Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2005, Том 7, Выпуск 2

УДК **517.983**

ОПИСАНИЕ ОБРАЗА ОДНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ЯДРОМ

М. А. Бетилгириев, Д. Н. Карасев, В. А. Ногин

Посвящается академику С. М. Никольскому

В работе рассматриваются операторы типа потенциала с ядрами $k_m^\alpha(t) = Y_m(t')e^{i|t|}|t|^{\alpha-n}$, $0 < \operatorname{Re}\alpha < n/2$. Получены $(L_p - L_q)$-оценки для оператора K_m^α. Методом аппроксимативных обратных операторов построено обращение потенциалов $(K_m^\alpha\varphi)(x) = (k_m^\alpha{*}\varphi)(x)$ с L_p-плотностями. В терминах обращающих конструкций дано описание образа $K_m^\alpha(L_p)$.

1. Введение

Рассматриваются операторы типа потенциала

$$(K_m^\alpha\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{Y_m(t')e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}}\,\varphi(x-t)\,dt, \quad t' = \frac{t}{|t|}, \tag{1.1}$$

где $0 < \operatorname{Re}\alpha < n/2$, $Y_m(t')$ — неэллиптическая сферическая гармоника m-го порядка.

Получены $(L_p - L_q)$-оценки для оператора K_m^α. Методом аппроксимативных операторов (АОО) построено обращение потенциалов (1.1) с L_p-плотностями и дано описание образа $K_m^\alpha(L_p)$ в терминах обращающих конструкций. Это описание, содержащееся в теореме 2.2, является основным результатом статьи.

Заметим, что рассматриваемый случай является неэллиптическим: в нем символ оператора (1.1) вырождается на конусе нулей однородного многочлена $Y_m(t)$.

В настоящее время имеется ряд работ по обращению операторов типа потенциала в неэллиптическом случае в рамках L_p-пространств (см. книгу [19], обзорные статьи [16–18] и имеющуюся там библиографию). Однако описать образы таких потенциалов удавалось редко и, как правило, для операторов специального вида. Для операторов вида (1.1) до сих пор оставался открытым даже случай $m = 1$ (хотя, обращение этих операторов было построено в [5]). Возникающие здесь трудности принципиального характера связаны с вопросом о плотности в L_p пространства Φ_V типа Лизоркина, построенного по множеству нулей символа рассматриваемого оператора (см. замечание 4.1).

Эти трудности удалось преодолеть при $0 < \operatorname{Re}\alpha < n/2$, используя $(L_p - L_q)$-оценки для оператора K_m^α, полученные в теореме 2.1. Заметим, что аналогичный подход использовался в [12] в случае радиальных характеристик, т. е. характеристик принципиально иной природы.

Отметим также, что при доказательстве теоремы 2.1 мы получаем представляющие самостоятельный интерес $(L_p - L_q)$-оценки для операторов Бохнера — Рисса B^γ комплексного порядка γ, $\operatorname{Re}\gamma \geqslant 0$, играющих важную роль в различных вопросах анализа. Эти оценки содержатся в теореме 3.1. Ранее утверждение этой теоремы было известно в случае $\operatorname{Im}\gamma = 0$ (см. замечание 3.1).

2. Основные результаты

2.1. $(L_p - L_q)$**-оценки для оператора** K_m^α. Через $(A, B, \dots, K)$ будем обозначать открытый многоугольник с вершинами в точках $A, B, \dots, K$; $[A, B, \dots, K]$ — его замыкание; $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ — $\mathcal{L}$-характеристика оператора $\mathcal{A}$, т. е. множество всех пар $(1/p, 1/q)$ для которых оператор $\mathcal{A}$ из L_p в L_q ограничен.

Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < n/2$. Рассмотрим следующие точки на $(1/p, 1/q)$-плоскости:

$$A = \left(1, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \qquad A' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 0\right),$$
$$C = \left(\frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}, \frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}\right), \qquad C' = \left(\frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}, \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}\right),$$
$$G = \left(1 - \frac{(n-\operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \qquad G' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n-\operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}\right),$$
$$H = \left(1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \qquad H' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right),$$
$$K = \left(\frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad K' = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1}\right),$$
$$E = (1, 0), \quad F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad O = (1, 1), \quad O' = (0, 0).$$

Нам понадобятся следующие множества (см. рисунки 1 и 2):

$$L_1(\alpha, n) = \begin{cases} [A', H', H, A, E] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), & 0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}, \\ (A', G', C', C, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (C', C), & \frac{n(n-1)}{2(n+1)} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup \{F\}, & \operatorname{Re}\alpha = \frac{n-1}{2},\ \operatorname{Im}\alpha \neq 0, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \alpha = \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', K', K, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup [K', K], & \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n}{2}, \end{cases}$$

$$L_2(\alpha, n) = [O, A, A', O'] \setminus (\{A'\} \cup \{A\}).$$

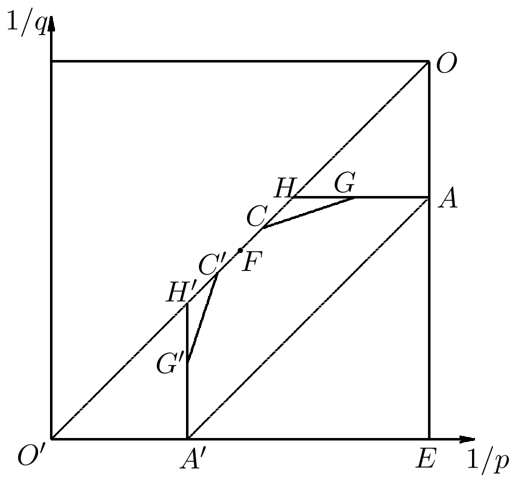

Рис. 1.

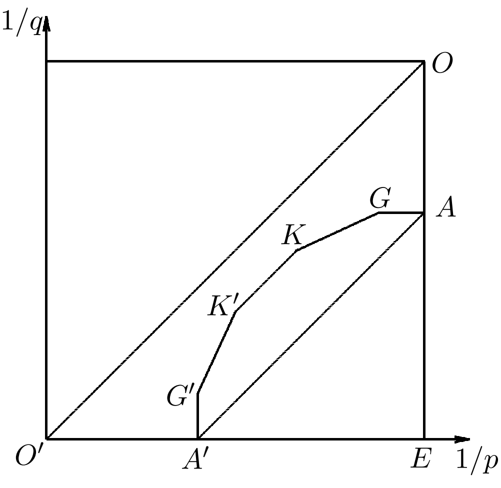

Рис. 2.

Следующая теорема описывает выпуклые множества $(1/p, 1/q)$-плоскости, для точек которых оператор K_m^α ограничен из L_p в L_q (см. рисунки 1 и 2).

Теорема 2.1. *Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < n/2$. Тогда справедливо вложение*

$$\mathcal{L}(K_m^\alpha) \supset L_1(\alpha, n) \cap L_2(\alpha, n).$$

Замечание 2.1.Заметим, что для $(n-1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$ (за исключением некоторых значений α) оценки для оператора K_m^α, а также для более общего оператора вида (1.1) с произвольной однородной характеристикой $\theta(t')$ (вместо $Y_m(t')$), гладкой в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, были получены в [8] с помощью другого метода, который не работает в случае $\operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n-1}{2}$. Результат, содержащийся в теореме 2.1 при $(n-1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n/2$ (см. рисунок 2), совпадает с полученным в [8].

2.2. Описание образа $K_m^\alpha(L_p)$. Пусть $\widehat{k_m^\alpha}(\xi)$ — символ оператора K_m^α (см. п. 3.4). Введем оператор

$$H^\alpha f = \overset{(L_{p,\mu})}{\lim_{\varepsilon\to 0}} \overset{(L_2)}{\lim_{\delta\to 0}} h_{\varepsilon,\delta}^\alpha * f, \qquad \mu < -\frac{(n-1)p}{2}, \tag{2.1}$$

где

$$h_{\varepsilon,\delta}^\alpha(t) = F^{-1}\left(\frac{\overline{\widehat{k_m^\alpha}(\xi)}(|\xi|^2-1)^\ell e^{-\varepsilon|\xi|^2}}{(|\widehat{k_m^\alpha}(\xi)|^2 + i\delta)(|\xi|^2 + (\varepsilon+i)^2)^\ell}\right)(t), \tag{2.2}$$

$$\ell > \operatorname{Re}\alpha\,(2[n/2]+1) + [n/2](3-n) + 3 - (n-1)/2,$$

$$L_{p,\mu} = \left\{ f(x) : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p (1+|x|)^\mu dx < \infty \right\}.$$

Следующая теорема дает описание образа $K_m^\alpha(L_p)$ в терминах оператора H^α, являющегося левым обратным к потенциалу K_m^α.

