1(1-e^{k_1l}e^{kl}\Big)+\Delta^{-1}\Big((P'(0)-P'(l))(e^{kl}-e^{k_1l})+P(l)\big(k(1-e^{kl})\\&+k_1(1-e^{k_1l})\big)\Big)\omega_j=\rho_5+\rho_6\omega_j,\end{aligned}\tag{13}$$

Подставляя (11)–(13) в (10) и заменяя ω_j его значением, получим уравнение

$$\tau(x)+m(x)\sum_{j=1}^n\lambda_j\tau(x^j)=n(x),\tag{14}$$

где $m(x)=G(x)+\rho_1e^{k_1x}+(\rho_3+x\rho_5)e^{kx}$, $n(x)=P(x)-\rho_2e^{k_1x}-(\rho_4+x\rho_6)e^{kx}$.

Полагая в равенстве (14) поочередно $x=x^1$, $x=x^2,\dots,x=x^n$, получаем следующую систему алгебраических уравнений относительно $\tau(x^j)$, $j=1,\dots,n$,

$$\tau_i+m_i\sum_{j=1}^n\lambda_j\tau_j=n_i,\quad i=1,\dots,n,\tag{15}$$

где $m_j=m(x^j)$, $n_j=n(x^j)$, $\tau_j=\tau(x^j)$.

Система (15) имеет единственное решение, если ее определитель отличен от нуля:

$$\Delta_n=1+\sum_{j=1}^n\lambda_jm_j\neq 0.\tag{16}$$

Легко доказать, что

$$\Delta_n^{(i,j)} = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k m_k, & i = j; \\ -\lambda_j m_j, & i \neq j, \end{cases} \tag{17}$$

где $\Delta_n^{(i,j)}$ — алгебраические дополнения элемента i-ой строки и j-го столбца определителя Δ_n. Так как

$$\tau(x^j) = \frac{1}{\Delta_n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_n^{(i,j)} n(x^i), \quad j = 1, \dots, n,$$

то из равенств (16) и (17) получаем (при $\Delta_n \neq 0$)

$$\tau(x^j) = \frac{1}{\Delta_n} \left(n_j + \sum_{i=1}^{n} m_i (n_j \lambda_i - \lambda_j n_i) \right). \tag{18}$$

Таким образом, подставляя (18) в (14), находим единственное решение задачи (7), (8) в виде

$$\tau(x) = n(x) - m(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Delta_n} \left(n_j + m_i (n_j \lambda_i - \lambda_j n_i) \right).$$

Легко заметить, что $\tau(x) \equiv 0$, если $\varphi_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, 3$.

После определения функции $\tau(x)$ мы приходим к задаче (3), $u(x, 0) = \tau(x)$ в области Ω_1.

Рассмотрим однородную задачу, т. е. задачу с нулевыми данными ($\varphi_i = 0$, $i = 1, \dots, 3$, $\tau(x) = 0$). Допустим, что однородная задача имеет нетривиальное решение $u(x, y)$.

Положим

$$u(x, y) = \upsilon(x, y) e^{\lambda x + \mu y}, \tag{19}$$

где λ и μ — некоторые постоянные. Для функции $\upsilon(x, y)$ получим уравнение

$$L(\upsilon) = \upsilon_{xxx} + 3\mu \upsilon_{xx} + (\theta_1 + 3\mu)\upsilon_x + (\theta_0 + \theta_1 \mu + \mu^3 - \lambda)\upsilon \\ + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \upsilon(x^j, y) e^{(x^j - x)\mu} - \upsilon_y = 0$$

и краевые условия

$$\begin{gathered} \upsilon(0, y) = 0, \quad \upsilon(l, y) = 0, \quad \upsilon_x(0, y) - \upsilon_x(1, y) = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant h, \quad \upsilon(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{gathered} \tag{20}$$

По предположению, и в силу (19), эта задача имеет нетривиальное решение $\upsilon(x, y)$.

