Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2005, Том 7, Выпуск 2

УДК **517.927**

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НА ГРАФЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р. Ч. Кулаев

Академику С. М. Никольскому
к его столетнему юбилею

Строится конечное интегральное преобразование для общего дифференциального оператора, порожденного линейным дифференциальным выражением 2-го порядка, заданным на конечном геометрическом графе, и краевыми условиями, задаваемыми в вершинах графа. Приводится формула обращения, соответствующая этому преобразованию.

Имеется обширная литература, в которой изложена теория построения и применения интегральных преобразований [1, 4, 5]. Однако во всей этой литературе имеется пробел по интегральным преобразованиям, у которых переменная преобразования меняется на конечном геометрическом графе (пространственной сети). Вместе с тем, классы задач, в которых переменные меняются на геометрическом графе, достаточно широки и активно исследуются. Подобные задачи возникают при изучении эволюционных процессов в системе волноводов, в упругих сетках, в электрических сетях.

1. Основные понятия

Начнем с описания основных терминов и обозначений используемых ниже (более подробно см. [3]).

Пусть дано конечное множество попарно непересекающихся открытых отрезков $\{\gamma_i\}_1^m$ пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через V множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, которые являются концевыми точками двух и более интервалов. Объединение всех точек интервалов γ_i и множества V обозначим через Γ и будем называть геометрическим графом (в дальнейшем просто «графом»). При этом интервалы γ_i будем называть ребрами графа Γ, а точки множества V — его внутренними вершинами. Концевые точки ребер графа не принадлежащие V будем называть граничными вершинами графа Γ. Совокупность всех граничных вершин обозначим через $\partial\Gamma$. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i, то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a. Всюду далее полагаем, что граф Γ является связным множеством в $\mathbb{R}$.

Будем рассматривать комплекснозначные функции нескольких переменных, у которых одна переменная имеет областью своего изменения граф Γ. Области изменения других переменных в настоящей работе нас не интересуют, поэтому, в целях упрощения записи, для таких функций примем обозначение $u = u(x)$, $x \in \Gamma$, а через u_i будем обозначать сужение функции u на ребро γ_i. Везде ниже полагаем, что рассматриваемые функции равномерно непрерывны по переменной x на каждом ребре графа. Множество всех таких функций мы обозначим через $C(\Gamma)$. Далее, если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ, то под $u_i(a)$ понимается $\lim\limits_{x\to a} u_i(x),\ x\in\gamma_i$.

Будем считать, что все ребра графа ориентированы. Производная функции u в точке x_0 ребра $\gamma_i=(a_i,b_i)$ определяется следующим образом:

$$u_i'(x_0)=\frac{d}{dt}\,u_i\left(a_i+\frac{b_i-a_i}{l_i}t\right)\bigg|_{t=t_0},$$

где $x_0=a_i+\frac{b_i-a_i}{l_i}t_0,\ 0<t_0<l_i,\ \ l_i$ — длина ребра γ_i.

Через $C^1(\Gamma)$ обозначим множество функций из $C(\Gamma)$, имеющих внутри каждого ребра равномерно непрерывные производные, а через $C^2(\Gamma)$ — множество функций из $C^1(\Gamma)$, имеющих на каждом ребре непрерывные производные второго порядка.

Под дифференциальным выражением 2-го порядка на графе будем понимать выражение вида

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x)\frac{\partial u}{\partial x}+C(x).$$

Здесь A,B,C — функции одной переменной, определенные на графе Γ. Дифференциальное выражение определено на множестве $C^2(\Gamma)$. Это выражение можно трактовать в виде системы m обычных дифференциальных выражений

$$A_i(x)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+B_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x}+C_i(x),\quad x\in\gamma_i,$$

рассматриваемых на каждом ребре $\gamma_i\in\Gamma,\ i=1,\ldots,m$.

Под интегралом функции $u\in C(\Gamma)$, взятым по графу Γ, понимаем сумму интегралов по всем ребрам графа, т. е.

$$\int\limits_\Gamma u(x)dx=\sum_{i=1}^m\int\limits_{\gamma_i}u_i(x)\,dx.$$

Каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы, с учетом выбранной ориентации ребер графа, определяется равенством

$$\int\limits_{\gamma_i}u_i(x)dx=\int\limits_0^{l_i}u_i\left(a_i+\frac{b_i-a_i}{l_i}\,t\right)dt,$$

где $\gamma_i=(a_i,b_i),\ 0<t<l_i$, l_i — длина ребра γ_i.