Теорема 2.2. *Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < n/2$, $\alpha \neq (n-1)/2, (n-3)/2, \ldots$ Предположим, что $2(\operatorname{Re}\alpha + 1)/(n+1) - 1/2 \leqslant 1/p < 1$ при $(n-1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n/2$ и $1/2 \leqslant 1/p < 1$ при $0 < \operatorname{Re}\alpha < (n-1)/2$. Тогда*

$$K_m^\alpha(L_p) = \{f \in L_q : H^\alpha f \in L_p\},$$

где H^α — оператор (2.1), q — произвольное число такое, что $1 < q \leqslant 2$ и оператор K_m^α ограничен из L_p в L_q в соответствии с теоремой 2.1.

3. Вспомогательные сведения и утверждения

3.1. Обозначения. Пусть $\langle f, \omega\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\omega(x)dx$; $W_\varepsilon\varphi$ — ядро Гаусса — Вейерштрасса; $\mathcal{R}_0 = \{\varphi : \varphi = Ff, f \in L_1\}$ — винеровское кольцо функций; L_p^q — класс ядер $k \in \mathcal{S}'$ таких, что $\|k * f\|_q \leqslant C\|f\|_p$, где $f \in \mathcal{S}$, константа $C > 0$ не зависит от f; $M_p^q = F(L_p^q)$ — класс $(p-q)$-мультипликаторов. Классы L_p^q и M_p^q были введены Л. Хёрмандером в [10].

Пусть далее V — произвольное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\Psi_V = \{\psi \in S : (D^\nu\psi)(\xi) = 0,\ \xi \in V,\ |\nu| = 0, 1, \ldots\}$, $\Phi_V = \{\varphi \in S : \hat{\varphi} \in \Psi_V\}$. Пространства Φ_V и Ψ_V были введены и изучены С. Г. Самко в [6, 7], см. также книгу [19]). В случае, когда V — совокупность всех координатных гиперплоскостей, указанное пространство изучалось П. И. Лизоркиным (см. [3]).

Пусть функции $\omega(r), \varkappa(r), \chi(r) \in C^\infty(0,\infty)$ таковы, что $0 \leqslant \omega(r), \varkappa(r),\ \chi(r) \leqslant 1$, $\omega(r^2) = 1$, если $r| \leqslant 1 - \delta/2$, $\omega(r^2) = 0$, если $r \geqslant 1 - \delta/4$; $\varkappa(r) = 1$, если $|1-r| \leqslant \delta/4$, $\varkappa(r) = 0$, если $|1-r| \geqslant \delta/2$; $\chi(r) = 1$, если $r \geqslant 1 + \delta/2$, $\chi(r) = 0$, если $r \leqslant 1 + \delta/4$.

Выбором δ $(0 < \delta < 1/2)$ мы распорядимся при доказательстве леммы 3.1. Предположим также, что

$$\omega(r^2) + \varkappa(r) + \chi(r) \equiv 1.$$

3.2. Об одном $(p-q)$-мультипликаторе. Обозначим

$$b_\alpha(|\xi|) = \varkappa(|\xi|) A_{\alpha - \frac{n-1}{2}} (1 - |\xi| + i0)^{\frac{n-1}{2} - \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \ldots, \tag{3.1}$$

$A_\lambda = (2\pi)^{-n} e^{-\frac{i\pi}{2}(\lambda+1)} \Gamma(\lambda+1)$. При доказательстве теоремы 2.1 существенно используется следующая

Лемма 3.1. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < n/2$, $\alpha \neq (n-1)/2, (n-3)/2, \ldots$ *Тогда*

$$b_\alpha(|\xi|) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in L_1(\alpha, n). \tag{3.2}$$