Рассмотрим тождество

$$\upsilon L \upsilon = \left(\upsilon \upsilon_{xx} - \frac{1}{2} \upsilon_x^2 + 3\mu \upsilon \upsilon_x + \frac{1}{2}(\theta_1 + 3\mu)\upsilon^2 \right)_x - \frac{1}{2}(\upsilon^2)_y - 3\mu \upsilon_x^2 \\ + (\theta_0 - \theta_1 \mu + \mu^3 - \lambda)\upsilon^2 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \upsilon(x^j, y) \upsilon(x, y) e^{(x^j - x)\mu} = 0.$$

Интегрируя это тождество по области Ω_1 и учитывая однородные граничные условия (20), имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l \upsilon^2(x,h)dx - \int\limits_\Omega \Big((\theta_0+\theta_1\mu+\mu^3-\lambda)\upsilon^2 - 3\mu\upsilon_x^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \upsilon(x^j,y)\upsilon(x,y)e^{(x^j-x)\mu}\Big)\,dxdy = 0. \qquad (21)$$

Полагая в равенстве (21) $x = x^j$, получим

$$\frac{l}{2}\upsilon^2(x^j,h) - l\int\limits_0^h \sum_{j=1}^n \Big((\theta_0+\theta_1\mu+\mu^3-\lambda+\lambda_j)\upsilon^2(x^j,y) - 3\mu\upsilon_x^2(x^j,y)\Big)dy = 0. \qquad (22)$$

Выберем λ и μ так, чтобы $\mu < 0$, $\theta_0+\theta_1\mu+\mu^3-\lambda+\lambda_j < 0$.

При таком выборе λ и μ левая часть равенства (22) становится строго положительной, что невозможно, если $\upsilon(x^j,y) \neq 0$. Следовательно, $\upsilon(x^j,y) = 0$. Учитывая это в равенстве (21), будем иметь, что $\upsilon(x,y) \equiv 0$ для любого $(x,y) \in \overline{\Omega}_1$ и, согласно (19), $u(x,y) \equiv 0$ для любого $(x,y) \in \overline{\Omega}_1$. В области Ω_2 однородная задача Дарбу $u(x,0) = 0$, $u(x,-x) = 0$ для уравнения $L_0u = 0$ имеет только тривиальное решение $u(x,y) \equiv 0$ для любого $(x,y) \in \overline{\Omega}_2$. Следовательно, $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Существование решения задачи (3), $u(x,0) = \tau(x)$ доказывается опираясь на методы используемые в работах [4–6]. В области Ω_2 решение задачи 1 можно найти как решение задачи Дарбу.

Случай II. Пусть $s = 0$, коэффициенты уравнения (1) при $y > 0$ такие, как и для случая I. При $y < 0$ положим $m = 0$, $b_0(x,y) = \lambda_0 = \mathrm{const}$, $b_i(x,y) = 0$, $i = 1,\dots,n$, $d(x,y) = 0$.

Решение задачи 1 в области Ω_2 ищется в виде [7, 8]

$$u(x,y) = F(x+y) + \Phi(x-y) + \frac{\lambda_0}{4}\int\limits_0^{x+y} d\xi \int\limits_0^{x-y} \tau\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)d\eta, \qquad (23)$$

где $F(t)$ и $\Phi(z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции и подлежат определению. Учитывая условие (4), из (23) находим $\Phi(x) = \psi(\frac{x}{2}) - F(0)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, после чего равенство (23) примет вид

$$u(x,y) = F(x+y) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) + F(0) + \frac{\lambda_0}{4}\int\limits_0^{x+y} d\xi \int\limits_l^{x-y} \tau\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)d\eta. \qquad (24)$$

Из равенства (24) найдем $u_x - u_y$, а затем в полученном равенстве перейдем к пределу при $y \to 0-$, после чего получим интегро-дифференциальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на линию $y = 0$ из гиперболической части Ω_2

$$\nu(x) - \tau'(x) = -\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\lambda_0}{4}\int\limits_0^x \tau\left(\frac{\xi+x}{2}\right)d\xi. \qquad (25)$$

