Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2005, Том 7, Выпуск 2

УДК **517.98**

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕРЕЗИНА И РАДИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА НА ЕДИНИЧНОМ ДИСКЕ[1]

А. Н. Карапетянц, А. В. Голиков

Посвящается академику С. М. Никольскому

Изучается связь между компактностью радиального оператора на весовом пространстве Бергмана на единичном диске комплексной плоскости и убыванием преобразования Березина этого оператора на границе единичного диска. Приводятся достаточные условия при которых убывание преобразования Березина влечет компактность соответствующего оператора. Особое внимание уделяется операторам Теплица с радиальными символами.

1. Введение

Пусть $\mathcal{A}^2_\lambda()$ обозначает весовое пространство Бергмана на единичном диске $= \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в $\mathbb{C}$, состоящее из аналитических на функций, принадлежащих весовому пространству $L^2_\lambda()$, $\lambda > -1$. Здесь $L^2_\lambda()$ обозначает пространство измеримых на функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L^2_\lambda()} = \left(\int |f(z)|^2 d\mu_\lambda(z) \right)^{1/2},$$

где

$$d\mu_\lambda(z) = (\lambda + 1)(1 - |z|^2)^\lambda \frac{1}{\pi}\, dxdy, \quad \lambda > -1.$$

Пространство $\mathcal{A}^2_\lambda()$ является замкнутым подпространством $L^2_\lambda()$. Следующее неравенство

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{Cr^2} \|f\|_{\mathcal{A}^2_\lambda()}, \quad |z| < r,$$

означает, что функционал $f \to f(z)$ ограничен при любом $z \in$. По теореме Рисса о представлении линейного функционала на гильбертовом пространстве для любого $z \in$ существует единственная функция $K^\lambda_z(w) \in \mathcal{A}^2_\lambda()$ такая, что

$$f(z) = \langle f, K^\lambda_z \rangle_\lambda, \quad f \in \mathcal{A}^2_\lambda(),$$

© 2005 Карапетянц А. Н., Голиков А. В.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 04-01-00862-А.

при этом функция $K_z^\lambda(w)$ имеет вид (см. ниже) $K_z^\lambda(w) = \frac{1}{(1-\bar{z}w)^{2+\lambda}}$, а скалярное произведение в $\mathcal{A}_\lambda^2()$ определяется следующим образом:

$$\langle f, g\rangle_\lambda = \int f(z)\overline{g(z)}d\mu_\lambda(z), \qquad f, g \in \mathcal{A}_\lambda^2().$$

Обозначим через B^λ (весовой) проектор Бергмана, проектирующий $L_\lambda^2()$ на $\mathcal{A}_\lambda^2()$:

$$B^\lambda f(z) = \int f(w)K^\lambda(z,w)d\mu_\lambda(w) = \int \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\lambda}}\, d\mu_\lambda(w),$$

где функция $K^\lambda(z,w) = \overline{K_z^\lambda(w)}$, $z, w \in$, называется (весовым) ядром Бергмана или порождающим ядром в $\mathcal{A}_\lambda^2()$.

Для измеримой на функции $a(z)$ оператор Теплица с символом $a(z)$ не обязательно ограниченный, но определенный на плотном в $\mathcal{A}_\lambda^2()$ множестве, имеет вид:

$$T_a^\lambda f(z) = (B^\lambda af)(z) = \int \frac{a(w)f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\lambda}}\, d\mu_\lambda(w).$$

Для линейного оператора A на $\mathcal{A}_\lambda^2()$, не обязательно ограниченного, но определенного на плотном в $\mathcal{A}_\lambda^2()$ множестве, преобразование Березина (или символ Березина оператора A) определяется следующим образом:

$$\tilde{A}(z) = \langle Ak_z^\lambda, k_z^\lambda\rangle_\lambda, \quad z \in,$$

где функция $k_z^\lambda(w) = K_z^\lambda(w)/\|K_z^\lambda(\cdot)\|_{\mathcal{A}_\lambda^2()}$, $z, w \in$, называется когерентным состоянием. В случае теплицева оператора T_a^λ функцию $\widetilde{T}_a^\lambda(z)$ также называют преобразованием Березина символа $a(z)$ и обозначают $\widetilde{T}_a^\lambda(z) = \widetilde{a}(z)$.

