Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, выпуск 4, С. 23–30

УДК **539.3**

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ПРИЗМЫ С РОМБОЭДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ[1]

К. А. Ватульян, Ю. А. Устинов

К столетию со дня рождения академика С. Л. Соболева

На основе метода однородных решений даются решения задач Сен-Венана о растяжении, чистом изгибе призмы с прямолинейной ромбоэдрической анизотропией. Задача кручения сводится к двумерной краевой задаче для уравнений в частных производных. Доказывается ее разрешимость и дается вариационная постановка.

Ключевые слова: ромбоэдрическая анизотропия, задачи Сен-Венана, метод однородных решений, нанотрубки.

1. Введение

В настоящее время интенсивно развиваются нанотехнологии, области применения которых очень разнообразны [1]. Основными структурными элементами новых материалов являются углеродные нанотрубки — протяженные цилиндрические тела диаметром от одного до нескольких десятков нанометров и длиной до нескольких сантиметров, которые состоят из одной или нескольких свернутых в трубку гексагональных графитовых плоскостей (графенов) и заканчиваются обычно полусферической головкой. По своему молекулярному строению они очень схожи с графитом. Монокристаллический графит обладает сильной анизотропией молекулярного строения, которая находит отражение в сильной анизотропии его макроскопических свойств.

По анизотропии структуры и свойств графит наиболее часто относится к гексагональному типу симметрии. Гексагональный графит именуют также α-графитом. В природном графите наряду с такой основной модификацией десятки процентов составляет также β-графит с несколько другой симметрией, относящейся к ромбоэдрической системе.

Сами нанотрубки стали объектом исследований в механике относительно недавно. В частности, с точки зрения идентификации их свойств таких, например, как жесткости, необходимо иметь решение простейших задач о растяжении, кручении и изгибе таких структур. В статье [2] была сделана попытка исследовать напряженно-деформированное

[1]Статья подготовлена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00254а.

состояние (НДС) нанотрубки на основе решений задач Сен-Венана о растяжении и кручении призматической и цилиндрической нанотрубок при помощи полуобратного метода. Анализ этой работы показал, что при построении решения авторами допущены существенные ошибки.

В настоящей работе на основе спектральной теории операторов построение решений Сен-Венана задач растяжения, кручения и чистого изгиба для призмы из материала с ромбоэдрической симметрией сводится к решению двумерных задач на поперечном сечении. Данное исследование является продолжением работы [3]. Достаточно подробно основы метода изложены в [4, 5].

2. Операторная форма записи уравнений теории упругости

Рассмотрим равновесие упругого цилиндра (призмы), занимающего объем $V = S \times [0, L]$; здесь S — поперечное сечение цилиндра; L — его длина; ∂S — граница S; $\Gamma = \partial S \times L$ — боковая поверхность цилиндра. Свяжем с этим телом декартову систему координат x_1, x_2, x_3. Ось $x_3 = x$ параллельна образующей цилиндра, проходит через геометрические центры тяжести сечения, оси x_1 и x_2 направлены по главным осям инерции сечения.

Будем считать, что материал цилиндра имеет ромбоэдрическую симметрию упругих свойств. В этом случае обобщенный закон Гука можно записать в виде [6]:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\sigma},\\
&\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T,\\
&\boldsymbol{e} = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{23}, 2e_{13}, 2e_{12})^T,
\end{aligned}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, e_{ij} — компоненты тензора деформаций, а матрицы $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}^{-1}$ имеют следующую структуру, описанную в [7]:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0\\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0\\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0\\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{66} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0\\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0\\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0\\ s_{14} & -s_{14} & 0 & s_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{14}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{14} & s_{66} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \sigma_{1k}\boldsymbol{i}_1 + \sigma_{2k}\boldsymbol{i}_2 + \sigma_{3k}\boldsymbol{i}_3$$