Исключая $\nu(x)$ из уравнений (7) и (25) и учитывая (24), получим задачу для нагруженного интегро-дифференциального уравнения с интегральным оператором типа Вольтерра

$$\tau'''(x) + (\theta_1 - 1)\tau'(x) + \theta_0\tau(x) = \rho(x), \tag{26}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(l) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) - \tau'(l) = \varphi_3(0), \tag{27}$$

где

$$\rho(x) = -\psi'\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\lambda_0}{4}\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} \tau(\xi)\, d\xi - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tau(x^j). \tag{28}$$

Поступая аналогично предыдущему случаю, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau(x)$

$$\tau(x) + \frac{\lambda_0}{(4k-k_1)^2}\int\limits_0^x \overline{G}(x,t)\tau(t)\, dt = f(x), \tag{29}$$

где

$$f(x) = \gamma_1 e^{k_1 x} + (\gamma_2 + \gamma_3 x)e^{kx} - (k-k_1)^{-2}\int\limits_0^x R(x,t)\psi'\left(\frac{t}{2}\right) dt - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tau(x^j)\int_0^x R(x,t)\, dt,$$

$$R(x,t) = e^{(x-t)k_1} + \big((k-k_1)(t+1) - 1\big)e^{(x-t)k},$$

$$\overline{G}(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{\xi}^{2\xi} R(x,t) = \, dt & \text{при } 0 < \xi < x/2, \\ \int\limits_{\xi}^{x} R(x,t)\, dt & \text{при } x/2 < \xi < x. \end{cases}$$

Легко заметить, что ядро $\overline{G}(x,t)$ интегрального уравнения (29) непрерывно во всякой точке (x,t) треугольника $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant x$, а его правая часть $f(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$.

Обращая (29), находим

$$\tau(x) = \gamma_1 h_1(x) + \gamma_2 h_2(x) + \gamma_3 h_3(x) + g(x), \tag{30}$$

где

$$h_1(x) = e^{k_1 x} + \int\limits_0^x F(x,t)e^{k_1 l}\, dt, \quad h_2(x) = e^{kx} + \int\limits_0^x \Gamma(x,t)e^{kt}\, dt,$$

$$h_3(x) = xe^{kx} + \int\limits_0^x \Gamma(x,t)te^{kt}\, dt,$$

$$g(x) = -\int\limits_0^x \Big((k-k_1)^2 R(x,t) + M(x,t)\Big)\psi^{'}(t/2)\, dt - \left(\int\limits_0^x R(x,t)\, dt + x\int\limits_t^x \Gamma(x,\xi)R(\xi,t)\, d\xi\right)\omega_j,$$

$$M(x,t) = -(k-k_1)^{-2}\int\limits_t^x \Gamma(x,\xi)\, R(\xi,t)\, d\xi,$$

$\Gamma(x,t)$ — резольвента ядра $\lambda_0\overline{G}(x,t)/[4(k-k_1)]^2$.

Удовлетворяя (30) граничным условиям (27), получим систему алгебраических уравнений относительно γ_j, $j=1,\dots,3$, с определителем

$$\Delta=(h_2(l)-h_1(l))(h_3^{'}(0)-h_3^{'}(l))+h_3(l)[(h_1^{'}(0)-h_2^{'}(0))+(h_2^{'}(l)-h_1^{'}(l))].$$

Решая полученную систему, находим

$$\gamma_1=\Delta_1/\Delta,\quad \gamma_2=\Delta_2/\Delta,\quad \gamma_3=\Delta_3/\Delta,$$

где

$$\Delta_1=\Big((1-h_3^{'}(l))h_2(l)-(h_2^{'}(0)-h_2^{'}(l))h_3(l)\Big)\varphi_1(0)-(1-h_3^{'}(l))\widetilde{\varphi}_2(0)+h_3(l)\widetilde{\varphi}_3(0),\quad (31)$$

$$\Delta_2=\Big((h_1^{'}(0)-h_1^{'}(l))h_3(l)-(1-h_3^{'}(l))h_1(l)\Big)\varphi_1(0)-(1-h_3^{'}(l))\widetilde{\varphi}_2(0)-h_3(l)\widetilde{\varphi}_3(0),\quad (32)$$

$$\begin{aligned}\Delta_3=\Big((h_2^{'}(0)-h_2^{'}(l))h_1(l)-(h_1^{'}(0)-h_1^{'}(l))h_2(l)\Big)\varphi_1(0)&\\ -(h_2^{'}(0)-h_2^{'}(l)+h_1^{'}(0)-h_1^{'}(l))\widetilde{\varphi}_2(0)+(h_2(l)-h_1(l))\widetilde{\varphi}_3(0),&\quad (33)\end{aligned}$$

