Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 3, С. 36–41

УДК **519.46**

ЗАМКНУТЫЕ ПАРЫ[1]

В. А. Койбаев

Работа посвящена изучению замкнутых пар абелевых групп (замкнутых элементарных сетей степени 2). Элементарная сеть σ (сеть без диагонали) называется замкнутой, если ее элементарная группа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Установлено, что пара аддитивных подгрупп кольца многочленов от одной переменной с коэффициентами из области целостности является замкнутой.

Ключевые слова: сеть, элементарная сеть, замкнутая сеть, сетевая группа, элементарная группа, трансвекция.

1. Введение

Напомним, что элементарная сеть σ (сеть без диагонали) называется *замкнутой*, если ее элементарная группа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Замкнутые пары мы строим из подгрупп кольца многочленов.

Пусть $R_1[x]$ — кольцо многочленов (от переменной x с коэффициентами из области целостности R) с нулевым свободным членом.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть A, B — аддитивные подгруппы из $R_1[x]$. Тогда пара (A, B) является замкнутой. Другими словами, если $t_{12}(\beta)$ или $t_{21}(\alpha)$ содержится в элементарной группе $\langle t_{21}(A), t_{12}(B)\rangle$, то $\beta \in B$, $\alpha \in A$.*

Мы пользуемся следующим стандартным набором определений и обозначений.

Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо с 1. Если A, B — подгруппы аддитивной группы кольца Λ, то через AB мы обозначаем подгруппу аддитивной группы кольца Λ, порожденную всеми произведениями ab, $a \in A$, $b \in B$.

Пусть e — единичная матрица порядка n, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули. Если $\alpha \in \Lambda$, то через $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ обозначается элементарная трансвекция. Положим, далее, $t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \alpha \in A\}$.

Для элементарной сети σ через $E(\sigma)$ обозначается элементарная группа:

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\rangle.$$

Далее, R — произвольная (коммутативная) область целостности с 1, $R[x]$ — кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами из R.

Для неотрицательного m через $R_m[x]$ мы обозначаем идеал кольца $R[x]$:

$$R_m[x] = Rx^m + Rx^{m+1} + \ldots$$

На протяжении всей статьи предполагается, что n — натуральное число, $n \geqslant 2$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00342.

2. Замыкание сети

Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца Λ называется *сетью* [1] (или *ковром* [2]) *над кольцом* Λ порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j.

Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарный ковер* [3], [4, вопрос 15.46]). Таким образом, элементарная сеть — это набор $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца Λ, для которых $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных чисел i, r, j.

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца Λ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети.

Хорошо известно (см., например, [1]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \tag{1}$$

для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}, \tag{2}$$

где суммирование берется по всем k отличным от i.

Ясно, что элементарная сеть может быть дополнена до сети не всегда единственным способом. Однако, очевидно, формула (2) (при выполнении условий (1)) позволяет дополнить элементарную сеть σ наименьшей диагональю. Как мы увидим ниже не всякая элементарная сеть является дополняемой.

Для элементарной сети σ рассмотрим элементарную сеть $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{ij})$, индуцированную трансвекциями из элементарной группы $E(\sigma)$. А именно, для любых $i \neq j$ положим

$$\bar{\sigma}_{ij} = \{\alpha \in \Lambda : t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)\}.$$

В силу известного коммутаторного соотношения $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{ij})$ является элементарной сетью.

Определение. Элементарную сеть $\bar{\sigma}$ называют *замыканием сети* σ. Если $\sigma = \bar{\sigma}$, то сеть σ называют *замкнутой*.

Очевидно, что примерами замкнутых элементарных сетей являются дополняемые сети (для дополняемой сети σ определена сетевая группа $G(\sigma)$).

Замечание 1. Понятие допустимой (замкнутой) сети стало известно автору из работ В. М. Левчука (см., например, [4, вопрос 15.46]), однако, на наш взгляд (см. предложение 1), термин «замкнутая сеть» лучше отражает суть определения.

