Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2004, Том 6, Выпуск 4

УДК **519.6**

НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА[1]

А. В. Арутюнов

Дорогому Владимиру Михайловичу
Тихомирову с уважением и любовью

Рассматривается линейный непрерывный оператор A, действующий из одного банахова пространства в другое, образ которого не предполагается замкнутым. Построено описание образа сопряженного оператора A^*. Приведено также описание конуса сопряженного к конусу K, состоящего из тех x, для которых Ax принадлежит заданному замкнутому выпуклому конусу C.

Пусть заданы банаховы пространства X, Y и линейный непрерывный оператор $A : X \to Y$. Исследуем, как устроено подпространство $\operatorname{Im} A^*$. Здесь, как обычно, $A^* : X^* \to Y^*$ — сопряженный оператор, X^*, Y^* — пространства топологически сопряженные к X и Y соответственно, а Im — образ оператора.

Как известно (см. [1, стр. 115]), если подпространство $\operatorname{Im} A$ замкнуто, то подпространство $\operatorname{Im} A^*$ слабо* замкнуто в X^* и, следовательно (см. [1, стр. 112, 109]),

$$\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^{\perp}, \tag{1}$$

где $^{\perp}$ означает аннулятор. Если же образ оператора A не замкнут, то формула (1) уже, вообще говоря, не верна. В то же время следующее утверждение справедливо и без предположения замкнутости $\operatorname{Im} A$.

Лемма 1. *Пусть $l \in X^*$. Тогда для того, чтобы $l \in \operatorname{Im} A^*$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось: $\langle l, x_i \rangle \to 0$ для любой последовательности $\{x_i\}$, для которой $Ax_i \to 0$, $i \to \infty$.*

$\lhd$ Необходимость очевидна. Докажем достаточность.

На подпространстве $\operatorname{Im} A$ определим линейный функционал y^* следующим образом. Для каждого $y \in \operatorname{Im} A$ положим $\langle y^*, y \rangle = \langle l, x \rangle$, где x — произвольный вектор, для которого $Ax = y$. Постольку поскольку в силу предположения леммы $\langle l, x \rangle = 0$, $\forall x : Ax = 0$, то $\langle l, x_1 \rangle = \langle l, x_2 \rangle$, $\forall\, x_1, x_2 : Ax_1 = Ax_2$ и, значит, функционал y^* на $\operatorname{Im} A$ определен корректно. Линейность его очевидна.

Докажем, что функционал y^* непрерывен на $\operatorname{Im} A$. Действительно, пусть $y_i \in \operatorname{Im} A$, $y_i \to 0$, $i \to \infty$. Возьмем $x_i : Ax_i = y_i$. Тогда $\langle y^*, y_i \rangle = \langle l, x_i \rangle$. Но $Ax_i = y_i \to 0$, откуда в силу предположения леммы $\langle l, x_i \rangle \to 0 \Rightarrow \langle y^*, y_i \rangle \to 0$, $i \to \infty$, что доказывает непрерывность y^* на $\operatorname{Im} A$. А непрерывный на нормированном пространстве $\operatorname{Im} A$ линейный функционал y^* ограничен на нем и, следовательно, по теореме Хана — Банаха

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 02-01-00334 и гранта президента РФ по поддержке ведущих научных школ, № НШ-1889.2003.1.

он продолжим до некоторого непрерывного функционала $y^* \in Y^*$. При этом $l = A^*y^*$. Это вытекает из того, что для произвольного $x \in X$ имеет место $\langle y^*, Ax\rangle = \langle l, x\rangle \Rightarrow \langle A^*y^*, x\rangle = \langle l, x\rangle$. $\triangleright$

Замечание. Полнота пространств X и Y при доказательстве леммы 1 не использовалась и, следовательно, она верна для произвольных нормированных пространств X, Y.

Изучим, теперь, следующий вопрос. Пусть в пространстве Y задан заостренный конус C (т. е. $\lambda C = C$ для каждого $\lambda > 0$ и $0 \in C$). Рассмотрим конус

$$K = \{x \in X : \; Ax \in C\}.$$

Спрашивается, как вычислить конус K^*, являющийся сопряженным к K, и который, как известно (см. [2]), определяется по формуле

$$K^* = \{x^* \in X^* : \; \langle x^*, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, x \in K\}.$$

Описание сопряженного конуса K^* при дополнительных предположениях на A и K дает теорема Фаркаша. А именно, пусть конус C выпуклый и замкнутый, а конус A^*C^* слабо* замкнут. Тогда имеет место (см. [2, стр. 65, 66])

$$K^* = A^*C^*. \tag{2}$$

При этом конус A^*C^* слабо* замкнут, если выполнено хотя бы одно из двух предположений:

а) найдется $\bar{x} \in X$ такое, что $A\bar{x} \in \operatorname{int} C$.