Преобразование Березина является одним из наиболее распространенных методов в теории операторов и пространств аналитических функций. В частности, имеется ряд работ посвященных исследованию связи между убыванием преобразования Березина оператора Теплица на границе единичного диска (а также конечных сумм произведений теплицевых операторов) и компактностью оператора. В этой связи упомянем работы [2–7] (см. также монографии [8, 9] и имеющиеся там ссылки).

Оператор Теплица T_a^λ на $\mathcal{A}_\lambda^2()$ является локально компактным оператором по крайней мере в случае символа $a(z)$ непрерывного на . Поэтому, компактность такого оператора эквивалентна равенству символа нулю на границе диска. С другой стороны, для таких операторов имеет место соотношение (см. [8]) $a(z) = \widetilde{T}_a^\lambda(z)$, $z \in \partial$ (более того, для гармонических символов $a(z)$ справедливо $a(z) = \widetilde{T}_a^\lambda(z)$, $z \in$). Таким образом, связь между компактностью оператора и убыванием преобразования Березина при приближении к границе диска становится очевидной для хороших символов.

В общем случае (необязательно теплицевых операторов) имеет место следующий факт. Если оператор A компактен, то функция $\tilde{A}(z)$ очевидно ограничена и, кроме того, $\tilde{A}(z) \to 0$ при $z \to \partial$ в силу слабой сходимости k_z^λ к нулю при $z \to \partial$. С другой стороны, существуют примеры некомпактных операторов, преобразование Березина которых стремится к нулю на границе (см. [2]). Относительно теплицевых операторов, для определенных классов символов доказано, что оператор компактен тогда и только тогда, когда преобразование Березина стремится к нулю на границе. Так, например, для положительных символов это установлено в [5, 10], для ограниченных символов в [2], а для символов из класса $BMO^1()$ — в [7]. Отметим, что в этих работах, за исключением работы [5], рассматривается безвесовое пространство Бергмана $\mathcal{A}^2() = \mathcal{A}_0^2()$. В общем случае произвольных, вообще говоря, неограниченных символов доказать аналогичное утверждение или показать, что оно не имеет места не представляется возможным. В первую очередь это связано с тем, что техника, применяемая в упомянутых работах, по-существу использует характерные свойства символов из рассматриваемого класса. Например, даже в случае радиальных неограниченных символов этот вопрос остается открытым.

В этой связи интересным является подход, предложенный в работе [6]. Именно, пусть ϑ обозначает класс ограниченных операторов на $\mathcal{A}^2()$, для которых стремление к нулю преобразования Березина $\tilde{A}(z)$ при $|z| \to 1$ влечет компактность оператора. Как было отмечено выше, компактность оператора влечет стремление преобразования Березина к нулю на границе, т. е. класс ϑ состоит из тех операторов, для которых оба утверждения эквивалентны. Главным результатом упомянутой работы является описание семейства так называемых радиальных операторов, принадлежащих классу ϑ (в безвесовом случае). Это не обязательно теплицевы операторы, и для теплицевых операторов радиальность означает, что символ такого оператора радиален. Заметим в этой связи, что при этом не требуется ограниченности символа.

В настоящей работе мы исследуем аналогичную задачу для операторов на весовом пространстве Бергмана. Приводятся достаточные условия принадлежности оператора классу ϑ_λ. Здесь ϑ_λ обозначает класс ограниченных операторов A на $\mathcal{A}_\lambda^2()$, для которых стремление к нулю преобразования Березина $\widetilde{A}(z)$ при $|z| \to 1$ влечет компактность оператора. Особое внимание уделяется теплицевым операторам с радиальными символами и с символами, постоянными на окружностях Бергмана (окружностях в гиперболической метрике Бергмана). Эти окружности можно рассматривать как образы обычных евклидовых окружностей при преобразовании Мёбиуса диска в себя, переводящем $z = 0$ в точку z_0.