Из [6, предложения 4, 5] вытекает следующее

Предложение 1. 1) *Операция замыкания обладает следующими свойствами* (*замыкания в топологическом пространстве*)*:*

$$\sigma \subseteq \bar{\sigma}; \quad \sigma \subseteq \tau \Rightarrow \bar{\sigma} \subseteq \bar{\tau}; \quad \bar{\sigma} = \bar{\bar{\sigma}}; \quad \overline{\sigma \cap \tau} \subseteq \bar{\sigma} \cap \bar{\tau}.$$

2) *Пересечение замкнутых сетей является замкнутой сетью.*

3) *Пусть* $\sigma \subseteq \tau$ *и* τ *— замкнутая сеть. Тогда* $\sigma \subseteq \bar{\sigma} \subseteq \tau$. *В частности,* $\bar{\sigma}$ *— наименьшая замкнутая сеть, содержащая* σ.

Положим $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2$, далее, $\sigma_1 \vee \sigma_2 = \overline{\sigma_1 \cup \sigma_2}$, где $\sigma_1 \cup \sigma_2$ — сеть равная пересечению всех элементарных сетей, содержащих σ_1 и σ_2.

Следствие. *Множество замкнутых (допустимых) сетей является структурой (подструктурой всех элементарных сетей), содержащей структуру всех дополняемых сетей.*

3. Формулы в $E_2(\Lambda)$

В этом параграфе $n = 2$ и мы рассматриваем формулы для матриц второго порядка из элементарной группы $E_2(\Lambda) = \langle t_{12}(\Lambda), t_{21}(\Lambda)\rangle$ (все элементы α_i, $i = 1, 2, \ldots$, берутся из кольца Λ).

Пусть $S_{2k+1} = t_{21}(\alpha_1)t_{12}(\alpha_2)\ldots t_{21}(\alpha_{2k+1})$, $S_{2k} = t_{21}(\alpha_1)t_{12}(\alpha_2)\ldots t_{12}(\alpha_{2k})$. Рассмотрим S_n для $n = 2, 3$:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 1+\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1+\alpha_2\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3 & 1+\alpha_2\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Мы определим рекуррентные формулы для второй строки матрицы S_n (аналогичные формулы справедливы и для первой строки матрицы S_n).

Через $(,)_n$ обозначим вторую строку матрицы S_n. Ясно, что

$$(,)_1 = (\alpha_1, 1), \quad (,)_2 = (\alpha_1, 1+\alpha_1\alpha_2), \quad (,)_3 = (\alpha_1+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3, 1+\alpha_1\alpha_2).$$

Для натуральных m, n, $m \leqslant n$, определим функции $\varphi_n^m = \varphi_n^m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ следующим образом:

$$\varphi_{2n+1}^1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1} \ (n \geqslant 0), \quad \varphi_{2n}^2 = \alpha_2\varphi_1^1 + \alpha_4\varphi_3^1 + \ldots + \alpha_{2n}\varphi_{2n-1}^1 \ (n \geqslant 1),$$

$$\varphi_{2n+1}^3 = \alpha_3\varphi_2^2 + \alpha_5\varphi_4^2 + \ldots + \alpha_{2n+1}\varphi_{2n}^2, \quad \varphi_{2n}^4 = \alpha_4\varphi_3^3 + \alpha_6\varphi_5^3 + \ldots + \alpha_{2n}\varphi_{2n-1}^3,$$

$$\varphi_{2n+1}^{2m+1} = \alpha_{2m+1}\varphi_{2m}^{2m} + \alpha_{2m+3}\varphi_{2m+2}^{2m} + \ldots + \alpha_{2n+1}\varphi_{2n}^{2m}, \quad m \leqslant n, \tag{3}$$

$$\varphi_{2n}^{2m} = \alpha_{2m}\varphi_{2m-1}^{2m-1} + \alpha_{2m+2}\varphi_{2m+1}^{2m-1} + \ldots + \alpha_{2n}\varphi_{2n-1}^{2m-1}, \quad m \leqslant n. \tag{4}$$