б) пространства X, Y конечномерны, а конус C — конечнопорожденный, т. е. является выпуклой оболочкой конечного числа лучей или, что то же самое, C есть пересечение конечного числа полупространств.

Если конус A^*C^* слабо* замкнутым не является (а это может быть, даже если пространства X, Y конечномерны, но конус C — не является конечногранным), то формула (2) уже, вообще говоря, не верна. В этом случае известно лишь, что $A^*C^* \subseteq K^*$, причем в силу теоремы 3.6 из [2] конус A^*C^* слабо* всюду плотен в K^*.

Приведем описание сопряженного конуса K^* в предположении, что подпространство $\operatorname{Im} A$ замкнуто.

Лемма 2. *Предположим, что подпространство* $\operatorname{Im} A$ *замкнуто. Тогда*

$$K^* = A^*(C \cap \operatorname{Im} A)^*. \tag{3}$$

Если же, кроме того, конус C является выпуклым и замкнутым, то

$$K^* = A^* \operatorname{cl}(C^* + \ker A^*), \tag{4}$$

где cl *обозначает слабое* замыкание.*

$\triangleleft$ Возьмем произвольный $l \in K^*$. Тогда $l \in (\ker A)^\perp$, откуда, учитывая замкнутость подпространства $\operatorname{Im} A$, в силу (1) получаем существование такого $y^* \in Y^*$, что

$$l = A^*y^*.$$

Покажем, что

$$y^* \in (C \cap \operatorname{Im} A)^*. \tag{5}$$

Действительно, пусть $y \in C \cap \operatorname{Im} A$. Тогда $\exists x \in X : Ax = y$, $Ax \in C \Rightarrow \langle y^*, y\rangle = \langle y^*, Ax\rangle = \langle A^* y^*, x\rangle = \langle l, x\rangle \geqslant 0$, так как $x \in K$, $l \in K^*$ и, значит, $\langle y^*, y\rangle \geqslant 0$. Включение (5) доказано. В силу произвольности l вместе с этим доказано и включение $K^* \subseteq A^*(C \cap \operatorname{Im} A)^*$. Обратное включение очевидно. Формула (3) доказана.

Далее, если конус C является выпуклым и замкнутым, то, как известно (см. [2, стр. 35]), $(C \cap \operatorname{Im} A)^* = \operatorname{cl}(C^* + (\operatorname{Im} A)^*) = \operatorname{cl}(C^* + \ker A^*)$, что доказывает (4). При этом использовано, что $(\operatorname{Im} A)^* = (\operatorname{Im} A)^\perp = \ker A^*$ (см. [1, стр. 112]). $\triangleright$

Отметим, что если алгебраическая сумма конуса C^* и подпространства $\ker A^*$ слабо* замкнута (а так будет если, например, пространства X, Y конечномерны и конус C конечнопорожденный, или, если $\operatorname{Im} A = Y$ и, значит, $\ker A^* = \{0\}$), то (4), очевидно, принимает вид (2).

Следующее утверждение уже справедливо без априорного предположения замкнутости подпространства $\operatorname{Im} A$.

Теорема. *Пусть $l \in X^*$, а конус C является выпуклым и замкнутым. Предположим, что для любой последовательности $\{x_i\}$, для которой $Ax_i \to C$, имеет место*

$$\varliminf_{i\to\infty} \langle l, x_i\rangle \geqslant 0.$$

Тогда

$$l \in A^* \operatorname{cl}(C^* + \ker A^*). \tag{6}$$

$\triangleleft$ Из предположения теоремы вытекает, что $\langle l, x_i\rangle \to 0$ для любой последовательности $\{x_i\}$, для которой $Ax_i \to 0$, $i \to \infty$. Следовательно, в силу леммы 1 существует такое $y^* \in Y^*$, что $l = A^* y^*$. Кроме того, в силу предположения теоремы $l \in K^*$. Поэтому, дословно повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 2, получаем (5), откуда с помощью формулы $(C \cap \operatorname{Im} A)^* = \operatorname{cl}(C^* + \ker A^*)$ получаем (6). $\triangleright$

Отметим, что если предположения о полноте нормированных пространств X, Y и замкнутости конуса C опустить, то в предположении теоремы имеет место

$$l \in A^*(C \cap \operatorname{Im} A)^*.$$

Я искренне благодарен профессору А. А. Шананину за плодотворные обсуждения результатов работы.

Литература

1. *Рудин У.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.—443 с.
2. *Гирсанов И. В.* Лекции по теории экстремальных задач.—М.: Изд-во МГУ, 1970.—117 с.

Статья поступила 9 ноября 2004 г.

Арутюнов Арам Владимирович, д. ф.-м. н.
г. Москва, Российский университет дружбы народов
E-mail: arutun@orc.ru