$\lhd$ В статьях [12–14] показано, что ядро $s_\alpha(t) = \chi(|t|)|t|^{\alpha - n} e^{i|t|}$ принадлежит L_p^q, если $(1/p, 1/q) \in L_1(\alpha, n)$, следовательно, $\widehat{s_\alpha}(\xi) \in M_p^q$ для указанных p и q. Кроме того, в [11] и [12] было получено следующее представление для $\widehat{s_\alpha}(\xi)$ в окрестности единичной сферы:

$$\varkappa(|\xi|)\widehat{s_\alpha}(\xi) = b_\alpha(|\xi|)P(|\xi|) + \varkappa(|\xi|)u_\alpha(\xi), \tag{3.3}$$

где $P(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, для которой $P(1) \neq 0$, $\varkappa(|\xi|)u_\alpha(\xi) \in M_p^q$, если $(1/p, 1/q) \in [O', O, E]$. Выберем δ, участвующее в определении функций $\omega, \varkappa, \chi$ (см. п. 3.1) так, чтобы нули функции $P(|\xi|)$ не принадлежали $\operatorname{supp} \varkappa(|\xi|)$. Тогда разделив (3.3) на $P(|\xi|)$, из полученного равенства имеем (3.2). $\rhd$

3.3. Оценки для оператора Бохнера — Рисса комплексного порядка с неотрицательной вещественной частью. Указанный в заголовке оператор определяется в образах Фурье равенством

$$\widehat{B^\gamma \varphi}(\xi) = \frac{2^{-\gamma}(2\pi)^{-n/2}}{\Gamma(1+\gamma)} (1 - |\xi|^2)_+^\gamma \hat{\varphi}(\xi), \quad \operatorname{Re}\gamma \geqslant 0$$

(см. [20, гл. 9, § 2]). Для него справедливо интегральное представление

$$(B^\gamma \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{-\gamma - \frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}+\gamma}(|y|) \varphi(x - y) dy, \tag{3.4}$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя порядка ν.

Следующая теорема содержит $(L_p - L_q)$-оценки для оператора (3.4).

Теорема 3.1. *Пусть* $0 \leqslant \operatorname{Re}\gamma < (n-1)/2$. *Тогда справедливо вложение*

$$\mathcal{L}(B^\gamma) \supset L_1\left(-\gamma + \frac{n-1}{2}, n\right). \tag{3.5}$$

$\lhd$ Представив $J_{\frac{n}{2}+\gamma}(z)$ в виде линейной комбинации функций Ханкеля

$$J_{\frac{n}{2}+\gamma}(z) = \frac{1}{2}\left(H^{(1)}_{\frac{n}{2}+\gamma}(z) + H^{(2)}_{\frac{n}{2}+\gamma}(z)\right)$$

и воспользовавшись интегральным представлением из [4, стр. 165] для $H^{(1)}_\nu(z)$ и $H^{(2)}_\nu(z)$, оператор (3.4) запишем в виде

$$(B^\gamma \varphi)(x) = (M_+^\gamma \varphi)(x) + (M_-^\gamma \varphi)(x) + (N^\gamma \varphi)(x), \tag{3.6}$$

где

$$(M_\pm^\gamma\varphi)(x) = C_\gamma^\pm \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(|y|)|y|^{-\frac{n+1}{2}-\gamma} e^{\pm i|y|} m_\pm(|y|)\varphi(x-y)\,dy,$$

$$C_\gamma^\pm = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\pm\frac{i\pi(n+1+2\gamma)}{4}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n+1}{2}+\gamma\right),$$

$$m_\pm(|y|) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}+\gamma}\left(1 \pm \frac{it}{2|y|}\right)^{\frac{n-1}{2}+\gamma} dt;$$

$$(N^\gamma\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1-\chi(|y|))|y|^{-\frac{n}{2}-\gamma} J_{\frac{n}{2}+\gamma}(|y|)\varphi(x-y)\,dy.$$

Характеристики $m_\pm(r)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2 из [14]. Применяя эту теорему, получаем

$$\mathcal{L}(M_\pm^\gamma) \supset \mathcal{L}\left(-\gamma + \frac{n-1}{2}, n\right). \tag{3.7}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\mathcal{L}(N^\gamma) = [O', O, E]. \tag{3.8}$$

Из (3.6)–(3.8) следует (3.5).