если $\Delta\neq 0$, $\widetilde{\varphi}_2(0)=\varphi_2(0)-g(l)$, $\widetilde{\varphi}_3(0)=\varphi_3(0)+g^{'}(l)$.

Учитывая (31)–(33) в (30), будем иметь

$$\tau(x)+F(x)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tau(x^j)=\Phi(x),\quad (34)$$

$$F(x)=\int\limits_0^x R(x,t)dt+x\int\limits_t^x\Gamma(x,\xi)R(\xi,t)d\xi,$$

$$\begin{aligned}\Phi(x)=\Delta^{-1}(\Delta_1\times h_1(x)+\Delta_2h_2(x)+\Delta_3h_3(x))&\\ -(k-k_1)^{-2}\int\limits_0^x\psi^{'}(t/2)R(x,t)\,dt-\int\limits_0^x M(x,t)\psi^{'}(t/2)\,dt.&\end{aligned}$$

Полагая в равенстве (34) поочередно $x=x^1, x=x^2,\dots,x=x^n$, получим систему алгебраических уравнений относительно $\tau(x^j)$. Решая эту систему, окончательно находим

$$\tau(x)=\Phi(x)-F(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\Delta_n}\,(\Phi_j\lambda_i-\lambda_j\Phi_i),$$

если определитель системы $\Delta=1+\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\Phi_j\neq 0$.

Доказательство существования и единственности исходной задачи 1 проводится аналогично случаю I.

Случай III. Пусть $s>0$. Условия на коэффициенты и правую часть уравнения (1) при $y>0$ совпадают со случаем I, а при $y<0$, $b_0(x,y)=0$, $m\neq 0$, коэффициенты $b_i(x,y)$, $i=1,\dots,n$, и правая часть $d(x,y)$ принадлежат классу $C^1(\overline{\Omega}_2)\cap C^3(\Omega_2)$.

Решение $u(x,y)$ задачи Дарбу $u_y(x,0)=\nu(x)$, $u(x,-x)=\psi(x)$ для интегро-дифференциального уравнения (1) при $y<0$ определяется как решение следующего уравнения [8]

$$u(x,y)-\int\limits_0^x d\xi\int\limits_\xi^y \frac{A_i(\xi,\eta)D_{0\xi}^{\rho_i}\tau}{(\eta-\xi)^{4\beta}}\,H(\xi,\eta,x,y)\,d\eta=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\gamma$$
$$\times\int\limits_0^x \nu(\xi)(x-\xi)^{-\beta}(y-\xi)^{-\beta}d\xi+\int\limits_0^y\left(\psi'(\eta)+\frac{\beta\psi(\eta)}{\eta}\right)H(0,\eta,x,y)\,d\eta$$
$$+\int\limits_0^x d\xi\int\limits_\xi^y -\frac{d(\xi,\eta)}{(\eta-\xi)^{4\beta}}\,H(\xi,\eta,x,y)\,d\eta,\quad (35)$$

где $\beta=m/(2m+4)$, A_i выражаются через известные функции $b_i(x,y)$ и $d(x,y)$ соответственно,

$$H(\xi,\eta,x,y)=\begin{cases}R(\xi,\eta,x,y), & \eta\geqslant x,\\ \bar{R}(\xi,\eta,x,y), & \eta\leqslant x,\end{cases}$$

функция Грина — Адамара задачи Дарбу для оператора

$$E_u=u_{\xi\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\,(u_\xi-u_\eta),$$