вектор напряжений на площадках с нормалью, параллельной орту декартовой системы координат $\boldsymbol{i}_k$. Используя введенные обозначения, обобщенный закон Гука перепишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma}_k = (B_k\boldsymbol{u} + A_{k3}\partial\boldsymbol{u}), \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{u}$ — вектор перемещений,

$$A_{11} = \begin{Vmatrix} c_{11} & 0 & 0\\ 0 & c_{66} & c_{14}\\ 0 & c_{14} & c_{44} \end{Vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{Vmatrix} c_{14} & 0 & 0\\ 0 & c_{11} & -c_{14}\\ 0 & -c_{14} & c_{44} \end{Vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{Vmatrix} c_{44} & 0 & 0\\ 0 & c_{44} & 0\\ 0 & 0 & c_{33} \end{Vmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{Vmatrix} 0 & c_{12} & c_{14}\\ c_{66} & 0 & 0\\ c_{14} & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{Vmatrix} 0 & c_{14} & c_{13}\\ c_{14} & 0 & 0\\ c_{44} & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_{23} = \begin{Vmatrix} c_{44} & 0 & 0\\ 0 & -c_{14} & c_{13}\\ 0 & c_{44} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_{ij} = A^*_{ji}, \quad B_k = A_{k1}\partial_1 + A_{k2}\partial_2.$$

Здесь и ниже индекс $*$ используется для обозначения сопряженных матриц и операторов (в данном случае A_{ij}^* — транспонированная матрица A_{ij}); c_{ij} — упругие постоянные материала (в рассматриваемом случае независимых постоянных 6); греческий индекс принимает значения 1, 2, латинский — 1, 2, 3.

Уравнения равновесия в напряжениях запишем в виде

$$\partial_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha + \partial \boldsymbol{\sigma}_3 = 0. \tag{2}$$

Операторную форму уравнений равновесия в перемещениях получаем после подстановки (1) в (2)

$$L\,(\partial)\,\boldsymbol{u} \equiv -\partial^2 C\boldsymbol{u} - \partial B\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u} = 0,$$

здесь

$$C = A_{33}, \quad B = B_3 + \partial_1 A_{13} + \partial_2 A_{23}, \quad A = -\partial_\alpha \partial_\beta A_{\alpha\beta}.$$

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений, т. е.

$$n_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha \Big|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, 0)$ — единичная внешняя нормаль к Γ.

Подставив в условие (3) $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$, выраженные формулами (1), представим также в операторном виде условия отсутствия напряжений на боковой поверхности цилиндра

$$M\,(\partial)\,\boldsymbol{u} \equiv \left(\partial G + G'\right) \boldsymbol{u}\big|_\Gamma = 0.$$

Здесь

$$G = n_\alpha A_{\alpha 3}, \quad G' = n_\alpha \partial_\beta A_{\alpha\beta}.$$

Будем рассматривать $\boldsymbol{u}$ как вектор-функцию $\boldsymbol{u}(x)$ со значениями в гильбертовом пространстве $H = L_2(S)$, в котором скалярное произведение определяется так:

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \int\limits_S \boldsymbol{u}_1(x) \cdot \overline{\boldsymbol{u}_2(x)}\, dS = \int\limits_S u_{k1} \overline{u_{k2}}\, dS.$$

Можно также воспользоваться единой формой записи соотношений:

$$L_1\,(\partial)\,\boldsymbol{u} \equiv \{L\,(\partial)\,\boldsymbol{u}, M\,(\partial)\,\boldsymbol{u}\} = 0. \tag{4}$$

Определение. Однородным решением будем называть любую вектор-функцию $\boldsymbol{u}(x)$, удовлетворяющую уравнению (4).

3. Однородные элементарные решения

Будем отыскивать решение уравнения (4) в виде

$$\boldsymbol{u}(x) = e^{\gamma x} \boldsymbol{a}(x_1, x_2). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получаем спектральную задачу на сечении цилиндра

$$L_1(\gamma)\boldsymbol{a} = 0, \tag{6}$$

которая заключается в том, что необходимо найти множество собственных значений (СЗ) $\{\gamma_s\}$ таких, что при подстановке любого из них в уравнение (6) соответствующая краевая задача имеет нетривиальное решение $\boldsymbol{a}_s$, которое будем называть собственным вектором (СВ).