Замечание 3.1. Отметим, что в случае вещественных $\gamma > 0$ утверждение теоремы 3.1 можно получить интерполяцией между оценками, полученными в [20] (см. утверждение на стр. 390) и замечании 2 из [9].

Замечание 3.2. Нам понадобится также результат для оператора (3.4) в случае $-1/2 < \operatorname{Re}\gamma < 0$, полученный в [14]. Именно, в [14] было доказано, что вложение (3.5) справедливо для таких γ.

3.4. Вычисление символа оператора K_m^α. Обозначим $k_{m,\varepsilon}^\alpha(x) = Y_m(x')e^{i|x|-\varepsilon|x|}|x|^{\alpha-n}$. Переходя к полярным координатам и применяя формулу Функа — Гекке (см. равенство (1.60) из [19]), получаем

$$\widehat{k_{m,\varepsilon}^\alpha}(\xi) = |S^{n-1}|Y_m(\xi') \int\limits_0^\infty \rho^{\alpha-1} e^{i\rho-\varepsilon\rho} d\rho \int\limits_{-1}^1 (1-y^2)^{\frac{n-3}{2}} P_m(y) e^{i\rho|\xi|y} dy,$$

где $P_m(y)$ — многочлен Лежандра. Применяя далее к внутреннему интегралу последовательно формулы 7.321 и 6.621 из [1], имеем

$$\widehat{k_{m,\varepsilon}^\alpha}(\xi) = C_{m,n}^\varepsilon Y_m(\xi')|\xi|^m F\left(\frac{\alpha+m}{2}, \frac{\alpha+m+1}{2}; \frac{n}{2}+m; -\frac{|\xi|^2}{(\varepsilon-i)^2}\right), \tag{3.9}$$

где

$$C_{m,n}^\varepsilon = |S^{n-1}| \frac{\pi i^m \Gamma(n-2+m)\Gamma(\alpha+m)}{m! 2^m \Gamma(\frac{n-2}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+m)(\varepsilon-i)^{\alpha+m}},$$

а $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Пусть $|\xi| < 1$. Переходя в (3.9) к пределу при $\varepsilon \to 0$, будем иметь

$$\widehat{k_m^\alpha}(\xi) = C_{m,n}^0 Y_m(\xi')|\xi|^m F\left(\frac{\alpha+m}{2}, \frac{\alpha+m+1}{2}; \frac{n}{2}+m; |\xi|^2\right). \tag{3.10}$$

Пусть $|\xi| > 1$. Применяя к гипергеометрической функции в (3.9) формулу (12) из [4, стр. 219], и переходя затем к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\begin{aligned}\widehat{k_m^\alpha}(\xi) = C^0_{m,n} Y_m(\xi') \Bigg(& \frac{\Gamma(m+n/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((\alpha+m+1)/2)\Gamma((m+n-\alpha)/2)} \\ & \times |\xi|^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha+m}{2}, \frac{\alpha-m-n+2}{2}; \frac{1}{2}; |\xi|^{-2}\right) \\ & + \frac{\Gamma(m+n/2)\Gamma(-1/2)}{\Gamma((\alpha+m)/2)\Gamma((m+n/2-(\alpha+m+1)/2)/2)} \\ & \times |\xi|^{-\alpha-1} F\left(\frac{\alpha+m+1}{2}, \frac{\alpha-m-n+3}{2}; \frac{3}{2}; |\xi|^{-2}\right)\Bigg).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Нетрудно показать, что при $0 < \operatorname{Re}\alpha < n/2$ справедлива формула для преобразования Фурье в слабом смысле:

$$(K^\alpha_m \varphi)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{k_m^\alpha}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) e^{-i(x\cdot\xi)} d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{3.12}$$