Интегральным преобразованием функции $u\in C(\Gamma)$ называем линейный интегральный оператор

$$\mathcal{L}u=\int\limits_\Gamma u(x)\Phi(\xi,x)\,dx,$$

ставящий в соответствие функции u новую функцию

$$\overline{u}=\overline{u}(\xi)=\mathcal{L}u,$$

При этом область преобразования Γ — это конечный граф, а $\Phi(\xi,x)$ — ядро интегрального преобразования. Функцию $\overline{u}=\overline{u}(\xi)$ будем называть интегральным преобразованием или изображением, а совокупность всех $\overline{u}$ — пространством изображений.

Преобразование

$$\mathcal{L}^{-1}\overline{u} = u(x),$$

где $\mathcal{L}^{-1}$ — оператор, обратный оператору $\mathcal{L}$, переводящее функции $\overline{u}$ в функцию u, будем называть обратным преобразованием или формулой обращения.

2. Построение конечного интегрального преобразования

Пусть рассматриваемые математические соотношения содержат составляющими частями линейное дифференциальное выражение

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x)u, \quad A(x) \neq 0, \tag{1}$$

заданное на графе Γ; краевые условия

$$u(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \tag{2}$$

и условия, задаваемые в каждой внутренней вершине a графа Γ.

$$\begin{gathered} u_i(a) = \alpha_i(a)u_1(a), \quad i = 1, \ldots, d(a), \\ \sum_{i=1}^{d(a)} \beta_i(a)\frac{\partial u_i}{\partial x}(a) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где $d(a)$ — число ребер графа, примыкающих к вершине a; $\alpha(a) = \Big\{\alpha_i(a)\Big\}_{i=1}^{d(a)}$ и $\beta(a) = \Big\{\beta_i(a)\Big\}_{i=1}^{d(a)}$ — наборы чисел, свои для каждой вершины $a \in V$. Полагаем, что $\alpha_1(a) = 1$, $\beta_i(a) \neq 0$, $\langle\alpha(a), \beta(a)\rangle \neq 0$ при некоторой нумерации ребер, примыкающих к вершине a. В условиях (3) производные подсчитаны при параметризации ребер в направлении «к вершине a».

Построим такое интегральное преобразование, чтобы после применения его к любой системе соотношений, содержащей (1)–(3), соответствующая система в пространстве изображений не содержала дифференциальных операций по x. Для этого дифференциальный оператор

$$L_0 = A(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial}{\partial x} + C(x)$$

выбором весовой функции $r(x)$ преобразуем в самосопряженную форму

$$L_0 \equiv \frac{1}{r(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + q(x)\right\} \equiv \frac{1}{r}L.$$

Относительно функций ρ, ρ', q и r будем предполагать, что они равномерно непрерывны на каждом ребре графа Γ_x, причем $\inf\limits_{x\in\Gamma} \rho(x) > 0$.

Искомое интегральное преобразование представимо в виде

$$\overline{u}(\lambda) = \mathcal{L}u = \int\limits_{\Gamma} u(\xi)\Phi(\lambda, \xi)\, d\xi. \tag{4}$$

Тогда дальнейшей задачей является определение ядра $\Phi(\lambda, x)$.

Применяя оператор $\mathcal{L}$ к L_0u, получим

$$\mathcal{L}[L_0u] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{r}Lu\right] = \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{r(\xi)}Lu\cdot\Phi(\lambda,\xi)\,d\xi$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho_i(\xi)\frac{\partial u_i(\xi)}{\partial\xi}\right)\cdot\frac{\Phi_i(\lambda,\xi)}{r_i(\xi)}\,d\xi + \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\gamma_i} q_i(\xi)u_i(\xi)\frac{\Phi_i(\lambda,\xi)}{r_i(\xi)}\,d\xi.$$

Интегрируя по частям каждый из интегралов в первой сумме, получим

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{r}Lu\right] = \int\limits_{\Gamma} u(\xi)L\frac{\Phi}{r}\,d\xi + R, \tag{5}$$