Элементарным решением (ЭР) задачи (6), отвечающим простому СЗ γ_s и СВ $\boldsymbol{a}_s$, будем называть вектор-функцию вида

$$\boldsymbol{u}_s(x) = e^{\gamma_s x}\boldsymbol{a}_s(x_1, x_2).$$

Спектр представляет собой счетное множество с точкой сгущения на бесконечности, симметрично расположенное в комплексной плоскости γ. Как будет показано ниже, решению Сен-Венана отвечает 12-кратное СЗ $\gamma_0 = 0$. Поэтому общее решение может быть представлено в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_S + \boldsymbol{u}_p\,, \quad \boldsymbol{u}_S = \sum_{k=1}^{12} C_k u_k(x).$$

Здесь $\boldsymbol{u}_S$ — решение Сен-Венана, $\boldsymbol{u}_p$ — решение, отвечающее остальной части спектра. Первое является «основным», поскольку охватывает всю область, занятую призмой; второе — «погранслоем», поскольку локализуется вблизи торцов призмы $x_3 = 0, L$ и экспоненциально убывает по мере удаления от них.

4. Элементарные решения Сен-Венана

Для построения элементарных решений Сен-Венана (ЭРСВ) рассмотрим смещение цилиндра как твердого тела

$$\begin{aligned} u_1^0 &= a_1^0 + \omega_2 x - \omega_3 x_2, \\ u_2^0 &= a_2^0 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x, \\ u_3^0 &= a_3^0 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1. \end{aligned}$$

a_k^0 — компоненты вектора поступательного перемещения, ω_k — компоненты вектора малого поворота. Очевидно, что вектор $\boldsymbol{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ является однородным решением, поскольку удовлетворяет уравнениям равновесия и однородным граничным условиям на боковой поверхности (3). Представим его в следующем виде

$$\boldsymbol{u}^0 = \sum_{\ell=1}^{6} C_\ell \boldsymbol{u}_\ell(x). \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}_1(x) = \boldsymbol{a}_0^1, \quad \boldsymbol{u}_2(x) = x\boldsymbol{a}_0^1 + \boldsymbol{a}_1^1, \quad \boldsymbol{u}_3(x) = \boldsymbol{a}_0^2, \\ \boldsymbol{u}_4(x) = x\boldsymbol{a}_0^2 + \boldsymbol{a}_1^2, \quad \boldsymbol{u}_5(x) = \boldsymbol{a}_0^3, \quad \boldsymbol{u}_6(x) = \boldsymbol{a}_0^4, \\ \boldsymbol{a}_0^1 = (1,0,0)^T, \quad \boldsymbol{a}_1^1 = (0,0,-x_1)^T, \\ \boldsymbol{a}_0^2 = (0,1,0)^T, \quad \boldsymbol{a}_1^2 = (0,0,-x_2)^T, \\ \boldsymbol{a}_0^3 = (0,0,1)^T, \quad \boldsymbol{a}_0^4 = (-x_2, x_1, 0)^T, \\ C_1 = a_1^0, \quad C_2 = \omega_2, \quad C_3 = a_2^0, \\ C_4 = -\omega_1, \quad C_5 = a_3^0, \quad C_6 = \omega_3. \end{gathered} \tag{8}$$

Из представления (7), (8) следует, что, во-первых, $\gamma_0 = 0$ является собственным значением; во-вторых, ему соответствует по крайней мере четыре собственных вектора $\boldsymbol{a}_0^j$,

$j = 1, 2, 3, 4$, и, в-третьих, $\boldsymbol{a}_1^1$, $\boldsymbol{a}_1^2$ являются присоединенными векторами. Элементарные решения (8) составляют только половину системы ЭРСВ, соответствующих γ_0.

Поскольку напряжения, отвечающие решениям $\boldsymbol{u}_k$, $k = 1, \ldots, 6$, равны нулю, то эту группу решений будем называть тривиальными.

Определение остальных (нетривиальных) решений осуществляется путем построения жордановых цепочек так, как это показано в [4]. Для нетривиальных решений Сен-Венана характерно то, что их интегральные характеристики

$$Q_i = \int_S \sigma_{i3}\, dS, \quad M_1 = \int_S x_2\sigma_{33}\, dS,$$
$$M_2 = -\int_S x_1\sigma_{33}\, dS, \quad M_3 = \int_S (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13})\, dS,$$

где Q_1, Q_2 — поперечные силы, Q_3 — продольная сила, M_1, M_2 — изгибающие моменты, M_3 — крутящий момент, отличны от нуля.