причем

$$R(\xi,\eta,x,y)=(\eta-\xi)^{\beta}(y-x)^{-\beta}F(\beta,1-\beta,1;\sigma),$$
$$\bar{R}(\xi,\eta,x,y)=\gamma(\eta-\xi)^{2\beta}(x-\xi)^{-\beta}(y-\eta)^{-\beta}F\left(\beta,\beta,2\beta;\frac{1}{\sigma}\right),$$
$$\sigma=[(x-\xi)(y-\eta)]/[(\eta-\xi)(y-x)],\quad \gamma=\Gamma(\beta)/[\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)].$$

Переходя в (35) к пределу при $(x,y)\to(x,x)$, $0<x<l$, получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в виде

$$\int\limits_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{2\beta}}=\frac{1}{\varkappa_1}\tau(x)+\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\int\limits_0^x T_i(x,t)\tau(t)\,dt-q(x)=\Phi_1(x),\quad (35')$$

где

$$\varkappa_0=\gamma/\Gamma(1-\rho_i),\quad 2\varkappa_1=\gamma/\left[4/(m+2)\right]^{2\beta},\quad \gamma=\Gamma(\beta)/\left[\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)\right],$$
$$T_i(x,t)=\int\limits_0^1 \frac{A_i(\xi,\xi+(x-\xi)t)\,dt}{t^{2\beta}(1-t)^{\beta}},$$
$$q(x)=\frac{\gamma}{\varkappa_1}\,x^{-\beta}\int\limits_0^x\Big(\psi'(\eta)+\beta\psi(\eta)/\eta\Big)\eta^{2\beta}(x-\eta)^{-\beta}\,d\eta+\gamma\int\limits_0^x\frac{d\xi}{(x-\xi)^{\beta}}\int\limits_\xi^x\frac{d(\xi,\eta)\,d\eta}{(\eta-\xi)^{2\beta}(x-\eta)^{\beta}}.$$

Очевидно, что $q(x)\in C(\bar{I})\cap C^2(I)$. Пусть $\tau(0)=\psi(0)=0$, тогда $\Phi(0)=0$. Обращая (35) как интегральное уравнение Абеля относительно $\nu(x)$, получим

$$\nu(x)=\frac{\pi}{\sin 2\beta\pi}\int\limits_0^x\frac{\Phi'(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\beta}}.\quad (36)$$

Подставляя (36) в (5), с учетом граничных условий (3), получим задачу

$$\tau'''(x) + \theta_1\tau'(x) + \theta_0\tau(x) = \widetilde{\Phi}_1(x), \tag{37}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(l) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) - \tau'(l) = \varphi_3(0), \tag{38}$$

где

$$\widetilde{\Phi}_1(x) = \frac{\pi}{\sin 2\beta\pi} \int\limits_0^x \frac{\Phi_1'(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\beta}} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \tau(x^j).$$

Полагая $\tau(x) = z(x) + ax^2 + bx + c$, учитывая граничные условия (38), получим задачу с однородными граничными условиями относительно $z(x)$

$$z'''(x) + \theta_1 z'(x) + \theta_0 z(x) = \widetilde{\Phi}_1(x) + F(x), \tag{39}$$

$$z(0) = 0, \quad z(l) = 0, \quad z'(0) - z'(l) = 0, \tag{40}$$

где

$$F(x) = \frac{\theta_0\varphi_3(0)}{2l}\,x^2 - \left(\frac{l\theta_1\varphi_3(0) + \theta_0\big(2\varphi_2(0) - 2\varphi_1(0) + l\varphi_3(0)\big)}{2l}\right)x$$
$$+ \frac{\theta_1}{l}\,(2\varphi_2(0) - 2\varphi_1(0) + l\varphi_3(0)) + \theta_0\varphi_1(0).$$

Решение задачи (39), (40) имеет вид

$$z(x) = \int\limits_0^l G(x,t)\left(\widetilde{\Phi}_1(x) + F(t)\right)dt, \tag{41}$$