Предложение 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $\varphi_n^n = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$;

2) φ_n^m *— сумма произведений элементов* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *причем каждое произведение содержит* m *сомножителей из этих элементов;*

3a) *если* $\varphi_{2n+1}^{2k+1} = \varphi_{2n-1}^{2k+1} + \alpha_{2n+1}\varphi_{2n}^{2k}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $n \geqslant 1$, *то*

$$\varphi_{2n+1}^{2n+1} = \alpha_{2n+1}\varphi_{2n}^{2n};$$

3b) *если* $\varphi_{2n}^{2k} = \varphi_{2n-2}^{2k} + \alpha_{2n}\varphi_{2n-1}^{2k-1}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$, *то*

$$\varphi_{2n}^{2n} = \alpha_{2n}\varphi_{2n-1}^{2n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

$\lhd$ Очевидно, что 1) вытекает из 3a) и 3b). Далее, 2) вытекает из рекуррентного определения функции φ_n^m. Докажем 3a) (аналогично доказывается 3b)). По определению (см. (3))

$$\varphi_{2n-1}^{2k+1} = \alpha_{2k+1}\varphi_{2k}^{2k} + \alpha_{2k+3}\varphi_{2k+2}^{2k} + \ldots + \alpha_{2n-1}\varphi_{2n-2}^{2k},$$

причем $2k+1 \leqslant 2m+1$, $k \leqslant m-1$. Тогда $\varphi^{2k+1}_{2n+1} = \varphi^{2k+1}_{2n-1} + \alpha_{2n+1}\varphi^{2k}_{2n}$. Наконец из (3) для $m=n$ мы имеем $\varphi^{2n+1}_{2n+1} = \alpha_{2n+1}\varphi^{2n}_{2n}$. $\rhd$

Предложение 3. *Формулы для второй строчки матрицы S_n при $n = 2,3,4$ выглядят следующим образом:*

$$(\,,)_2 = (\varphi^1_1, 1+\varphi^2_2), \quad (\,,)_3 = (\varphi^1_3 + \varphi^3_3, 1+\varphi^2_2), \quad (\,,)_4 = (\varphi^1_3 + \varphi^3_3, 1+\varphi^2_4 + \varphi^4_4).$$

$\lhd$ Согласно формуле для S_2 имеем $(\,,)_2 = (\alpha_1, 1+\alpha_1\alpha_2)$, поэтому первая формула нашего предложения вытекает из того, что $\varphi^1_1 = \alpha_1$, $\varphi^2_2 = \alpha_1\alpha_2$. Аналогично доказываются остальные формулы. $\rhd$

Предложение 4. *Имеют место формулы* $(n \geqslant 1)$:

$$(\,,)_{2n} = (\varphi^1_{2n-1} + \varphi^3_{2n-1} + \ldots + \varphi^{2n-1}_{2n-1}, 1+\varphi^2_{2n} + \varphi^4_{2n} + \ldots + \varphi^{2n}_{2n}), \tag{5}$$

$$(\,,)_{2n+1} = (\varphi^1_{2n+1} + \varphi^3_{2n+1} + \ldots + \varphi^{2n+1}_{2n+1}, 1+\varphi^2_{2n} + \varphi^4_{2n} + \ldots + \varphi^{2n}_{2n}). \tag{6}$$