Для каждого ЭР «погранслоя» эти интегральные характеристики равны нулю.

5. Нетривиальные решения

1. Первое нетривиальное решение будем отыскивать в виде

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u} = \varepsilon x_3 \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1, \\ \boldsymbol{a}_0 = (0,0,1)^T, \quad \boldsymbol{a}_1 = (a_1, a_2, a_3)^T, \quad a_i = a_i(x_1, x_2), \end{gathered} \tag{9}$$

где ε — произвольная постоянная.

На основе соотношений закона Гука для напряжений получаем следующие выражения:

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = \sigma_{11}^0 + c_{13}\varepsilon, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^0, \\ \sigma_{13} = \sigma_{13}^0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^0 + c_{13}\varepsilon, \\ \sigma_{23} = \sigma_{23}^0, \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}^0 + c_{33}\varepsilon, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} \sigma_{11}^0 = c_{11}\partial_1 a_1 + c_{12}\partial_2 a_2 + c_{14}\partial_2 a_3, \quad \sigma_{22}^0 = c_{12}\partial_1 a_1 + c_{11}\partial_2 a_2 - c_{14}\partial_2 a_3, \\ \sigma_{33}^0 = c_{13}\partial_1 a_1 + c_{13}\partial_2 a_2, \quad \sigma_{23}^0 = c_{14}(\partial_1 a_1 - \partial_2 a_2) + c_{44}\partial_2 a_3, \\ \sigma_{13}^0 = c_{44}\partial_1 a_3 + c_{14}(\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1), \quad \sigma_{12}^0 = c_{14}\partial_1 a_3 + c_{66}(\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1). \end{gathered} \tag{11}$$

Подстановка выражений (10) в уравнения равновесия (2) и граничные условия (3) приводит к следующей краевой задаче относительно функций a_1, a_2, a_3:

$$\begin{gathered} \partial_1\sigma_{11}^0 + \partial_2\sigma_{12}^0 = 0, \\ \partial_1\sigma_{12}^0 + \partial_2\sigma_{22}^0 = 0, \\ \partial_1\sigma_{13}^0 + \partial_2\sigma_{23}^0 = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} n_1\sigma_{11}^0 + n_2\sigma_{12}^0 = -n_1 c_{13}\varepsilon, \\ n_1\sigma_{12}^0 + n_2\sigma_{22}^0 = -n_2 c_{13}\varepsilon, \\ n_1\sigma_{13}^0 + n_2\sigma_{23}^0 = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Решение краевой задачи (12), (13), которому отвечает единственное нетривиальное напряженно-деформированное состояние (НДС), имеет вид:

$$a_1 = -\varepsilon\nu x_1, \quad a_2 = -\varepsilon\nu x_2, \quad a_3 = 0,$$

где

$$\nu = \frac{c_{13}}{c_{11}+c_{12}}.$$

На основании (9), (11) получаем

$$\begin{gathered}\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{23}=0, \quad \sigma_{33}=E\varepsilon,\\ \sigma_{13}=-2\nu\varepsilon c_{14}, \quad \sigma_{12}=-2\nu\varepsilon c_{66},\\ E=-2\nu c_{13}+c_{33}.\end{gathered}$$

Из приведенных формул вытекает, что ε — относительное удлинение, а E можно рассматривать как модуль Юнга на растяжение.

Построенному ЭР отвечают следующие интегральные характеристики

$$Q_1=-2\nu c_{14}|S|\varepsilon, \quad Q_2=0, \quad Q_3=E|S|\varepsilon, \quad M_i=0,$$

где $|S|$ — площадь поперечного сечения.