где $G(x,y)$ — функция Грина однородной задачи (39), (40) и имеет вид

$$G(x,t) = \begin{cases} a_1 e^{\alpha_0 x} + a_2 e^{-\alpha_0 x/2}\cos\gamma_0 x + a_3 e^{-\alpha_0 x/2}\sin\gamma_0 x & \text{при } 0 \leqslant x < t, \\ b_1 e^{\alpha_0 x} + b_2 e^{-\alpha_0 x/2}\cos\gamma_0 x + b_3 e{-}\alpha_0 x/2\sin\gamma_0 x & \text{при } t < x \leqslant l, \end{cases}$$

где α_0 и γ_0 выражаются через коэффициенты θ_0 и θ_1 уравнения (39) [3]:

$$a_1 = \Delta_0^{-1}\bigg(\left(\frac{3}{2}\,\alpha_0\gamma_0\sin\gamma_0(l-\xi) + \gamma_0^2\cos\gamma_0(\xi - l)\right)e^{\alpha_0(\xi-l)/2}$$
$$+ \gamma_0^2 e^{\alpha_0(\xi-2l)/2}\cos\gamma_0(\xi - 2l) + \frac{3}{2}\,\alpha_0\gamma_0\sin\gamma_0\xi e^{\alpha_0(\xi-2l)/2}$$
$$- \frac{3}{2}\,\alpha_0\gamma_0\sin\gamma_0 l e^{\alpha_0(l+2\xi)/2} - \gamma_0^2\cos\gamma_0 l e^{\alpha_0(l+2\xi)/2} - \gamma_0^2 e^{\alpha_0(l+\xi)}\bigg),$$

$$a_2 = -a_1,$$

$$a_3 = \Delta_0^{-1}\left(\frac{3}{2}\,\alpha_0^2\sin\gamma_0(\xi - l)\cos\gamma_0 l + \gamma_0^2\sin\gamma_0(\xi - 2l) + \frac{3}{2}\,\alpha_0\gamma_0\cos\gamma_0(\xi - 2l)\right)e^{\alpha_0(\xi-2l)/2}$$
$$- \frac{3}{2}\,\alpha_0\gamma_0\cos\gamma_0 l e^{\alpha_0(\xi+2l)/2} + \left(\frac{3}{4}\,\alpha_0^2 - \gamma_0^2\right)\sin\gamma_0(\xi - l)e^{\alpha_0(\xi+l)/2} + \frac{3}{2}\,\alpha_0\gamma_0 e^{\alpha_0(\xi+l)}$$
$$- \frac{3}{2}\,\alpha_0\left[\frac{3}{2}\,\alpha_0\sin\gamma_0(\xi - l) + \gamma_0\cos\gamma_0(\xi - l)\right]e^{\alpha_0(\xi-l)/2} - \gamma_0^2\sin\gamma_0 l e^{\alpha_0(2\xi+l)/2},$$

$$b_1 = \Big(\gamma_0 e^{\alpha_0 \xi}\Big) \Big/ W + a_1, \qquad b_2 = \left[\left(\frac{3}{2}\,\alpha_0 \sin\gamma_0\xi - \gamma_0\cos\gamma_0\xi\right) e^{\alpha_0\xi/2}\right] \Big/ W,$$

$$b_3 = a_3 - \left[\left(\frac{3}{2}\,\alpha_0 \cos\gamma_0\xi + \gamma_0 \sin\gamma_0\xi\right) \Big/ e^{\alpha_0\xi/2}\right] \Big/ W,$$

если $\Delta_0 = 2, \gamma_0 \operatorname{ch} \alpha_0 l{+}3, \alpha_0 \sin\gamma_0 l \operatorname{sh}(\alpha_0 l/2) {-} \gamma_0 \cos\gamma_0 l \operatorname{ch}(\alpha_0 l/2) \neq 0$, $W = \gamma_0\left(\frac{5}{2}\,\alpha_0^2 + \gamma_0^2\right)$ — определитель Вронского.