2. Вспомогательные сведения

Пусть $\{e_n^\lambda(z)\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{A}_\lambda^2()$. Весовое ядро Бергмана имеет вид $K^\lambda(z,w) = \sum_{n=0}^\infty e_n^\lambda(z)\overline{e_n^\lambda(w)}$, $z, w \in$, причем $K^\lambda(z,w)$ не зависит от выбора ортонормированного базиса. Выбрав стандартный базис $e_n^\lambda(z) = d_n^\lambda z^n$ в $\mathcal{A}_\lambda^2()$, где

$$d_n^\lambda = \frac{1}{\sqrt{(\lambda+1)B(n+1,\lambda+1)}} = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\lambda+2)}{\Gamma(\lambda+2)n!}}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

можно получить явное выражение для ядра Бергмана: $K^\lambda(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\lambda}}$. Используя порождающее свойство ядра Бергмана в $\mathcal{A}_\lambda^2()$, легко вычислить его норму: $\|K_\lambda(z,\cdot)\|_{\mathcal{A}_\lambda^2()} = \frac{1}{(1-|z|^2)^{\lambda/2+1}}$, $z \in$. Таким образом, когерентное состояние $k_z^\lambda(w)$ имеет вид

$$k_z^\lambda(w) = \frac{\overline{K^\lambda(z,w)}}{\|K^\lambda(z,\cdot)\|_{\mathcal{A}_\lambda^2}} = \frac{(1-|z|^2)^{1+\lambda/2}}{(1-\overline{z}w)^{2+\lambda}} = (1-|z|^2)^{1+\lambda/2}\sum_{n=0}^\infty \overline{e_n^\lambda(z)}e_n^\lambda(w),$$

и для $z \in$, $f \in \mathcal{A}_\lambda^2()$ справедливо соотношение

$$\langle f, k_z^\lambda\rangle_\lambda \;=\; \frac{1}{\|K_\lambda(z,\cdot)\|_{\mathcal{A}_\lambda^2}}\langle f(\cdot), \overline{K^\lambda(z,\cdot)}\rangle_\lambda = (1-|z|^2)^{1+\lambda/2}f(z).$$

Следовательно, преобразование Березина оператора A может быть представлено в виде

$$\widetilde{A}(z) = \langle Ak_z^\lambda, k_z^\lambda\rangle_\lambda = \left\langle A\left((1-|z|^2)^{1+\lambda/2}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{e_n^\lambda(z)}e_n^\lambda(w)\right), (1-|z|^2)^{1+\lambda/2}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{e_k^\lambda(z)}e_n^\lambda(w)\right\rangle_\lambda$$

$$= (1-|z|^2)^{2+\lambda}\sum_{n,k=0}^{\infty} d_n^\lambda d_k^\lambda \langle Ae_n^\lambda, e_k^\lambda\rangle_\lambda \overline{z}^n z^k.$$

Следуя [6], обозначим

$$\mathrm{rad}(f)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}z)dt.$$

Функция $\mathrm{rad}(f)$ называется *радиализацией функции* f. Будем говорить, что функция f радиальная, если она совпадает со своей радиализацией.

Обобщая эту идею, в работе [6] для оператора A определяется оператор $\mathrm{Rad}(A)$:

$$\mathrm{Rad}(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_t^* A U_t dt,$$

где U_t унитарный оператор $(U_t f)(z) = f(e^{-it}z)$, $f \in \mathcal{A}_\lambda^2()$. Другими словами, записанное выше равенство означает, что для всех $f, g \in \mathcal{A}_\lambda^2()$ выполняется:

$$\langle \mathrm{Rad}(a)f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \langle U_t^* A U_t f, g\rangle dt.$$

Если $A = \mathrm{Rad}(A)$, то оператор A называется радиальным.