2. Второе нетривиальное решение будем отыскивать в виде [4]:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}=\alpha x_3\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1,\\ \boldsymbol{a}_0=(-x_2,x_1,0)^T, \quad \boldsymbol{a}_1=(a_1,a_2,a_3)^T, \quad a_i=a_i(x_1,x_2),\end{gathered} \tag{14}$$

где α — относительный угол закручивания (произвольная постоянная). Определяя на основании (14) компоненты тензора деформаций и подставляя их затем в (1), а также используя выражения (11), получаем:

$$\begin{gathered}\sigma_{11}=\sigma_{11}^0-\alpha c_{14}x_2, \quad \sigma_{12}=\sigma_{12}^0-\alpha c_{14}x_2,\\ \sigma_{13}=\sigma_{13}^0-\alpha c_{44}x_2, \quad \sigma_{22}=\sigma_{22}^0-\alpha c_{14}x_1,\\ \sigma_{23}=\sigma_{23}^0+\alpha c_{44}x_1, \quad \sigma_{33}=\sigma_{33}^0.\end{gathered} \tag{15}$$

Подстановка выражений (15) в уравнения равновесия (2) и граничные условия (3) приводит к следующей краевой задаче относительно функций a_1, a_2, a_3:

$$\begin{gathered}\partial_1\sigma_{11}^0+\partial_2\sigma_{12}^0=0,\\ \partial_1\sigma_{12}^0+\partial_2\sigma_{22}^0=0,\\ \partial_1\sigma_{13}^0+\partial_2\sigma_{23}^0=0,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}n_1\sigma_{11}^0+n_2\sigma_{12}^0=\alpha c_{14}(n_1x_1-n_2x_2)=f_1,\\ n_1\sigma_{12}^0+n_2\sigma_{22}^0=-\alpha c_{14}(n_1x_2+n_2x_1)=f_2,\\ n_1\sigma_{13}^0+n_2\sigma_{23}^0=\alpha c_{44}(-n_1x_2+n_2x_1)=f_3.\end{gathered} \tag{17}$$

Однородная краевая задача ($f_1=f_2=f_3=0$) имеет два нетривиальных решения $\boldsymbol{a}_0=(-x_2,x_1,0)$ и $\boldsymbol{a}_0'=(0,0,1)$. Поэтому неоднородная задача (16), (17) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются условия разрешимости:

$$(L(0)\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_0)=0, \quad (L(0)\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_0')=0,$$

которые эквивалентны следующим:

$$\oint\limits_{\partial S}(-f_1x_2+f_2x_1)\,ds=0, \qquad \oint\limits_{\partial S}f_3\,ds=0.$$

Легко проверить, что они действительно выполняются. Имеем:

$$\oint_{\partial S}(x_1f_2-x_2f_1)\,ds=\alpha c_{14}\oint_{\partial S}\left[2n_1x_1x_2+n_2(x_1^2-x_2^2)\right]\,ds$$
$$=\alpha c_{14}\int_S\left[\partial_1(2x_1x_2)+\partial_2(x_1^2-x_2^2)\right]\,dS=0,$$
$$\oint_{\partial S}f_3\,ds=\alpha c_{44}\oint_{\partial S}(n_1x_2-n_2x_1)\,ds=\alpha c_{44}\int_S(\partial_1x_2-\partial_2x_1)\,dS=0.$$

3. Третье нетривиальное решение, в соответствии с [4], будем отыскивать в виде:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}=\frac{x_3^2}{2}\boldsymbol{a}_1+x_3\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\\ \boldsymbol{a}_1=(1,0,0),\quad \boldsymbol{a}_2=(0,0,-x_1),\quad \boldsymbol{a}_3=(a_1,a_2,a_3),\\ a_1=a_1(x_1,x_2),\quad a_2=a_2(x_1,x_2),\quad a_3=a_3(x_1,x_2).\end{gathered}\tag{18}$$

Определяя на основании (18) компоненты тензора деформаций и подставляя их затем в (1), а также используя выражения (11), получаем:

$$\begin{aligned}&\sigma_{11}=\sigma_{11}^0-c_{13}x_1,\quad \sigma_{12}=\sigma_{12}^0,\\ &\sigma_{13}=\sigma_{13}^0,\quad \sigma_{22}=\sigma_{22}^0-c_{13}x_1,\\ &\sigma_{23}=\sigma_{23}^0,\quad \sigma_{33}=\sigma_{33}^0-c_{33}x_1.\end{aligned}\tag{19}$$

Уравнения равновесия в данном случае выглядят так:

$$\begin{aligned}&\partial_1\sigma_{11}^0+\partial_2\sigma_{12}^0=c_{13},\\ &\partial_1\sigma_{12}^0+\partial_2\sigma_{22}^0=0,\\ &\partial_1\sigma_{13}^0+\partial_2\sigma_{23}^0=0.\end{aligned}\tag{20}$$

Граничные условия

$$\begin{aligned}&n_1\sigma_{11}^0+n_2\sigma_{12}^0=n_1c_{13}x_1,\\ &n_1\sigma_{12}^0+n_2\sigma_{22}^0=n_2c_{13}x_1,\\ &n_1\sigma_{13}^0+n_2\sigma_{23}^0=0.\end{aligned}\tag{21}$$

Задача (20)–(21) имеет решение

$$\boldsymbol{a}_3=(\psi_1,\psi_2,0)^T,\quad \psi_1=\frac{\nu}{2}(x_1^2-x_2^2),\quad \psi_2=\nu x_1x_2.\tag{22}$$

Подставляя выражения (22) в (19), получаем следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{23}=\sigma_{13}=\sigma_{12}=0,\quad \sigma_{33}=-Ex_1.$$

Построенному решению удовлетворяют следующие интегральные характеристики:

$$Q_1=Q_2=Q_3=0,\quad M_1=M_3=0,\quad M_2=-EI_{x_2}.$$

6. Вариационная постановка задачи кручения

Краевая задача (16), (17) эквивалентна нахождению минимума следующего квадратичного функционала:

$$\Phi(\boldsymbol{a}_1)\equiv\int_S\sigma_{ij}^0e_{ij}^0\,dS+l(\boldsymbol{a}_1),\tag{23}$$

где суммирование по $i,j=1,2,3$;

$$l(a_1) = -2\alpha C_{14} \int\limits_S (e^0_{11}x_2 + e^0_{22}x_1 + e^0_{12}x_2 + e^0_{13}x_2 - e^0_{23}x_1)\, dS,$$

$$e^0_{11} = \partial_1 a_1, \quad e^0_{22} = \partial_2 a_2, \quad 2e^0_{12} = \partial_1 a_2 + \partial_2 a_1,$$

$$2e^0_{13} = \partial_1 a_3, \quad 2e^0_{23} = \partial_2 a_3.$$

Для построения единственного решения задачи (23) необходимо потребовать выполнение дополнительных условий:

$$\int\limits_S (a_1 x_2 - a_2 x_1)\, dS = 0, \quad \int\limits_S a_3\, dS = 0.$$

Литература

1. *Иванова Е. А., Индейцев Д. А., Морозов Н. Ф.* К вопросу об определении параметров жесткости нанообъектов // ЖТФ.—2006.—Т. 76, вып. 10.—С. 74–80.
2. *Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Упругие свойства графитовых стержней и многослойных углеродных нанотрубок (кручение и растяжение) // МТТ.—2005.—№ 4.—С. 42–56.
3. *Ватульян К. А., Устинов Ю. А.* Задача Сен-Венана для графитовых стержней и углеродных нанотрубок // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды X международной конференции. Ростов-на-Дону, 5–9 декабря 2006 г.—Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2007.— С. 299–303.
4. *Устинов Ю. А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров.—М.: Наука, 2003.—128 с.
5. *Устинов Ю. А.* Решение задачи Сен-Венана для стержня с винтовой анизотропией // Докл. РАН.—2001.—Т. 360, № 6.—С. 770–773.
6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела.—М.: Наука, 1977.—415 с.
7. *Шаскольская М. П.* Кристаллы.—М.: Наука, 1985.—208 с.

Статья поступила 22 сентября 2008 г.

Устинов Юрий Анатольевич
Южный федеральный университет, *проф. каф. теории упругости*
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А;
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН, *гл. научн. сотр.*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

Ватульян Карина Александровна
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А
E-mail: `vatulyan-karina@mail.ru`