$\lhd$ Рассмотрим матрицу S_k $(k \geqslant 2)$, и покажем, что вторая строка $(\,,)_k$ этой матрицы удовлетворяет формулам нашего предложения. Индукция по k. База индукции следует из предложения 3. Рассмотрим индукционный переход $k \to k+1$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $k = 2n$ — четно и по индукционному предположению справедлива формула (5). Имеем $S_{k+1} = S_{2n+1} = S_{2n}t_{21}(\alpha_{2n+1})$, а потому из (5) мы имеем

$$\begin{aligned}(\,,)_{2n+1} = \Big((\varphi^1_{2n-1} + \alpha_{2n+1}) + (\varphi^3_{2n-1} + \alpha_{2n+1}\varphi^2_{2n}) + \ldots + (\varphi^{2n-1}_{2n-1} + \alpha_{2n+1}\varphi^{2n-2}_{2n}) \\ + \alpha_{2n+1}\varphi^{2n}_{2n}, 1+\varphi^2_{2n} + \varphi^4_{2n} + \ldots + \varphi^{2n}_{2n}\Big).\end{aligned}$$

Последняя строчка совпадает со строчкой формулы (6) согласно утверждению 3a) предложения 2.

б) Пусть теперь $k = 2n-1$ — нечетно. Согласно индукционному предположению из (4) мы имеем

$$(\,,)_{2n-1} = (\varphi^1_{2n-1} + \varphi^3_{2n-1} + \ldots + \varphi^{2n-1}_{2n-1}, 1+\varphi^2_{2n-2} + \varphi^4_{2n-2} + \ldots + \varphi^{2n-2}_{2n-2}).$$

Далее, $S_{k+1} = S_{2n} = S_{2n-1}t_{12}(\alpha_{2n})$, поэтому

$$\begin{aligned}(\,,)_{2n} = \Big(\varphi^1_{2n-1} + \varphi^3_{2n-1} + \ldots + \varphi^{2n-1}_{2n-1}, 1 + (\varphi^2_{2n-2} + \alpha_{2n}\varphi^1_{2n-1}) \\ + (\varphi^4_{2n-2} + \alpha_{2n}\varphi^3_{2n-1}) + \ldots + (\varphi^{2n-2}_{2n-2} + \alpha_{2n}\varphi^{2n-3}_{2n-1}) + \alpha_{2n}\varphi^{2n-1}_{2n-1}\Big).\end{aligned}$$

Непосредственно из утверждения 3b) предложения 2 следует совпадение последней строчки со строчкой из (5). $\rhd$

4. Доказательство теоремы

Пусть $S_k = t_{21}(\alpha_1)t_{12}(\alpha_2)\ldots$ содержится в группе $\langle t_{21}(A), t_{12}(B)\rangle$ (при этом ясно, что $\alpha_{2m+1} \in A$, $\alpha_{2m} \in B$), причем все элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — ненулевые. Покажем, что если $k \geqslant 2$, то $(S_k)_{21} \neq 0$, $(S_k)_{12} \neq 0$. Не умаляя общности (рассматривая транспонирование), достаточно показать, что $(S_k)_{21} \neq 0$.

Согласно предложению 4 (в зависимости от четности k) мы имеем

$$(S_{2n})_{21} = \varphi^1_{2n-1} + \varphi^3_{2n-1} + \ldots + \varphi^{2n-1}_{2n-1}, \tag{7}$$

$$(S_{2n+1})_{21} = \varphi^1_{2n+1} + \varphi^3_{2n+1} + \ldots + \varphi^{2n+1}_{2n+1}. \tag{8}$$

Элементы α_i являются многочленами, причем $\deg(\alpha_i) \geqslant 1$. В частности, $(S_k)_{21}$ — многочлен. В силу утверждения 1) предложения 2

$$\varphi^{2n-1}_{2n-1} = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2n-1}, \quad \varphi^{2n+1}_{2n+1} = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2n+1}.$$

Поэтому в силу утверждения 2) предложения 2 (заметим $\alpha_i \neq 0$) из (7), (8) мы имеем

$$\deg\varphi^{2n-1}_{2n-1} > \deg(\varphi^1_{2n-1} + \varphi^3_{2n-1} + \ldots + \varphi^{2n-3}_{2n-1}),$$

$$\deg\varphi^{2n+1}_{2n+1} > \deg(\varphi^1_{2n+1} + \varphi^3_{2n+1} + \ldots + \varphi^{2n-1}_{2n+1}).$$

Следовательно, $(S_{2n})_{21} \neq 0$, $(S_{2n+1})_{21} \neq 0$.