Рассмотрим преобразование $\mathrm{Rad}(A)^\sim$ Березина оператора $\mathrm{Rad}(A)$. Доказательства сформулированных ниже утверждений аналогичны приведенным в [6] и мы их опускаем.

Утверждение 2.1. $\mathrm{Rad}(A)^\sim(z) = \mathrm{Rad}(\widetilde{A})(z)$ *для всех* $z \in$, *и оператор* A *радиальный тогда и только тогда, когда его преобразование Березина является радиальной функцией.*

Для $f \in L_\lambda^1()$ положим

$$\widetilde{f}(z) = \int_f (w)|k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w).$$

Функцию $\widetilde{f}$ назовем преобразованием Березина функции f.

Утверждение 2.2. *Функция* f *является радиальной тогда и только тогда, когда функция* $\widetilde{f}$ *радиальна, другими словами* $\mathrm{rad}(f)^\sim = \mathrm{rad}(\widetilde{f})$.

Утверждение 2.3. *Пусть* A *ограниченный радиальный оператор в* $\mathcal{A}_\lambda^2()$. *Тогда* A *диагональный оператор относительно стандартного базиса* $\{e_n^\lambda\}$ *в* $\mathcal{A}_\lambda^2()$.

Всюду ниже мы будем обозначать

$$\gamma_\lambda(n) = \langle Ae_n^\lambda, e_n^\lambda\rangle_\lambda.$$

Мы также будем использовать отображение Мёбиуса α_{z_0} единичного диска в себя, переводящее точку $z = 0$ в точку $z = z_0$:

$$\alpha_{z_0}(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0}z}, \quad z \in .$$

Легко видеть, что: (i) $\alpha_{z_0}^{-1} = \alpha_{z_0}$; (ii) вещественный Якобиан отображения Мёбиуса α_{z_0} имеет вид $\frac{(1-|z_0|^2)^2}{|1-z_0\overline{z}|^4}$; (iii) $1 - |\alpha_{z_0}(z)|^2 = \frac{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)}{|1-z_0\overline{z}|^2}$.

Нам также понадобится следующая лемма.

Лемма 2.4 [11]**.** *Пусть для фиксированного $\lambda \geqslant 0$ последовательность $\{a_n\}$ такова, что:*

$$\lim_{t\to 1^-} (1-t)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0,$$

и существует $C > 0$ такое, что $a_n \geqslant -C(n+1)^{\lambda-1}$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{(n+1)^\lambda} = 0.$$

3. Достаточные условия принадлежности классу ϑ_λ

Здесь приводятся достаточные условия принадлежности оператора классу ϑ_λ. Так как мы используем технику преобразования Березина и операторы, рассматриваемые здесь, являются диагональными относительно ортонормированного базиса $\{e_n^\lambda\}$, то в первую очередь заметим, что для таких операторов преобразование Березина имеет вид

$$\widetilde{A}(z) = (1-|z|^2)^{2+\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} |e_n^\lambda(z)|^2 \langle Ae_n^\lambda, e_n^\lambda\rangle_\lambda.$$

Теорема 3.1. *Пусть A — линейный оператор в $\mathcal{A}_\lambda^2()$, диагональный относительно стандартного базиса $\{e_n^\lambda\}$ в пространстве $\mathcal{A}_\lambda^2()$ и пусть $\{\gamma_\lambda(n)\}$ — его диагональ, т. е. $\gamma_\lambda(n) = \langle Ae_n^\lambda, e_n^\lambda\rangle_\lambda$. Если существует $C > 0$ такое, что*

$$(d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n) - (d_{n-1}^\lambda)^2\gamma_\lambda(n-1) \geqslant -C(n+1)^\lambda, \quad n \geqslant 1,$$

то стремление к нулю преобразования Березина $\widetilde{A}(z)$ при $|z| \to 1^-$ влечет компактность оператора A. Другими словами, если для оператора A выполняются условия теоремы, то $A \in \vartheta_\lambda$.

$\lhd$ Заметим, что оператор A компактен если и только если последовательность $\{\gamma_\lambda(n)\}$ сходится к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим преобразование Березина оператора A. Заменяя $t = |z|^2$, получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}(z) &= (1-t)^{\lambda+2} \sum_{n=0}^{\infty} (d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n)t^n = (1-t)^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} (d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n)(t^n - t^{n+1}) \\
&= (1-t)^{\lambda+1}\Big((d_0^\lambda)^2\gamma_\lambda(0) - (d_0^\lambda)^2\gamma_\lambda(0)t + (d_1^\lambda)^2\gamma_\lambda(1)t \\
&- (d_1^\lambda)^2\gamma_\lambda(1)t^2 + \dots + (d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n)t^n - (d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n)t^{n+1} + \dots\Big) \\
&= (1-t)^{\lambda+1}\Big((d_0^\lambda)^2\gamma_\lambda(0) + \big((d_1^\lambda)^2\gamma_\lambda(1) \\
&- (d_0^\lambda)^2\gamma_\lambda(0)\big)t + \dots + \big((d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n) - (d_{n-1}^\lambda)^2\gamma_\lambda(n-1)\big)t^n + \dots\Big) \\
&= (1-t)^{\lambda+1}\left((d_0^\lambda)^2\gamma_\lambda(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n) - (d_{n-1}^\lambda)^2\gamma_\lambda(n-1)\Big)t^n\right).
\end{aligned}$$

Обозначим $b_0 = (d_0^\lambda)^2\gamma_\lambda(0),\ b_n = (d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n) - (d_{n-1}^\lambda)^2\gamma_\lambda(n-1),\ n = 1, 2, \dots$ Таким образом

$$\widetilde{A}(z) = (1-t)^{\lambda+1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad t = |z|.$$

Из условий теоремы следует $\lim_{t\to 1^-}(1-t)^{\lambda+1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = 0$. Кроме того, в силу определения последовательности $\{b_n\}$ имеем: $b_n \geqslant -C(n+1)^\lambda,\ n \geqslant 1$. Так как выполнены условия леммы 2.4, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n} b_k}{(n+1)^{\lambda+1}} = 0.$$

Поскольку $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = (d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n)$, будем иметь $\lim_{n\to\infty}\frac{(d_n^\lambda)^2}{(n+1)^{\lambda+1}}\gamma_\lambda(n) = 0$. Окончательно по формуле Стирлинга получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(d_n^\lambda)^2}{(n+1)^{\lambda+1}} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+\lambda+2)}{\Gamma(\lambda+2)n!(n+1)^{\lambda+1}} = \frac{1}{\Gamma(\lambda+2)}.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\gamma_\lambda(n) = 0$, и оператор A компактен. $\rhd$

Следствие 3.2. *Пусть A — линейный ограниченный оператор в пространстве Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2()$, диагональный относительно стандартного базиса $\{e_n^\lambda\}$ и пусть $\{\gamma_\lambda(n)\}$ — его диагональ. Если последовательность $n(\gamma_\lambda(n) - \gamma_\lambda(n-1))$ ограничена, то $A \in \vartheta_\lambda$.*

$\lhd$ Справедливо соотношение

$$(\lambda+1)\frac{(d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n) - (d_{n-1}^\lambda)^2\gamma_\lambda(n-1)}{(n+1)^\lambda} = \frac{1}{B(n,\lambda+1)(n+1)^\lambda}$$
$$\times\big(\gamma_\lambda(n) - \gamma_\lambda(n-1)\big) + \frac{(\lambda+1)}{B(n,\lambda+1)(n+1)^\lambda}\gamma_\lambda(n).$$

Очевидно, первое слагаемое эквивалентно $\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}n(\gamma_\lambda(n) - \gamma_\lambda(n-1))$ и, следовательно, ограничено. Из ограниченности оператора A следует ограниченность последовательности $\{\gamma_\lambda(n)\}$. Второе слагаемое эквивалентно $\frac{\lambda+1}{\Gamma(\lambda+1)}\,\gamma_\lambda(n)$ и также ограничено. Таким образом, существует $C > 0$ такое, что

$$\left|\frac{(d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n) - (d_{n-1}^\lambda)^2\gamma_\lambda(n-1)}{(n+1)^\lambda}\right| < C \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно,

$$\frac{(d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n) - (d_{n-1}^\lambda)^2\gamma_\lambda(n-1)}{(n+1)^\lambda} > -C \quad (n = 1, 2, \dots)$$

или

$$(d_n^\lambda)^2\gamma_\lambda(n) - (d_{n-1}^\lambda)^2\gamma_\lambda(n-1) > -C(n+1)^\lambda \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Так как выполняются условия теоремы 3.1, то $A \in \vartheta_\lambda$. $\rhd$

Рассмотрим теперь теплицевы операторы с радиальными символами $a(z) = a(|z|)$. Имеем (см. [12, 13]):

$$\gamma_\lambda(n) = \langle T_a^\lambda e_n^\lambda, e_n^\lambda\rangle_\lambda = (\lambda+1)(d_n^\lambda)^2\int_{|} z|^{2n}a(z)d\mu_\lambda(z)$$
$$= 2(\lambda+1)(d_n^\lambda)^2\int_0^1 a(r)r^{2n+1}(1-r^2)^\lambda dr = \frac{1}{B(n+1,\lambda+1)}\int_0^1 a(\sqrt{r})r^n(1-r)^\lambda dr.$$

Теорема 3.3. *Пусть $a(z)$ — радиальная функция, $a(\sqrt{r})(1-r)^{\lambda} \in L^1[0,1)$, T_a^{λ} ограниченный оператор на $\mathcal{A}_{\lambda}^2()$. Положим*

$$b(r) = a(\sqrt{r}) - \frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}} \int_r^1 a(\sqrt{s})(1-s)^{\lambda} ds,$$
$$B_b^{(0)}(r) = b(r), \quad B_b^{(j)}(r) = \int_r^1 B_b^{(j-1)}(s) ds \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Если существует номер $j \in \mathbb{N}$ такой, что $B_b^{(j)}(r) = O((1-r)^j)$ при $r \to 1$, то $T_a^{\lambda} \in \vartheta_{\lambda}$.

$\lhd$ Рассмотрим

$$-n(\gamma_{\lambda}(n) - \gamma_{\lambda}(n-1)) = \frac{n}{B(n,\lambda+1)} \int_0^1 a(\sqrt{r})(1-r)^{\lambda+1} r^{n-1} dr - \frac{\lambda+1}{B(n,\lambda+1)} \int_0^1 a(\sqrt{r})(1-r)^{\lambda} r^n dr.$$

Второе слагаемое ограничено в силу ограниченности оператора T_a^{λ}.

Рассмотрим первое слагаемое, которое запишем в виде

$$\frac{n}{B(n,\lambda+1)} \int_0^1 a(\sqrt{r})(1-r)^{\lambda+1} r^{n-1} dr = \frac{n}{B(n,\lambda+1)} \times \int_0^1 \left(a(\sqrt{r}) - \frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}} \int_r^1 a(\sqrt{s})(1-s)^{\lambda} ds \right) (1-r)^{\lambda+1} r^{n-1} dr + \frac{n}{B(n,\lambda+1)} \int_0^1 r^{n-1} dr \int_r^1 a(\sqrt{s})(1-s)^{\lambda} ds.$$

Имеет место соотношение:

$$\frac{n}{B(n,\lambda+1)} \int_0^1 b(r)(1-r)^{\lambda+1} r^{n-1} dr \quad \sim \quad (\lambda+1)\gamma_{\lambda+1}(n-1), \quad n \to \infty.$$

Используя результаты из [12], замечаем, что последовательность $\gamma_{\lambda+1}(n)$ ограничена. Далее, интегрируя по частям, будем иметь

$$\frac{n}{B(n,\lambda+1)} \int_0^1 r^{n-1} dr \int_r^1 a(\sqrt{s})(1-s)^{\lambda} ds = \frac{1}{B(n,\lambda+1)} \int_0^1 a(\sqrt{r})(1-r)^{\lambda} r^n dr = \gamma_{\lambda}(n-1).$$

Последовательность $\gamma_{\lambda}(n-1)$ также ограничена. Остается применить следствие 3.2. $\rhd$

Рассмотрим оператор теплица T_a^{λ} с символом $a(z)$ постоянным на окружностях в метрике Бергмана $\beta(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1-z_1\overline{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|1-z_1\overline{z}_2| - |z_1 - z_2|}$ с центром в точке $z = z_0 \in$. Ясно, что тогда $a_{z_0}(z) = a(\alpha_{z_0}(z))$ является радиальной функцией. Как следствие, из теоремы 3.3 получаем следующий результат.

Теорема 3.4. *Пусть $a(z)$ функция, постоянная на окружностях в метрике Бергмана с центром в точке $z = z_0$, $a(\alpha_{z_0}(\sqrt{r}))(1-r)^{\lambda} \in L^1([0,1))$, T_a^{λ} — ограниченный оператор* *на* $\mathcal{A}^2_\lambda()$. *Положим*

$$b(r) = a(\alpha_{z_0}(\sqrt{r})) - \frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}} \int_r^1 a(\alpha_{z_0}(\sqrt{s}))(1-s)^\lambda ds,$$

$$B_b^{(0)}(r) = b(r), \quad B_b^{(j)}(r) = \int_r^1 B_b^{(j-1)}(s)ds \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Если существует номер $j \in \mathbb{N}$ *такой, что* $B_b^{(j)}(r) = O((1-r)^j)$ *при* $r \to 1$, *то* $T_a^\lambda \in \vartheta_\lambda$.

$\lhd$ Введем на $\mathcal{A}^2_\lambda()$ унитарный оператор $U^\lambda_{z_0}$ следующим образом:

$$(U^\lambda_{z_0} f)(z) = C^\lambda_{z_0}(z) f(\alpha_{z_0}(z)), \qquad C^\lambda_{z_0}(z) = \frac{(1-|z_0|^2)^{\frac{\lambda}{2}+1}}{(1-z\overline{z}_0)^{\lambda+2}}.$$

Непосредственные вычисления дают:

$$(U^\lambda_{z_0} T^\lambda_{a(\alpha_{z_0}(w)} U^\lambda_{z_0} f)(z) = C^\lambda_{z_0}(z) \int_a (\alpha_{z_0}(w)) f(\alpha_{z_0}(w)) C^\lambda_{z_0}(w) K^\lambda(\alpha_{z_0}(z), w) d\mu_\lambda(w)$$
$$= (\lambda+1) C^\lambda_{z_0}(z) \int_a (\alpha_{z_0}(w)) f(\alpha_{z_0}(w)) C^\lambda_{z_0}(w) K^\lambda(\alpha_{z_0}(z), w)(1-|w|^2)^\lambda d\mu(w).$$

Производя замену переменной $w = \alpha_{z_0}(\xi)$ и используя свойства преобразования Мёбиуса, получаем

$$(U^\lambda_{z_0} T^\lambda_{a(\alpha_{z_0}(w)} U^\lambda_{z_0} f)(z) = (\lambda+1) C^\lambda_{z_0}(z) \int_a (\xi) f(\xi) C^\lambda_{z_0}\big(\alpha_{z_0}(\xi)\big) K^\lambda(\alpha_{z_0}(z), \alpha_{z_0}(\xi))$$
$$\times \frac{(1-|z_0|^2)^2}{|1-z_0\overline{\xi}|^4}(1-|\alpha_{z_0}(\xi)|^2)^\lambda d\mu(\xi).$$

Далее, имеем

$$K^\lambda(\alpha_{z_0}(z), \alpha_{z_0}(\xi)) = \frac{(1-\overline{z}_0 z)^{\lambda+2}(1-z_0\overline{\xi})^{\lambda+2}}{(1-|z_0|^2)^{\lambda+2}} K^\lambda(z,\xi), \quad C^\lambda_{z_0}(\alpha_{z_0}(\xi)) = (C^\lambda_{z_0}(\xi))^{-1}.$$

Таким образом,

$$(U^\lambda_{z_0} T^\lambda_{a(\alpha_{z_0}(w)} U^\lambda_{z_0} f)(z) = (\lambda+1) \int_a (\xi) \varphi(\xi) K^\lambda(z,\xi)(1-|\xi|^2)^\lambda d\mu(\xi)$$
$$= \int_a (\xi) f(\xi) K^\lambda(z,\xi) d\mu_\lambda(\xi) = (T^\lambda_a f)(z).$$

Так как оператор $U^\lambda_{z_0}$ унитарный, то для компактности оператора T^λ_a необходимо и достаточно, чтобы оператор $T^\lambda_{a(\alpha_{z_0}(w))}$ с радиальным символом $a(\alpha_{z_0}(w))$ был компактен. $\rhd$

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* Абсолютно представляющие системы экспонент с мнимыми показателями в пространствах бесконечно дифференцируемых функций и продолжимость по Борелю — Уитни // В сб.: Актуальные проблемы математического анализа.—Ростов-на-Дону: Изд-во ГинГо.—2000.—С. 8–22.
2. *Axler S., Zheng D.* Compact operators via the Beresin transform // Indiana Univ. Math. J.—1998.—V. 47, № 2.—P. 387–400.

3. *Axler S., Zheng D.* The Beresin transform on the Toeplitz algebra // Studia Math.—1998.—V. 127, № 2.—P. 113–136.
4. *Stroethoff K., Zheng D.* Toeplitz and Hankel operators on Bergman spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1992.—V. 329, № 2.—P. 773–794.
5. *Zhu K.* Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains // J. Operator Theory.—1988.—V. 20, № 2.—P. 329–357.
6. *Zorboska N.* The Beresin transform and radial operators // Proc. Amer. Math. Soc.—2003.—V. 131, № 3.—P. 793–800.
7. *Zorboska N.* Toeplitz operators with BMO symbols and the Beresin transform // IJMMS.—2003.—V. 46.—P. 2929–2945.
8. *Zhu K.* Operator theory in function spaces. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics.—New York: Marcel Dekker, 1990.—254 p.
9. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman spaces.—New York: Springer-Verlag, 2000.—286 p.
10. *Lueking D. H.* Trace ideal criteria for Toeplitz operators // J. Funct. Anal.—1987.—V. 73, № 2.—P. 773–794.
11. *Постников А. Г.* Тауберова теория и ее приложения // Тр. МИАН.—1979.—Т. 144.—С. 325–346.
12. *Grudsky S., Karapetyants A., Vasilevski N.* Dynamics of properties of toeplitz operators with radial symbols // Reporte Interno CINVESTAV del I.P.N.—2002.—V. 317.—P. 1–37.
13. *Grudsky S., Karapetyants A., Vasilevski N.* Toeplitz operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ with radial symbols // J. Operator Theory.—2003.—V. 49.—P. 325–346.

Статья поступила 12 ноября 2004 г.

Карапетянц Алексей Николаевич, к. ф.-м. н.
Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: `alexeyk@aaanet.ru`

Голиков Александр Владимирович
г. Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: `alexey@stipendia.ru`