4. Доказательство основных результатов

4.1. Доказательство теоремы 2.1. Имеем

$$\widehat{k_m^\alpha}(\xi) = \omega(|\xi|^2)\widehat{k_m^\alpha}(\xi) + \varkappa(|\xi|)\widehat{k_m^\alpha}(\xi) + \chi(|\xi|)\widehat{k_m^\alpha}(\xi) \equiv \widehat{k^\alpha_{m,0}}(\xi) + \widehat{k^\alpha_{m,1}}(\xi) + \widehat{k^\alpha_{m,\infty}}(\xi). \tag{4.1}$$

Очевидно, что

$$\widehat{k^\alpha_{m,0}}(\xi) \in M^q_p, \quad (1/p, 1/q) \in [O', O, E]. \tag{4.2}$$

Кроме того, из соотношения $\chi(|\xi|)|\xi|^{-\alpha} \in M^q_p$, $(1/p, 1/q) \in L_2(\alpha, n)$, доказанного в [15], вытекает, что

$$\widehat{k^\alpha_{m,\infty}}(\xi) \in M^q_p, \quad (1/p, 1/q) \in L_2(\alpha, n). \tag{4.3}$$

Рассмотрим $\widehat{k^\alpha_{m,1}}(\xi)$. Применяя к гипергеометрическим функциям в (3.10) и (3.11) формулу (11) из [4, стр. 219], представим $\widehat{k^\alpha_{m,1}}(\xi)$ в виде

$$\widehat{k^\alpha_{m,1}}(\xi) = \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|^2)_+^{\frac{n-1}{2}-\alpha} s^\alpha_1(\xi) + b_\alpha(|\xi|) s^\alpha_2(\xi) + r^\alpha(\xi), \tag{4.4}$$

где $b_\alpha(|\xi|)$ — функция (3.1), $r^\alpha(\xi), s^\alpha_j(\xi) \in C_0^\infty$ $(j = 1, 2)$. Тогда

$$\widehat{k^\alpha_{m,1}}(\xi) \in M^q_p, \quad (1/p, 1/q) \in L_1(\alpha, n), \tag{4.5}$$

в силу теоремы 3.1 и леммы 3.1.

Из (4.1)–(4.3) и (4.5), на основании (3.12) получаем

$$\|K^\alpha_m \varphi\|_q \leqslant C\|\varphi\|_p, \quad (1/p, 1/q) \in L_1(\alpha, n) \cap L_2(\alpha, n), \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{4.6}$$

С учетом теоремы С. Л. Соболева, оценка (4.6) распространяется на функции $\varphi \in L_p$, $1 < p < n/\operatorname{Re}\alpha$.

4.2. Доказательство теоремы 2.2. Вложение

$$K_m^\alpha(L_p) \subset \{f \in L_q :\, H^\alpha f \in L_p\} \tag{4.7}$$

вытекает из теоремы 2.1 и равенства

$$(H^\alpha K_m^\alpha \varphi)\,(x) = \varphi(x),$$

которое доказывается так же, как в [11, 12] в случае потенциалов с радиальными характеристиками.

Докажем вложение, обратное к (4.7). Предположим, что $f \in L_q$, $H^\alpha f \in L_p$. Пусть функция $\omega \in \mathcal{S}$ такова, что $\widehat{\omega}(\xi) = 0$ в некоторой окрестности множества $V = \{\xi : \widehat{k_m^\alpha}(\xi) = 0\} \cup S^{n-1}$ (следовательно, $\omega \in \Phi_V$).

Легко показать, что

$$\langle K_m^\alpha H^\alpha f, \omega\rangle = \langle H^\alpha f, \overline{K_m^\alpha}\omega\rangle, \tag{4.8}$$

где $\overline{K_m^\alpha}$ оператор с символом $\overline{\widehat{k_m^\alpha}}(\xi)$. С учетом (4.8) имеем

$$\langle K_m^\alpha H^\alpha f, \omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\langle f, \overline{H_{\varepsilon,\delta}^\alpha}\,\overline{K_m^\alpha}\omega\rangle, \tag{4.9}$$

где $H_{\varepsilon,\delta}^\alpha$ — оператор свертки с ядром (2.2). Воспользовавшись равенством

$$(\overline{H_{\varepsilon,\delta}^\alpha}\,\overline{K_m^\alpha}\omega)(x) = (\overline{A}_\varepsilon\omega)(x) + i\delta(\mathcal{K}_{\varepsilon,\delta}W_{\varepsilon/2}\omega)(x), \tag{4.10}$$