где

$$R = R_{\partial\Gamma} + R_V = -\sum_{b_i\in\partial\Gamma}\rho_i(x)\left[\frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\cdot\frac{\Phi_i(\lambda,x)}{r_i(x)} - u_i(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_i(\lambda,x)}{r_i(x)}\right)\right]_{x=b_i}$$
$$+\sum_{a_j\in V}\sum_{i=1}^{d(a_j)}\rho_i(x)\left[\frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\cdot\frac{\Phi_i(\lambda,x)}{r_i(x)} + u_i(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_i(\lambda,x)}{r_i(x)}\right)\right]_{x=a_j},$$

при этом все производные посчитаны в направлении «к вершинам графа».

Обозначим через $\varphi(\lambda,x)$ функцию $\frac{\Phi(\lambda,x)}{r(x)}$. Тогда, привлекая условия (2), (3), не трудно получить

$$R_{\partial\Gamma} = -\sum_{b_i\in\partial\Gamma}\rho_i(x)\frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\,\varphi_i(\lambda,x)\Big|_{x=b_i},$$
$$R_V = \sum_{a_j\in V}\left\{\sum_{i=1}^{d(a_j)}\beta_i(a_j)\frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\cdot\frac{\rho_i(x)\varphi_i(\lambda,x)}{\beta_i(a_j)} - u_1(a_j)\sum_{i=1}^{d(a_j)}\alpha_i(a_j)\rho_i(x)\frac{\partial\varphi_i(\lambda,x)}{\partial x}\right\}_{x=a_j}. \tag{6}$$

Для того, чтобы преобразованная система не содержала операций дифференцирования по x, достаточно положить

$$L\varphi = -\lambda r\varphi \tag{7}$$

и присоединить следующие краевые условия

$$\varphi(b) = 0,\quad b\in\partial\Gamma,$$
$$\varphi_i(a) = \alpha_i^*(a)\varphi_1(a),\quad \sum_{i=1}^{d(a)}\beta_i^*(a)\frac{\partial\varphi_i(a)}{\partial x} = 0,\quad a\in V, \tag{8}$$

где $\alpha_i^*(a) = \frac{\rho_1(a)\beta_i(a)}{\rho_i(a)\beta_1(a)}$, $\beta_i^*(a) = \alpha_i(a)\rho_i(a)$.

Действительно, в силу (5)–(8)

$$\mathcal{L}[L_0u] = \int\limits_{\Gamma} u(\xi)L\varphi\,d\xi = -\lambda\int\limits_{\Gamma} u(\xi)r(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = -\lambda\overline{u}(\lambda). \tag{9}$$

Таким образом, задача определения ядра преобразования свелась к спектральной задаче (7), (8). Из спектральной теории краевых задач на графе следуют следующие свойства (см. [2]):

1) Задача (7), (8) является сопряженной для краевой задачи (7), (2), (3).

2) Спектр Λ задачи (7), (2), (3) состоит из последовательности собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, не имеющей конечной предельной точки.

3) Спектры задачи (7), (2), (3) и ее сопряженной задачи совпадают с учетом кратности.

4) Система корневых (собственных и присоединенных) функций полна, т. е. всякая функция истокообразнопредставимая через функцию Грина интегрального оператора, обращающего задачу (7), (2), (3), разлагается в равномерно сходящийся на Γ ряд по корневым функциям $h_k(x)$ краевой задачи (7), (2), (3)

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k h_k(x), \quad \delta_k = \int_{\Gamma} u(x) h_k^*(x) r(x)\, dx, \tag{10}$$

где $\{h_k^*(x)\}$ — корневые функции сопряженной задачи (7), (8).

Сравнивая (10) с интегральным преобразованием (4) искомой функции u, видим, что ядро $\Phi(\lambda, x)$ определено на множестве $\Lambda \times \Gamma$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и при $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$ представляет собой произведение собственной (или присоединенной) функции h_k^* задачи (7), (8) на весовую функцию r.