Подставляя в (41) значение $\widetilde{\Phi}_1(x)$, получим

$$z(x) = \int\limits_0^l G(x,t)\left(\frac{\pi}{\varkappa_1 \sin 2\beta\pi}\int\limits_0^t \frac{[z'(\xi) + M_1(t,\xi)z(\xi)]d\xi}{(t-\xi)^{1-2\beta}}\right)dt$$
$$+ \int\limits_0^l G(x,t)\widetilde{q}(t)\,dt - \sum_{j=1}^n \lambda_j \tau(x^j)\int\limits_0^1 G(x,t)\,dt + \int\limits_0^l G(x,t)F(t)\,dt,$$

где

$$M_1(x,t) = \varkappa_0 T_i(t,t) + \int\limits_t^x T_{it}(\xi,t)\,dt,$$

$$\widetilde{q}(x) = \frac{\pi}{\varkappa_1 \sin 2\beta\pi}\int\limits_0^x \frac{\left[\left(\frac{\varkappa_0}{3}\,t^3 - \varkappa_0 t^2 + t\right)a + \frac{\varkappa_0}{2}\,(t^2+t+1)b + (t-\varkappa_0+1)c - q'(t)\right]}{(x-t)^{1-2\beta}}\,dt,$$

или

$$z(x) - \bar{\lambda}\int\limits_0^l L(x,t)z(t)\,dt = r(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j\tau(x^j)\int\limits_0^l G(x,t)\,dt, \tag{42}$$

где

$$L(x,t) = \frac{d}{dt}\int\limits_t^l \frac{G(x,\xi)\,d\xi}{(\xi-t)^{1-2\beta}} + \int\limits_t^l \frac{G(x,\xi)M_1(\xi,t)\,dt}{(\xi-t)^{1-2\beta}},$$

$$r(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)\widetilde{q}(t)\,dt + \int\limits_0^l G(x,t)F(t)\,dt, \quad \bar{\lambda} = \pi/[\varkappa_1 \sin 2\beta\pi].$$

Обозначая резольвенту ядра $L(x,t)$ уравнения (42) через $Q(x,t)$ и обратив его, будем иметь

$$z(x) + \sigma_1(x)\sum_{j=1}^n \lambda_j\tau(x^j) = \widetilde{r}(x), \tag{43}$$

где

$$\sigma_1(x) = \sigma_0(x) + \int\limits_0^l Q(x,t)\sigma_0(t)\,dt, \quad \sigma_0(x) = \int\limits_0^l G(x,t)\,dt,$$

$$\widetilde{r}(x) = \int\limits_0^l Q(x,t)r(t)\,dt.$$

Заменяя $z(x)$ через $\tau(x)$ из равенства (43), получим

$$\tau(x) + \sigma_1(x) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tau(x^j) = \sigma_3(x), \tag{44}$$

где $\sigma_3(x) = \widetilde{r}(x) - ax^2 + bx + c$.

Подставляя в равенство (44) поочередно $x = x^1, x = x^2, \ldots, x = x^n$, получим систему алгебраических уравнений относительно $\tau(x^j)$, которая при определенных условиях на $\sigma_1(x)$ и $\sigma_3(x)$ однозначно разрешима.

Таким образом, после того, как функция $\tau(x)$ найдена, искомое решение $u(x, y)$ задачи 1 в гиперболической части Ω_2 задается формулой (35), а в области Ω_1 приходим к задаче, рассмотренной для случая 1.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—271 с.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа.—М.: Изд-во АН СССР, 1959.—164 с.
3. *Фадеев Д. К.* Лекции по алгебре.—М.: Наука, 1984.—416 с.
4. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.—Ташкент: Фан, 1979.—238 с.
5. *Иргашев Ю.* Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // В сб.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения.—Ташкент: Фан, 1976.—С. 17–27.
6. *Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.—Ташкент: Фан, 1986.—220 с.
7. *Елеев В. А., Лайпанова А. М.* Краевая задача для смешанного нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа третьего порядка // Вестник СОГУ.—2003.—№ 2.—С. 14–22.
8. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Диф. уравнения.—1976.—Т. 12, № 1.—С. 103–108.

Статья поступила 13 апреля 2004 г.

Дзарахохов Азамат Валерианович
г. Владикавказ, Сереро-Осетинский госунивеситет
им. К. Л. Хетагурова;

Елеев Валерий Абдурахманович, д. ф.-м. н.
г. Нальчик, Кабардино-Баркарский госуниверситет
E-mail: niipma@mail333.com