где $\mathcal{K}_{\varepsilon,\delta}^\alpha$ — оператор с символом

$$\frac{(|\xi|^2-1)^\ell e^{-(\varepsilon|\xi|^2)/2}}{(|\widehat{k_m^\alpha}(\xi)|^2 - i\delta)(|\xi|^2+(\varepsilon-i)^2)^\ell},$$

с учетом (4.9) имеем

$$\langle K_m^\alpha H^\alpha f, \omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f, \overline{A}_\varepsilon\omega\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\langle f, i\delta\mathcal{K}_{\varepsilon,\delta}W_{\varepsilon/2}\omega\rangle. \tag{4.11}$$

Докажем равенство

$$\lim_{\delta\to 0}\langle f, i\delta\mathcal{K}_{\varepsilon,\delta}W_{\varepsilon/2}\omega\rangle = 0. \tag{4.12}$$

Очевидно, что $(\widehat{\mathcal{K}_{\varepsilon,\delta}W_{\varepsilon/2}}\omega)(\xi) \in \Psi_V$. Следовательно,

$$\langle f, i\delta\mathcal{K}_{\varepsilon,\delta}W_{\varepsilon/2}\omega\rangle = (2\pi)^{-n}\langle Ff, i\delta F(\mathcal{K}_{\varepsilon,\delta}W_{\varepsilon/2}\omega)\rangle,$$

где Ff понимается в смысле Ψ_V'-распределений; это преобразование Фурье совпадает с преобразованием Фурье в смысле $L_{q'}$ (в соответствии с теоремой Хаусдорфа — Юнга). Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\bigl|\langle f, i\delta\mathcal{K}_{\varepsilon,\delta}W_{\varepsilon/2}\omega\rangle\bigr| \leqslant\, C\delta\|Ff\|_{q'} \times \left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\varepsilon|\xi|^2 q}\,\bigl||\xi|^2-1\bigr|^{\ell q}\,|\widehat{\omega}(\xi)|^q}{|\widehat{k_m^\alpha}(\xi)|^{2q}||\xi|^2+(\varepsilon-i)^2|^{\ell q}}\,d\xi\right)^{1/q}. \tag{4.13}$$

Заметим, что интеграл в правой части (4.13) конечен. Переходя в (4.13) к пределу при $\delta \to 0$, получаем (4.12).

В силу (4.11) и (4.12) имеем

$$\langle K_m^\alpha H^\alpha f, \omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left((2\pi)^{-n}\langle \hat{f}, \frac{(|\xi|^2-1)^\ell e^{-\varepsilon|\xi|^2}}{(|\xi|^2+(\varepsilon-i)^2)^\ell}\,\hat{\omega}(\xi)\rangle\right) = \langle f, \omega\rangle.$$

Таким образом, мы пришли к равенству

$$\langle K_m^\alpha H^\alpha f, \omega\rangle = \langle f, \omega\rangle. \tag{4.14}$$

Переходя к завершающему этапу доказательства, для заданной функции $\varphi\in\mathcal{S}$ выберем последовательность $\{\omega_j\}$, $\omega_j\in\mathcal{S}$ такую, что $\widehat{\omega_j}(\xi)=0$ в некоторой окрестности множества V и $\overset{(L_{q'})}{\lim\limits_{j\to\infty}}\omega_j=\varphi$. Существование такой последовательности доказано в [7] (см. также [19, гл. 2]).

На основании (4.14) имеем

$$\langle K_m^\alpha H^\alpha f, \omega_j\rangle = \langle f, \omega_j\rangle.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $j\to\infty$, получаем

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle K_m^\alpha H^\alpha f, \varphi\rangle, \quad \varphi\in S,$$

откуда следует, что

$$f(x) = (K_m^\alpha H^\alpha f)(x) \tag{4.15}$$

для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$.

Равенство (4.15) означает, что $f(x)\in K_m^\alpha(L_p)$. Теорема 2.2 доказана.