5. Элементарные сети

В этом параграфе, пользуясь проделанной работой, мы строим различные примеры элементарных сетей. Отметим, что эти примеры во многом мотивированы вопросами поставленными перед автором В. М. Левчуком и Я. Н. Нужиным, за что автор приносит им благодарность.

Положим ($F = F_2$ — поле из двух элементов)

$$A = Rx + R + R_4[x], \quad A_1 = Rx^2 + R + R_4[x], \quad B = Fx + F_4[x],$$

где через $F_4[x]$ мы обозначаем идеал кольца $F[x]$, состоящий из всех многочленов: $F_4[x] = Fx^4 + Fx^5 + \ldots$.

Пример незамкнутой (не допустимой) сети [6]. Определим элементарную сеть $\rho = (\rho_{ij})$ n-го порядка в Λ следующим образом: $\rho_{12} = A$, $\rho_{21} = A_1$ и $\rho_{ij} = R_2[x]$ для всех остальных $i \neq j$:

$$\rho = \begin{pmatrix} * & A & R_2[x] & \ldots & R_2[x] \\ A_1 & * & R_2[x] & \ldots & R_2[x] \\ R_2[x] & R_2[x] & * & \ldots & R_2[x] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_2[x] & R_2[x] & R_2[x] & \ldots & * \end{pmatrix}.$$

Имеем $x^3 \in AA_1A$, следовательно, $AA_1A \nsubseteq A$, а потому (см. § 1) элементарная сеть ρ не является дополняемой.

Сеть ρ не является замкнутой (допустимой). Положим $b = t_{12}(x)t_{21}(1)t_{12}(-1)$. Тогда $b^{-1}t_{12}(x)b = t_{21}(-x)$, поэтому $x \in (\bar{\rho})_{21}$, но x не содержится в группе $A_1 = \rho_{21}$. Поэтому $\rho \neq \bar{\rho}$, т. е. сеть ρ не является замкнутой.

Пример замкнутой (допустимой), но не дополняемой сети. Определим элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ n-го порядка в поле Λ следующим образом: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = B$ и $\sigma_{ij} = F_4[x]$ для всех остальных $i \neq j$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & B & F_4[x] & \ldots & F_4[x] \\ B & * & F_4[x] & \ldots & F_4[x] \\ F_4[x] & F_4[x] & * & \ldots & F_4[x] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_4[x] & F_4[x] & F_4[x] & \ldots & * \end{pmatrix},$$

σ — элементарная сеть, которая является замкнутой, но не дополняемой [6].

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.—М.: Наука, 1982.—288 с.
3. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
4. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, дополненное.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.—219 с.
5. *Койбаев В. А.* Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 4.—С. 39–43.
6. *Койбаев В. А.* Элементарные сети в линейных группах // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 4.—(в печати).

Статья поступила 14 августа 2011 г.

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ведущий научный сотрудник лаб. теории операторов
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru

CLOSED PAIRS

Koibaev V. A.

This is a study of closed pairs of abelian groups (closed elementary nets of degree 2). If the elementary group $E(\sigma)$ does not contain new elementary transvections, then an elementary net σ (the net without the diagonal) is called closed. Closed pairs we construct from the subgroup of a polynomial ring. Let $R_1[x]$ — the ring of polynomials (of variable x with coefficients in a domain R) with zero constant term. We prove the following result.
Theorem. *Let A, B — additive subgroups of $R_1[x]$. Then the pair (A, B) is closed. In other words, if $t_{12}(\beta)$ or $t_{21}(\alpha)$ is contained in subgroup $\langle t_{21}(A), t_{12}(B)\rangle$, then $\beta \in B$, $\alpha \in A$.*

Key words: net, elementary net, closed net, net groups, elementary group, transvection.