Интегральный оператор $\mathcal{L} : C(\Gamma) \to l_2$ ставит в соответствие каждой функции $u \in C(\Gamma)$ последовательность $\{\overline{u}(\lambda_k)\}$ ее коэффициентов Фурье по системе корневых функций $\{h_k^*\}$:

$$\overline{u}(\lambda_k) = \int_{\Gamma} u(\xi) h_k^*(\xi) r(\xi)\, d\xi, \quad \lambda_k \in \Lambda. \tag{11}$$

Как следует из (9) преобразование $\mathcal{L}$ сопоставляет выражению (1) с краевыми условиями (2), (3) однозначно определяемое выражение $-\lambda\overline{u}$. Тем самым дифференциальная операция L_0 заменяется алгебраической операцией умножения на $-\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

Рассмотрим функцию $u \in C^2(\Gamma)$ и удовлетворяющую краевым условиям (2), (3). Как следует из сформулированных выше свойств, функция u разлагается в равномерно сходящийся ряд по корневым функциям задачи (7), (2), (3). Для такой функции можно найти преобразование $\mathcal{L}^{-1} : D \to C^2(\Gamma)$, где D — линейное многообразие в пространстве l_2, обратное интегральному преобразованию $\mathcal{L}$. Обратное преобразование

$$\mathcal{L}^{-1}\overline{u} = u(x)$$

определяется как разложение оригинала u в ряд по системе $\{h_k\}$. Из (10) находим, учитывая (11),

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \cdot \overline{u}(\lambda_k). \tag{12}$$

Резюмируя вышеизложенное, сформулируем следующее утверждение:

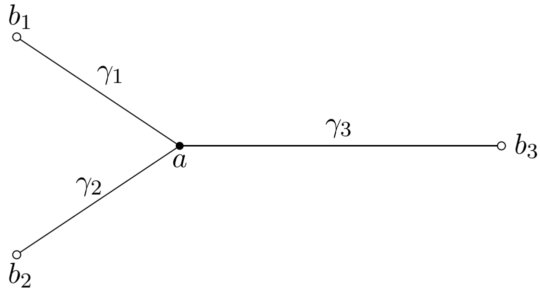
Теорема. *Для любой функции $u \in C^2(\Gamma)$, удовлетворяющей условиям* (2), (3), *имеет место формула обращения* (12), *которая совместно с* (11) *устанавливает взаимнооднозначное соответствие между функцией u и ее интегральным преобразованием $\overline{u}$.*

3. Пример построения интегрального преобразования

Пусть дифференциальное выражение

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

задано на плоском графе $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, состоящем из трех ребер γ_1, γ_2, γ_3 и одной внутренней вершины a их соединяющей, как это изображено на следующем рисунке:



Длины ребер γ_1 и γ_2 равны единице, а длина ребра γ_3 равна двум. На границе графа, в точках b_1, b_2 и b_3, заданы условия

$$u(b_i) = 0, \quad b_i \in \partial\Gamma.$$

Во внутренней вершине a задаются условия

$$u_1(a) = u_2(a) = u_3(a),$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(a) + 2\frac{\partial u_2}{\partial x}(a) + 3\frac{\partial u_3}{\partial x}(a) = 0.$$

Считаем, что производные посчитаны в направлении к вершине a.

Дифференциальное выражение задано в самосопряженной форме, поэтому $\rho(x) \equiv 1$, $r(x) \equiv 1$, $x \in \Gamma$. В соответствии с (8)

$$\alpha_1^*(a) = 1, \quad \alpha_2^*(a) = 2, \quad \alpha_3^*(a) = 3,$$
$$\beta_1^*(a) = \beta_2^*(a) = \beta_3^*(a) = 1.$$

Задача (7), (8) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda\varphi = 0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\varphi(b_i) = 0, \quad b_i \in \partial\Gamma, \quad i = 1,2,3, \\ &\varphi_2(a) = 2\varphi_1(a), \quad \varphi_3(a) = 3\varphi_1(a), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(a) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(a) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(a) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Функции

$$\psi_{1i}(x,\lambda) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda}\|x - b_i\|), & x \in \gamma_i, \\ 0, & x \in \Gamma \backslash \gamma_i, \end{cases}$$

$$\psi_{2i}(x,\lambda) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\lambda}\|x - b_i\|), & x \in \gamma_i, \\ 0, & x \in \Gamma \backslash \gamma_i, \end{cases}$$

$i = 1,2,3$, образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (13).