Замечание 4.1. Доказательство теоремы 2.2 существенно основано на возможности аппроксимации функции $\varphi\in\mathcal{S}$ по норме L_p ($p\geqslant 2$) функциями из Φ_V, преобразования Фурье которых обращаются в нуль в некоторых окрестностях множества V. Как уже отмечалось ранее, возможность такой аппроксимации была доказана в [7] (см. также [19, гл. 2]) в случае произвольного замкнутого множества V.

Литература

1. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М: Физматгиз, 1971.
2. *Карапетянц А. Н., Карасев Д. Н., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Изв. НАН Армении.—2003. —Т. 38, № 2—С. 7–62.
3. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН СССР.—1969.—Т. 105.—С. 89–107.
4. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики.—М: Наука, 1984.
5. *Ногин В. А., Шевченко К. С.* Обращение некоторых потенциалов Рисса с осциллирующими характеристиками в неэллиптическом случае // Изв. вузов. Математика.—1999.—№ 10.—С. 77–80.
6. *Самко С. Г.* Об основных функциях, исчезающих на заданном множестве и о делении на функции // Мат. заметки.—1977.—Т. 21, № 5.—С. 677–689.
7. *Самко С. Г.* О плотности в $L_p(\mathbb{R}^n)$ пространства Φ_v типа Лизоркина // Мат. заметки.—1982.—Т. 31, № 6.—С. 855–865.
8. *Betilgiriev M. A., Karasev D. N., Nogin V. A.* $(L_p - L_q)$-estimates for some fractional type operators with oscillating kernels // Fractional Calculus & Applied Analysis.—2004.—V. 7, № 2.—P. 213–241.
9. *Börjeson L.* Estimates for the Bochner–Riesz operator with negative index // Indiana University Mathematics Journal. 1986. V. 35, № 2.—P. 225–233.

10. *Hörmander L.* Estimates for translation invariant operators in L^p spaces // Acta Math.—1960.—V. 104.—P. 93–140.
11. *Karasev D. N., Nogin V. A.* Inversion of some potential-type operators with oscillating kernels in the elliptic and non-elliptic cases // Integral Transforms and Special Functions.—2002.—V. 13.—P. 529–545.
12. *Karasev D. N., Nogin V. A.* Description of the ranges of some potential-type operators with oscillating kernels in the non-elliptic case // Fractional Calculus & Applied Analysis.—2002.—V. 5, №. 3.—P. 315–349.
13. *Karasev D. N., Nogin V. A.* Estimates for the acoustic potential and their application // Proceedings of A. Razmadze Math. Inst.—2002.—V. 129.—P. 29–51.
14. *Karasev D. N., Nogin V. A.* ($L_p \to L_q$)-estimates for the Bochner—Riesz operator of complex order // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen.—2002.—V. 21, № 4.—P. 915–929.
15. *Miyachi A.* On some estimates for the wave equation in L^p and H^p // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA.—1980.—V. 27.—P. 331–354.
16. *Nogin V. A., Samko S. G.* Method of approximating inverse operators and its applications to inversion of potential type integral transforms // Integral Transforms and Special Functions.—1999.—V. 6.—P. 1–14.
17. *Nogin V. A., Samko S. G.* Some applications of potentials and approximative inverse operators in multi-dimensional fraction calculus // Fractional Calculus & Applied Analysis.—1999.—V. 2, № 2.—P. 205–228.
18. *Samko S. G.* Inversion theorems for potential-type integral transforms in $\mathbb{R}^n$ and on S^{n-1} // Integral Transforms and Special Functions.—1993.—V. 1, № 2.—P. 145–163.
19. *Samko S. G.* Hypersingular integrals and their applications. Internat. Series «Analytical Methods and Special Functions».—V. 5. London: Taylor & Frances, 2002.
20. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton Univ. press, 1993.

Статья поступила 12 ноября 2004 г.

Бетилгириев Маула Абдурахманович, к. ф.-м. н.
г. Ростов-на-Дону, Ростовский государственный экономический университет

Карасев Денис Николаевич
г. Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: `denis_karasev@mail.ru`

Ногин Владимир Александрович, к. ф.-м. н.
г. Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: `vnogin@math.rsu.ru`