Пусть l_k, $k = 1,\dots,6$, — набор линейных функционалов, определяющих систему уравнений (14). Рассмотрим характеристический определитель $\Delta(\lambda) = \det \|l_k(\psi_{ji}(\cdot,\lambda))\|$ $j = 1,2$, $i = 1,2,3$, который путем несложных преобразований приводится к виду

$$\Delta(\lambda) = -3\sqrt{\lambda}\cdot\sin^2\sqrt{\lambda}\cdot(4\sin^2\sqrt{\lambda}-3).$$

Собственные значения задачи (13), (14) суть нули характеристического определителя. Решая уравнение $\Delta(\lambda) = 0$, получим три последовательности нулей определителя $\Delta(\lambda)$:

$$\lambda_k^{(1)} = \left(\pi k - \frac{2\pi}{3}\right)^2, \quad \lambda_k^{(2)} = \left(\pi k - \frac{\pi}{3}\right)^2, \quad \lambda_k^{(3)} = (\pi k)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При этом кратность нулей $\lambda_k^{(1)}$ и $\lambda_k^{(2)}$ равна единице, а кратность $\lambda_k^{(3)}$ равна двум.

Представим спектр Λ задачи (13), (14) в виде возрастающей последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем каждое собственное значение входит в Λ столько раз, какова его кратность. Собственные функции $h_k^*(x)$ задачи (13), (14) имеют вид:

$$h_{4n-3}^*(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x-b_1\|), & x \in \gamma_1,\\ 2\sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x-b_2\|), & x \in \gamma_2,\\ (-1)^{n+1}3\sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x-b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n-2}^*(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x-b_1\|), & x \in \gamma_1,\\ 2\sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x-b_2\|), & x \in \gamma_2,\\ (-1)^{n}3\sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x-b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n-1}^*(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-1}}\|x-b_1\|), & x \in \gamma_1,\\ 0, & x \in \gamma_2,\\ (-1)^{n+1}\sin(\sqrt{\lambda_{4n-1}}\|x-b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n}^*(x) = \begin{cases} 0, & x \in \gamma_1,\\ \sin(\sqrt{\lambda_{4n}}\|x-b_2\|), & x \in \gamma_2,\\ (-1)^{n+1}\sin(\sqrt{\lambda_{4n}}\|x-b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Собственные функции $h_k(x)$ сопряженной для (13), (14) задачи определяются следующим образом:

$$h_{4n-3}(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x-b_1\|), & x \in \gamma_1,\\ \sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x-b_2\|), & x \in \gamma_2,\\ (-1)^{n+1}\sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x-b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n-2}(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x-b_1\|), & x \in \gamma_1,\\ \sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x-b_2\|), & x \in \gamma_2,\\ (-1)^{n}\sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x-b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n-1}(x) = \begin{cases} 3\sin(\sqrt{\lambda_{4n-1}}\|x-b_1\|), & x \in \gamma_1,\\ 0, & x \in \gamma_2,\\ (-1)^{n+1}\sin(\sqrt{\lambda_{4n-1}}\|x-b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \gamma_1, \\ \sin(\sqrt{\lambda_{4n}}\|x - b_2\|), & x \in \gamma_2, \\ (-1)^n \sin(\sqrt{\lambda_{4n}}\|x - b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Прямое интегральное преобразование, согласно (11), имеет вид

$$\overline{u}(\lambda_k) = \int\limits_{\Gamma} u(\xi) h_k^*(\xi)\, d\xi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Обратное преобразование (формула обращения), в соответствии с (12) принимает вид

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{u}\,(\lambda_k) h_k(x).$$

Литература

1. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.—М.: Физматгиз, 1961.
2. *Завгородний М. Г.* Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // Докл. РАН.—1994.—Т. 335, № 3.—С. 281–282.
3. *Завгородний М. Г., Кулаев Р. Ч.* О непрерывной зависимости точек спектра краевой задачи на графе от параметров условий согласования // Владикавк. мат. журн.—2004.
4. *Мартыненко Н. А., Пустыльников Л. М.* Конечные интегральные преобразования.—М.: Физматгиз, 1956.
5. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике.—М.: Физматгиз, 1956.

Статья поступила 1 ноября 2004 г.

Кулаев Руслан Черменович, к. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН