

УДК 517.518.8

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ЛАПЛАСИАНА ФУНКЦИИ
ПО ЕЕ НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

Е. О. Сивкова

Работа посвящена задаче оптимального восстановления дробной степени оператора Лапласа функции на \mathbb{R}^d по приближенно известному в метрике L_∞ ее преобразованию Фурье на некотором выпуклом множестве. Найден оптимальный метод восстановления. Этот метод не использует информацию о преобразовании Фурье за пределами некоторого шара с центром в нуле.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, лапласиан, преобразование Фурье, выпуклая задача.

1. Постановка задачи и формулировка результата

Преобразование Фурье лапласиана $\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ достаточно гладкой и быстро убывающей функции f на \mathbb{R}^d имеет вид

$$(F\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2 Ff(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d,$$

где $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2$. Это позволяет (по крайней мере формально) определить дробную степень оператора Лапласа: для каждого $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ на «хороших» функциях в образах Фурье действует по правилу:

$$F(-\Delta)^{\alpha/2} f(\xi) = |\xi|^\alpha Ff(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на \mathbb{R}^d и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — сопряженное пространство (пространство обобщенных функций). Положим для каждого $\alpha > 0$

$$\mathcal{W}_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : Ff \in L_\infty(\mathbb{R}^d), (-\Delta)^{\alpha/2} f \in L_2(\mathbb{R}^d) \right\},$$

где F — преобразование Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, и

$$W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{W}_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d) : \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \right\}.$$

Пусть A — непустое подмножество \mathbb{R}^d . Предположим, что функции из $W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ известны приближенно, а именно, о каждой функции $f \in W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ известна лишь функция $g \in L_\infty(A)$ такая, что $\|Ff - g\|_{L_\infty(A)} \leq \delta$. По этой информации мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) сами функции f из $W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ и $(-\Delta)^{\beta/2} f$ (если $\beta < \alpha$) в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Любое отображение $m: L_\infty(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления $((-\Delta)^{\beta/2} f$ по данной информации). Его погрешность определяем по формуле

$$e((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), g \in L_\infty(A), \\ \|Ff - g\|_{L_\infty(A)} \leq \delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f - m(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Величину

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \inf_m e((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta, m)$$

(где нижняя грань берется по всем методам $m: L_\infty(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$) называем *погрешностью оптимального восстановления*, а методы, на которых достигается нижняя грань, — *оптимальными методами восстановления*.

Первоначальная постановка задачи оптимального восстановления (но для линейных функционалов и в конечномерной ситуации) принадлежит С. А. Смоляку [1]. Идея отыскания оптимальных методов сразу для всех функций из данного класса восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х гг. прошлого века о наилучших методах приближения классов функций. Заметим, что с практической точки зрения естественно считать, что мы располагаем некоторой априорной информацией, которая и выделяет соответствующий класс функций. В дальнейшем тематика, связанная с оптимальным восстановлением, развивалась в разных направлениях. Определенное представление об этом можно получить из работ [2–8]. Задачи, близкие к той, которая изучается здесь, но для функций одного переменного (периодических и на прямой), рассматривались в работах [9, 10]. Что касается многомерного случая, то отметим работы [11, 12].

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Всюду далее $B(x, r)$ — замкнутый шар в \mathbb{R}^d с центром в точке x радиуса $r > 0$, а $\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Пусть A — подмножество \mathbb{R}^d и $0 \in \text{int } A$. Положим $r_A = \sup\{r > 0 : B(0, r) \subset A\}$. Ясно, что $0 < r_A < \infty$, если A — собственное подмножество и $r_A = +\infty$, если $A = \mathbb{R}^d$.

Для каждого $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ обозначим

$$\hat{r} = \hat{r}(\alpha, \delta) = \left(\frac{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) (d + 2\alpha)}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{d+2\alpha}},$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Теорема. Пусть $0 \leq \beta < \alpha$, $\delta > 0$, A — выпуклое подмножество \mathbb{R}^d и $\text{int } A \neq \emptyset$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) если $0 \notin \text{int } A$, то $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta) = +\infty$;
- 2) если $0 \in \text{int } A$, то

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\delta^2 2^{2-d} (\alpha - \beta)}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2) (d + 2\alpha) (d + 2\beta)}} r_A^{d+2\beta} + \frac{1}{r_A^{2(\alpha - \beta)}}, & r_A \leq \hat{r}, \\ \sqrt{\frac{d+2\alpha}{d+2\beta}} \left(\frac{\delta^2 2^{1-d}}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2) (d + 2\alpha)} \right)^{\frac{\alpha - \beta}{d+2\alpha}}, & r_A \geq \hat{r}. \end{cases}$$

Метод

$$\hat{m}(g)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta \left(1 - \left(\frac{|\xi|}{r_0} \right)^{2(\alpha - \beta)} \right) g(\xi) e^{i\langle \xi, t \rangle} d\xi,$$

где $r_0 = \min(r_A, \hat{r})$, является оптимальным.

Первое утверждение теоремы означает, что если $0 \notin \text{int } A$, то погрешность любого метода бесконечна, и значит никаким способом нельзя восстановить соответствующий оператор на всем классе с конечной погрешностью.

Если $0 \in \text{int } A$ и преобразование Фурье функции f на A известно с точностью до $\delta > 0$, то погрешность оптимального восстановления уменьшается с ростом радиуса вписанного шара в A , но лишь до определенного предела: при $r_A \geq \hat{r}$ эта погрешность постоянна. Таким образом, за пределами шара $B(0, \hat{r})$ информация о преобразовании Фурье функции из данного класса оказывается лишней. Оптимальный метод использует информацию о преобразовании Фурье только на шаре $B(0, r_0)$ и при этом, данную (полезную) информацию «сглаживает». Сам оптимальный метод есть $(-\Delta)^{\beta/2}\varphi$, где преобразование Фурье φ совпадает со сглаженным наблюдением на шаре $B(0, r_0)$ и равно нулю за пределами этого шара.

Неравенство $r_A \leq \hat{r}$ можно переписать так: $\delta^2 r_A^{d+2\alpha} \leq 2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)(d+2\alpha)$, и его можно трактовать как своеобразный «принцип неопределенности», связывающий объем полезной информации (преобразование Фурье на шаре $B(0, r_0)$) и погрешность ее измерения.

2. Доказательство теоремы

Начнем с оценки снизу величины погрешности оптимального восстановления $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\alpha}(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. Покажем, что она не меньше значения следующей задачи

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad \|Ff\|_{L_{\infty}(A)} \leq \delta, \quad f \in W_{\infty,2}^{\alpha}(\mathbb{R}^d), \quad (1)$$

т. е. верхней грани максимизируемого функционала в (1).

Пусть f_0 — допустимая функция в (1) (т. е. f_0 удовлетворяет ограничениям задачи). Тогда, очевидно, функция $-f_0$ также допустима и мы имеем для любого $m: L_{\infty}(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ($m(0)$ — образ нулевой функции при отображении m)

$$\begin{aligned} 2\|(-\Delta)^{\beta/2} f_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|(-\Delta)^{\beta/2} f_0 - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|(-\Delta)^{\beta/2}(-f_0) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f \in W_{\infty,2}^{\alpha}(\mathbb{R}^d), \\ \|Ff\|_{L_{\infty}(A)} \leq \delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2 \sup_{\substack{f \in W_{\infty,2}^{\alpha}(\mathbb{R}^d), g \in L_{\infty}(A), \\ \|Ff-g\|_{L_{\infty}(A)} \leq \delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f - m(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (1), а справа к нижней грани по всем методам m , получаем требуемое.

В образах Фурье, согласно теореме Планшереля, квадрат значения задачи (1) равен значению такой задачи

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \|Ff\|_{L_{\infty}(A)} \leq \delta, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi \leq 1, \quad f \in \mathcal{W}_{\infty,2}^{\alpha}(\mathbb{R}^d), \end{aligned} \quad (2)$$

1) Докажем первое утверждение теоремы. Для этого, в силу полученной оценки снизу для погрешности оптимального восстановления, достаточно показать, что значение задачи (2) равно $+\infty$. Так как $0 \notin \text{int } A$, то согласно конечномерной теореме отделимости

(см., например, [13]), можно отделить нуль от выпуклого множества $\text{int } A$, т. е. существует такой вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_d^2} = 1$, что $\sup_{\xi \in \text{int } A} \langle \lambda, \xi \rangle \leq 0$. Но тогда, очевидно, справедливо и такое неравенство:

$$\sup_{\xi \in A} \langle \lambda, \xi \rangle \leq 0. \quad (3)$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим шар $B(\varepsilon\lambda, \varepsilon/2)$, который, для краткости, обозначим B_ε . Тогда $B_\varepsilon \cap A = \emptyset$, так как, если $\xi \in B_\varepsilon$, то $|\xi - \varepsilon\lambda| \leq \varepsilon/2$, откуда легко выводится, что $\langle \lambda, \xi \rangle > 0$, и значит $\xi \notin A$ согласно (3). Пусть функция φ_ε определена по формуле

$$\varphi_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \left(\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} d\eta \right)^{-1/2}, & \xi \in B_\varepsilon; \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, $\varphi_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $f_\varepsilon = F^{-1}\varphi_\varepsilon$. Эта функция допустима в задаче (2). Действительно, $Ff_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и понятно, что функция $\xi \mapsto |\xi|^\alpha Ff_\varepsilon(\xi)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, $(-\Delta)^{\alpha/2} f_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}^d)$, и значит $f_\varepsilon \in \mathcal{W}_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее простая проверка показывает, что f_ε удовлетворяет остальным ограничениям задачи (2). Теперь, если $\xi \in B_\varepsilon$, то ясно, что $|\xi| \leq |\xi - \varepsilon\lambda| + |\varepsilon\lambda| \leq 3\varepsilon/2$ и мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |\varphi_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{\int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\beta} d\xi}{\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} d\eta} = \frac{\int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} |\xi|^{-2(\alpha-\beta)} d\xi}{\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} d\eta} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{-2(\alpha-\beta)} \varepsilon^{-2(\alpha-\beta)}, \end{aligned}$$

откуда следует, устремляя ε к нулю, что значение максимизируемого функционала в (2) может быть сделано сколь угодно большим. Это доказывает утверждение 1) теоремы.

2) Докажем второе утверждение теоремы. Начнем с оценки снизу величины $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. По доказанному ее квадрат не меньше значения задачи (2). Найдем значение этой задачи.

Пусть сначала $r_A < \hat{r}$. Можно показать, что в этом случае у задачи (2) нет решения и поэтому мы поступим следующим образом: построим такую допустимую в (2) последовательность функций f_n , $n \in \mathbb{N}$, которая сходится к значению задачи.

Из определения r_A следует, что граница шара $B(0, r_A)$ и граница A имеют непустое пересечение. Если ξ_0 принадлежит этому пересечению (тем самым $|\xi_0| = r_A$), то $\xi_0 \notin \text{int } A$, и поэтому можно отделить ξ_0 от выпуклого множества $\text{int } A$, т. е. существует такой вектор $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = 1$, что $\sup_{\xi \in \text{int } A} \langle \lambda, \xi \rangle \leq \langle \lambda, \xi_0 \rangle$. Отсюда следует, что и $\sup_{\xi \in A} \langle \lambda, \xi \rangle \leq \langle \lambda, \xi_0 \rangle$. Теперь для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $\xi_n = \xi_0 + (1/n)\lambda$ и заметим, что шар $B_n = B(\xi_n, 1/(2n))$ не пересекается с A (если $\xi \in B_n$, то отсюда легко вытекает, что $\langle \lambda, \xi \rangle > \langle \lambda, \xi_0 \rangle$, и значит $\xi \notin A$).

Далее, нетрудно проверить, что для любых $s > 0$ и $r > 0$ справедливо равенство

$$\int_{B(0,r)} |\xi|^{2s} d\xi = \frac{2\pi^{d/2}}{(d+2s)\Gamma(d/2)} r^{d+2s}. \quad (4)$$

Положим

$$\gamma = 1 - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha} d\xi.$$

Из (4) и определения \hat{r} следует, что $\gamma > 0$.

Обозначим

$$V_n = \frac{\pi^{d/2}}{(2n)^d \Gamma(d/2 + 1)}.$$

Это объем шара в \mathbb{R}^d радиуса $1/(2n)$. Рассмотрим последовательность функций φ_n , $n \in \mathbb{N}$, определенных по формуле

$$\varphi_n(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} V_n^{-1/2} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-\alpha} \gamma^{1/2}, & \xi \in B_n; \\ \delta, & \xi \in B(0, r_A); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $f_n = F^{-1}\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что функции f_n допустимы в задаче (2). То, что $f_n \in \mathcal{W}_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ проверяется аналогично тому, как это было сделано выше для функций f_ε .

Далее, $Ff_n(\xi) = \delta$, если $\xi \in B(0, r_A)$ и $Ff_n(\xi) = 0$, если $\xi \in A \setminus B(0, r_A)$ и тем самым $\|f_n\|_{L_\infty(A)} = \delta$.

Заметим теперь, что если $\xi \in B_n$, то

$$|\xi| \leq \left| \xi - \xi_0 - \frac{1}{n}\lambda + \xi_0 + \frac{1}{n}\lambda \right| \leq \frac{1}{2n} + |\xi_0| + \frac{1}{n} = r_A + \frac{3}{2n},$$

и мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_n} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi \\ &= V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \gamma \int_{B_n} |\xi|^{2\alpha} d\xi + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ &\leq V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \gamma \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} V_n + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ &= \gamma + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2\alpha} d\xi = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, последовательность функций f_n , $n \in \mathbb{N}$, допустима в задаче (2).

Перейдем теперь к нахождению значения этой задачи. Сопоставим задаче (2) функцию Лагранжа, определенную на $\mathcal{W}_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ формулой

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (-|\xi|^{2\beta} + p(\xi) + \lambda|\xi|^{2\alpha}) |Ff(\xi)|^2 d\xi, \quad (6)$$

где $\lambda = r_A^{-2(\alpha-\beta)}$ и

$$p(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{2\beta} - \lambda|\xi|^{2\alpha}, & \xi \in B(0, r_A); \\ 0, & \xi \notin B(0, r_A). \end{cases}$$

Оценим сверху значение задачи (2). Учитывая, что функция p неотрицательна на \mathbb{R}^d и что $\mathcal{L}(f) \geq 0$ (поскольку неотрицательно выражение в скобках под знаком интеграла

в (6)), будем иметь для любой допустимой функции f в (2)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi \\ & - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A p(\xi) (|Ff(\xi)|^2 - \delta^2) d\xi - \lambda \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi - 1 \right) \\ & = -\mathcal{L}(f) + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} p(\xi) d\xi + \lambda \leq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} p(\xi) d\xi + \lambda, \end{aligned}$$

т. е. значение задачи (2) не превосходит величины

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} p(\xi) d\xi + \lambda. \quad (7)$$

Покажем, что это и есть значение задачи (2). Действительно, для любого n справедливо легко проверяемое равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi = -\mathcal{L}(f_n) + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} p(\xi) (|Ff_n(\xi)|^2 - \delta^2) d\xi \\ & + \lambda \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi - 1 \right) + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} p(\xi) d\xi + \lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

Второе слагаемое справа равно нулю, так как $Ff_n(\xi) = \delta$ на шаре $B(0, r_A)$, а вне этого шара функция p равна нулю. Если мы покажем, что первое и третье слагаемые справа стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, то переходя в (8) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что на последовательности f_n максимизируемый функционал в (2) сходится к величине (7), и значит, эта величина (с учетом доказанной оценки сверху) есть значение задачи (2).

Итак, рассмотрим первое и третье слагаемые справа в (8). Согласно определению последовательности f_n и учитывая, что функция в скобках под знаком интеграла в (6) равна нулю на $B(0, r_A)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_n) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (-|\xi|^{2\beta} + p(\xi) + \lambda|\xi|^{2\alpha}) |Ff_n(\xi)|^2 d\xi \\ &= V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n} \right)^{-2\alpha} \gamma \int_{B_n} (-|\xi|^{2\beta} + \lambda|\xi|^{2\alpha}) d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

Если $\xi \in B_n$, то

$$r_A = |\xi_0| \leq |\xi| + \left| \xi_0 - \xi + \frac{1}{n} \lambda \right| + \left| \frac{1}{n} \lambda \right| \leq |\xi| + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}$$

и поэтому $|\xi| \geq r_A - \frac{3}{2n}$. Используя это, приходим к оценке

$$\int_{B_n} |\xi|^{2\beta} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi \geq \left(r_A - \frac{3}{2n} \right)^{2\beta} V_n.$$

Выше было отмечено, что если $\xi \in B_n$, то $|\xi| \geq r_A + \frac{3}{2n}$ и поэтому аналогично получаем оценку

$$\int_{B_n} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi \leq \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} V_n.$$

Меняя в первой оценке знак на противоположный и затем складывая эти оценки, приходим, продолжая (9), к неравенству

$$\mathcal{L}(f_n) \leq \gamma \left(- \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \left(r_A - \frac{3}{2n}\right)^{2\beta} + \lambda \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} \right).$$

Так как $\lambda = r_A^{-2(\alpha-\beta)}$, то последовательность справа стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Но $\mathcal{L}(f_n) \geq 0$ (ранее было отмечено, что $\mathcal{L}(f) \geq 0$ вообще для всех функций $f \in \mathcal{W}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$), и значит $\mathcal{L}(f_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Покажем теперь, что третье слагаемое в (8) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Рассуждая так же как при доказательстве (5), получим, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 d\xi \geq \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \gamma \left(r_A - \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha} d\xi.$$

Последовательность справа стремится к единице при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что последовательность в скобках в третьем слагаемом справа в (8) оценивается снизу последовательностью, стремящейся к нулю. Но последовательность в скобках неположительна в силу (5) и тем самым она сама стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Итак, первое и третье слагаемые в (8) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ и значит, величина (7) — значение задачи (2).

Согласно доказанному выше погрешность оптимального восстановления $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\alpha}(\mathbb{R}^d), A, \delta)$ не меньше корня квадратного из значения задачи (2). Если в (7) подставить выражения для p и λ и воспользоваться формулой (4), то получим оценку снизу для $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\alpha}(\mathbb{R}^d), A, \delta)$, которая указана в теореме для случая, когда $r_A < \hat{r}$.

Пусть теперь $r_A \geq \hat{r}$. В этом случае задача (2) имеет решение \hat{f} и оно таково: $F\hat{f}(\xi) = \delta$, если $\xi \in B(0, \hat{r})$ и $F\hat{f}(\xi) = 0$, если $\xi \notin B(0, \hat{r})$. Действительно, пусть $\hat{\lambda}$ и \hat{p} определены аналогично предыдущему, но с заменой r_A на \hat{r} и определена соответствующая им функция Лагранжа по формуле (6). Как и раньше, легко проверяется, что $\mathcal{L}(f) \geq 0$ для любой функции $f \in \mathcal{W}_{\infty,2}^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$ и нетрудно проверить, что $\mathcal{L}(\hat{f}) = 0$. Наконец, используя (4), легко видеть, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |F\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0,\hat{r})} |\xi|^{2\alpha} d\xi = 1. \quad (10)$$

Учитывая все эти факты, будем иметь для любой допустимой в задаче (2) функции f

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A \widehat{p}(\xi) (|Ff(\xi)|^2 - \delta^2) d\xi \\ &\quad - \widehat{\lambda} \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi - 1 \right) = -\mathcal{L}(f) + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{p}(\xi) d\xi + \widehat{\lambda} \leq -\mathcal{L}(\widehat{f}) \\ &\quad + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{p}(\xi) d\xi + \widehat{\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |F\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A \widehat{p}(\xi) (|F\widehat{f}(\xi)|^2 - \delta^2) d\xi \\ &\quad + \widehat{\lambda} \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |F\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi - 1 \right) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |F\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

т. е. \widehat{f} — решение задачи (2). Ее значение (учитывая (10)) равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |F\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, \widehat{r})} |\xi|^{2\beta} d\xi \\ &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, \widehat{r})} (|\xi|^{2\beta} - \widehat{\lambda} |\xi|^{2\alpha}) d\xi + \widehat{\lambda} = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{p}(\xi) d\xi + \widehat{\lambda}. \end{aligned}$$

По доказанному погрешность оптимального восстановления оценивается снизу корнем квадратным из этой величины. Если подставить сюда выражения для $\widehat{\lambda}$ и \widehat{p} , то получим указанную в теореме оценку снизу для $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$ для случая $r_A \geq \widehat{r}$. Заметим, что оценка для $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$ при $r_A < \widehat{r}$ переходит в данную при $r_A = \widehat{r}$.

3) Теперь докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанного в теореме метода восстановления.

Оптимальность метода m означает, по определению, что его погрешность равна погрешности оптимального восстановления, т. е. значение задачи

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\beta/2} f - m(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad \|Ff - g\|_{L_\infty(A)} \leq \delta, \\ \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \quad g \in L_\infty(A), \quad f \in \mathcal{W}_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), \end{aligned} \quad (11)$$

равно $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$.

Оптимальный метод будем искать среди линейных отображений $m: L_\infty(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, которые в образах Фурье действуют по правилу $Fm(g) = ag$, причем функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ такова, что $a = 0$ вне $B(0, r_0)$. Пусть m — отображение такого вида. Оценим сверху максимизируемый функционал в (11). Согласно теореме Планшереля его квадрат запишется так:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| < r_0} |\xi|^\beta |Ff(\xi) - a(\xi)g(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \geq r_0} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi. \quad (12)$$

Преобразуем выражение под знаком первого интеграла, а затем оценим его по неравенству Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} \left| |\xi|^\beta Ff(\xi) - a(\xi)g(\xi) \right|^2 &= \left| \frac{a(\xi)}{\sqrt{\tilde{p}(\xi)}} \sqrt{\tilde{p}(\xi)} (Ff(\xi) - g(\xi)) + \frac{(|\xi|^\beta - a(\xi))}{\sqrt{\tilde{\lambda}|\xi|^\alpha}} \sqrt{\tilde{\lambda}|\xi|^\alpha} Ff(\xi) \right|^2 \\ &\leq \left(\frac{|a(\xi)|^2}{\tilde{p}(\xi)} + \frac{||\xi|^\beta - a(\xi)|^2}{\tilde{\lambda}|\xi|^{2\alpha}} \right) (\tilde{p}(\xi)|Ff(\xi) - g(\xi)|^2 + \tilde{\lambda}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda$, $\tilde{p} = p$, если $r_A < \hat{r}$ и $\tilde{\lambda} = \hat{\lambda}$, $\tilde{p} = \hat{p}$, если $r_A \geq \hat{r}$.

Нетрудно убедиться, что для каждого ξ минимум выражения

$$\frac{|a|^2}{\tilde{p}(\xi)} + \frac{||\xi|^\beta - a|^2}{\tilde{\lambda}|\xi|^{2\alpha}}$$

по a достигается в точке

$$\hat{a}(\xi) = |\xi|^\beta \left(1 - \left(\frac{|\xi|}{r_0} \right)^{2(\alpha-\beta)} \right) \quad (14)$$

и сам этот минимум равен единице.

Возьмем в качестве функции a функцию, определенную последним соотношением. Тогда интегрируя (13) с учетом сказанного, а также учитывая первое ограничение в (11), получаем оценку для первого слагаемого в (12)

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| < r_0} \tilde{p}(\xi) d\xi + \tilde{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| < r_0} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi.$$

Второе слагаемое оцениваем так

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \geq r_0} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \geq r_0} |\xi|^{2(\beta-\alpha)} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{\tilde{\lambda}}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \geq r_0} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Складывая эти оценки, применяя теорему Планшереля и учитывая второе ограничение (11) получаем для квадрата максимизируемого функционала в (12) следующую оценку сверху

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| < r_0} \tilde{p}(\xi) d\xi + \frac{\tilde{\lambda}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| < r_0} \tilde{p}(\xi) d\xi + \tilde{\lambda} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| < r_0} \tilde{p}(\xi) d\xi + \tilde{\lambda}. \end{aligned}$$

По доказанному выше величина справа не превосходит квадрата погрешности оптимального восстановления. Следовательно, погрешность метода \hat{m} из формулировки теоремы (который в образах Фурье есть умножение на функцию, равную (14) на шаре $B(0, r_0)$ и нулю вне его) не превосходит погрешности оптимального восстановления, и значит совпадает с ней. Таким образом, получено указанное в теореме выражение для погрешности

оптимального восстановления и показано, что метод \hat{m} является оптимальным. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Г. Г. Магарил-Ильяеву за внимание к работе и рецензенту за полезные замечания.

Литература

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. . . канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approx. Theory.—New York: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
3. Melkman A. A., Micchelli C. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—Vol. 16.—P. 87–105.
4. Traub J. F., Woźniakowski H. A General Theory of Optimal Algorithms.—New York: Academic Press, 1980.—xiv+341 p.
5. Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—Vol. 1129.—P. 21–93.
6. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1989.—Т. 189.—С. 3–20.
7. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки.—1991.—Т. 50, № 6.—С. 85–93.
8. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб.—1997.—Т. 187, № 12.—С. 73–106.
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 3.—С. 79–100.
10. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функци. анализ и его прилож.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
11. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление производных на соболевских классах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 1.—С. 39–47.
12. Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Мат. сб.—2012.—Т. 203, № 4.—С. 119–130.
13. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения (3-е изд.).—М.: Либроком, 2011.—176 с.

Статья поступила 28 мая 2012 г.

Сивкова Елена Олеговна
 Московский государственный технический университет
 радиотехники, электроники и автоматики,
 старший преподаватель
 РОССИЯ, 119454, Москва, пр. Вернадского, 78
 E-mail: sivkova_elena@inbox.ru

ON OPTIMAL RECOVERY OF THE LAPLACIAN OF A FUNCTION FROM ITS INACCURATELY GIVEN FOURIER TRANSFORM

Sivkova E. O.

The paper is devoted to the problem of the optimal recovery for a fractional power of the Laplacian of a function from its inaccurately given Fourier transform in metric L_∞ on some convex subset of \mathbb{R}^d . The optimal recovery method is constructed. This method is not used the information about the Fourier transform outside some ball centred at the origin.

Key words: optimal recovery, Laplacian, Fourier transform, convex problem.

517.983

USING HOMOLOGICAL METHODS ON THE BASE
OF ITERATED SPECTRA IN FUNCTIONAL ANALYSIS

E. I. Smirnov

We introduce new concepts of functional analysis: Hausdorff spectrum and Hausdorff limit or H -limit of Hausdorff spectrum of locally convex spaces. Particular cases of regular H -limit are projective and inductive limits of separated locally convex spaces. The class of H -spaces contains Fréchet spaces and is stable under forming countable inductive and projective limits, closed subspaces and quotient spaces. Moreover, for H -space an unproved variant of the closed graph theorem holds true. Homological methods are used for proving of theorems of vanishing at zero for first derivative of Hausdorff limit functor: $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$.

Key words: topology, spectrum, closed graph theorem, differential equation, homological methods, category.

Introduction

The study which was carried out in [1–2] of the derivatives of the projective limit functor acting from the category of countable inverse spectra with values in the category of locally convex spaces made it possible to resolve universally homomorphism questions about a given mapping in terms of the exactness of a certain complex in the abelian category of vector spaces. Later in [3] a broad generalization of the concepts of direct and inverse spectra of objects of an additive semiabelian category \mathbf{G} (in the sense V. P. Palamodov) was introduced: the concept of a Hausdorff spectrum, analogous to the δ_s -operation in descriptive set theory. This idea is characteristic even for algebraic topology, general algebra, category theory and the theory of generalized functions. The construction of Hausdorff spectra $\mathbf{X} = \{X_s, \mathbf{F}, h_{s's'}\}$ is achieved by successive standard extension of a small category of indices Ω . The category \mathbf{H} of Hausdorff spectra turns out to be additive and semiabelian under a suitable definition of spectral mapping. In particular, \mathbf{H} contains V. P. Palamodov's category of countable inverse spectra with values in the category TLG of locally convex spaces [1]. The H -limit of a Hausdorff spectrum in the category TLG generalizes the concepts of projective and inductive limits and is defined by the action of the functor $\text{Haus} : \mathbf{H} \rightarrow TLC$. The class of H -spaces is defined by the action of the functor Haus on the countable Hausdorff spectra over the category of Banach spaces; the closed graph theorem holds for its objects [8] and it contains the category of Fréchet spaces and the categories of spaces due to De Wilde [7], D. A. Rajkov [5] and Suslin [6]. The H -limit of a Hausdorff spectrum of H -spaces is an H -space [7]. There are many injective objects in the category \mathbf{H} and the right derivatives Haus^i ($i = 1, 2, \dots$) are defined, while the “algebraic” functor $\text{Haus} : \mathbf{H}(L) \rightarrow L$ over the abelian category L of vector spaces (over \mathbb{R} or \mathbb{C}) has injective type, that is if $0 \rightarrow \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ is an exact sequence of mappings of Hausdorff spectra with values in L , then the limit sequence $0 \rightarrow \text{Haus}(\mathbf{X}) \rightarrow$

$\text{Haus}(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{Haus}(\mathbf{Z})$ is exact or acyclic in the terminology of V. P. Palamodov [2]. In particular, regularity of the Hausdorff spectrum \mathbf{X} of the nonseparated parts of \mathbf{Y} guarantees the exactness of the functor $\text{Haus} : \mathbf{H}(TLC) \rightarrow TLC$ and the condition of vanishing at zero: $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$. The classical results of Malgrange and Ehrenpreis on the solvability of the unhomogeneous equation $p(D)D' = D'$, where $p(D)$ is a linear differential operator with constant coefficients in \mathbb{R}^n and $D' = D'(S)$ is the space of generalized functions on a convex domain $S \subset \mathbb{R}^n$, can be extended to the case of sets S which are not necessarily open or closed. Analogous theorems for Fréchet spaces were first proved by V. P. Palamodov [1–2].

1. We recall certain definitions and theorems which are used in this chapter and which were brought into the discussion in [3–6]. Let Ω be a small category. By a *directed class* in the category we mean a subcategory satisfying the following properties:

- (i) no more than one morphism is defined between any two objects;
- (ii) for any objects a, b there exists an object c such that there exist $a \rightarrow c$ and $b \rightarrow c$.

Let A be some category and s denotes the object of a category A (if $Q \in \Omega$ and $a, b \in Q$ we will denote the corresponding morphisms of category Ω by $a \xrightarrow{Q} b$). We shall call the category B with objects S , where S is a subcategory of A , a *standard extension of the category A* if the following conditions are satisfied:

1°. A is a complete subcategory of B ;

2°. The morphism $\omega_{SS'} : S' \rightarrow S$ of the category B is defined by the collection of morphisms $\omega_{ss'} : s' \rightarrow s$ ($s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s$) of the category A such that

(a) for every $s' \in S'$ there exists $s \in S$ such that $s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s$;

(b) if $s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s, p' \xrightarrow{\omega_{pp'}} p, s \xrightarrow{\omega_{ps}^S} p$, then there exists a morphism $s' \xrightarrow{\omega_{ps}^{S'}} p'$ and the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{S} & p \\ \omega_{ss'} \uparrow & & \uparrow \omega_{pp'} \\ s' & \xrightarrow{S'} & p' \end{array}$$

We will establish the successive standard extensions of categories

$$\Omega(s) \subset \mathbf{B}(T) \subset \Sigma(F) \rightarrow \Sigma^0(F) \subset \mathbf{D}(\mathbf{F}),$$

where $T \subset \Omega$ denotes directed classes of objects $s \in \Omega$, coincides as object of category \mathbf{B} ; $F, F \in \mathbf{B}$, denote filter bases of sets $T \in \mathbf{B}$, considered as objects of category Σ , and $\mathbf{F}, \mathbf{F} \subset \Sigma$, denote directed classes of objects $F \in \Sigma$ of the dual category Σ^0 , considered as objects of category \mathbf{D} . We shall say that such classes \mathbf{F} are *admissible* for Ω ; put $|\mathbf{F}| = \bigcup_{T \in \mathbf{F}} T$, $|\mathbf{F}'| = \bigcup_{F \in \mathbf{F}'} |\mathbf{F}'|$, so that $|\mathbf{F}| \subset \Omega$ and $|\mathbf{F}'| \subset \Omega$. The most characteristic constructions connected with Hausdorff spectra use in the role of the small category $\Omega = \text{Ord } I$, where I is a partially ordered set of indices, considered as category.

EXAMPLE 1 (standard extension of the category A). Let G and A be categories, $T(F)$ the category of covariant functors $F : G \rightarrow A$ with functorial morphism $\Phi : F_1 \rightarrow F_2$ defined by the rule [2] which assigns to each object $g \in G$ a morphism $\Phi(g) : F_1(g) \rightarrow F_2(g)$ of the category A such that for any morphism $\omega : g \rightarrow h$ of the category G the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} F_1(h) & \xrightarrow{\Phi(h)} & F_2(h) \\ F_1(\omega) \uparrow & & \uparrow F_2(\omega) \\ F_1(g) & \xrightarrow{\Phi(g)} & F_2(g) \end{array}$$

It is clear that each object $s \in A$ generates a covariant functor $F_s : g \in G \mapsto s \in A$ such that $A \subset T$. Moreover, A is a complete subcategory of T .

We will show that T provides a standard extension of the category A (by means of the category G). Let $F \in T$ and $S \subset A$ be such that $S = \cup_{g \in G} F(g)$ and for $s', s \in S$ the set of morphisms $\text{Hom}(s', s) = \cup_{\omega} F(\omega)$, where $\omega : g \rightarrow h$ and $s' = F(g)$, $s = F(h)$. Therefore the category B is defined, where S is a subcategory of A and the morphisms $\omega_{SS'} : S' \rightarrow S$ of the category B are generated by the collection of functorial morphisms $\Phi : F' \rightarrow F$, where $F' \in T$ generates S' , while F generates S according to the method indicated above.

If we take such a functorial morphism $\Phi : F' \rightarrow F$, then the morphisms $\Phi(g) : F'(g) \rightarrow F(g)$ ($g \in G$) of the category A form a collection of morphisms $\omega_{ss'} : s' \rightarrow s$ ($s' = F'(g)$, $s = F(g)$) such that (a) is satisfied. Condition (b) follows from consideration of the definition of the functorial morphism.

Thus, B is a standard extension of the category A . If $G = \text{Ord } I$, where I is a linearly ordered set, then $T = B(S)$.

EXAMPLE 2 (Palamodov [1]). The categories of direct and inverse spectra over a semiabelian category K are standard extensions of the category K .

EXAMPLE 3 (construction of an admissible class for Ω). Let T be a separated topological space and Ω a countable set. We shall call a set $A \subset T$ an s -set if

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{K}} \bigcap_{t \in B} T_t,$$

where T_t ($t \in \Omega$) is a subset of T and \mathbf{K} is the family of subsets B of the set Ω such that

- (a) for each $B \in \mathbf{K}$ the set $T_B = \bigcap_{t \in B} T_t$ is compact in T ,
- (b) the sets T_B ($B \in \mathbf{K}$) form a fundamental system of compact subsets of A .

Proposition 1. *Every separable metric space is an s -set.*

Proposition 2. *Let A be a subset of the finite-dimensional space \mathbb{R}^n . Then A is an s -set and moreover*

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{K}} \bigcap_{t \in B} T_t, \tag{1}$$

where the T_t are compact subsets of \mathbb{R}^n .

Thus, s -sets are a generalization on the one hand of compact spaces (and locally compact spaces which are countable at infinity) and on the other of separable metric spaces. However, s -sets will be of interest to us in connection with the possibility of constructing the associated functor of a simple Hausdorff spectrum.

Let A be some s -set, so that

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{K}} \bigcap_{t \in B} T_t,$$

where $T_t \subset T$, $B \subset \Omega$. We may assume without loss of generality that the family Q of subsets T_t ($t \in \Omega$) is closed with respect to finite intersections and unions (that is, there exist corresponding surjections $\Phi_s, \Psi_s : d(\Omega) \rightarrow \Omega$, where $d(\Omega)$ is the set of finite subsets of Ω).

The set Ω will be partially ordered if we put $t' \leq t$ whenever $T_t \subset T_{t'}$; let $\mathbf{G} = \text{Ord } Q$. Further, we may assume that each set $B \in \mathbf{K}$ is directed in (Ω, \leq) . Let I be the factor set of all possible complexes $s = [t_1, t_2, \dots, t_n]$, where $t_i \in |\mathbf{K}|$, $t_i = pr_i s$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$), with respect to the equivalence relation on the set of ordered n -tuples of elements of $|\mathbf{K}| : (t_1, t_2, \dots, t_n) \sim (t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ if and only if $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} = \{t'_1, t'_2, \dots, t'_n\}$. The set I becomes partially ordered if we put $s' \leq s$, where $s = [t_1, t_2, \dots, t_n]$, $s' = [t'_1, t'_2, \dots, t'_n]$, whenever for each t_i there exists t'_j such that $t'_j \leq t_i$; let $\Omega = \text{Ord } I$.

By continuing the construction following the method of transformation of indices we will construct an admissible class \mathbf{F} for Ω . For each $s = [t_1, t_2, \dots, t_n] \in |\mathbf{F}|$ the subset $R_s = \bigcup_{i=1}^n T_{t_i}$ is defined and moreover if $s' \leq s$ then $R_s \subset R_{s'}$. Thus a contravariant functor of the simple Hausdorff spectrum $H(A) : |\mathbf{F}| \rightarrow \mathbf{G}$ is defined and moreover

$$A = \bigcup_{F \in \mathbf{F}} \bigcap_{s \in F} R_s. \quad (2)$$

It is an essential point that I is a countable set and the family $\{\bigcap_F R_s\}$ is a fundamental system of nonempty compact subsets of A .

Let \mathbf{G} be some category. We shall call a covariant functor $H_F : \Omega \rightarrow \mathbf{G}$ a *Hausdorff spectrum functor* if $\Omega = |\mathbf{F}|$ for some admissible class $\mathbf{F} \in \mathbf{D}$. If $\mathbf{F} = |\mathbf{F}|$ then H_F is a functor of the direct spectrum, while if $\mathbf{F} = \{|\mathbf{F}|\}$ (that is, \mathbf{F} consists of a single element $|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}|$) then H_F is a functor of the inverse spectrum.

If \mathbf{F} is an admissible class for Ω and the functor

$$h_{\mathcal{F}} : \begin{cases} |\mathcal{F}| \rightarrow \mathcal{G}, \\ s \mapsto X_s, \\ (s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s) \mapsto (X_s \rightarrow X_{s'}), \\ (F' \xrightarrow{\omega_{FF'}} F) \mapsto ((X_s)_{s \in |F|} \rightarrow (X_{s'})_{s' \in |F'|}) \end{cases}$$

is injective on objects and morphisms (in the set-theoretic sense), then there exists a directed class

$$((X_s)_{s \in |F|}, q_{FF'})_{F, F'} \in \mathbf{F}$$

of classes $(X_s, h_{s's})_{s, s' \in |F|}$ ($F \in |\mathbf{F}|$) which are directed in the dual category \mathbf{G}^0 and which satisfy the following conditions.

1°. The morphism $X_s \xrightarrow{h_{s's}} X_{s'}$ is chosen and fixed if and only if the morphism $s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s$ is chosen and then $h_{s's} : X_s \rightarrow X_{s'}$ is the only morphism.

2°. The diagram

$$\begin{array}{ccc} X_s & \xrightarrow{h_{s''s}} & X_{s''} \\ h_{s's} \downarrow & & \downarrow h_{s's''} \\ X_{s'} & \xlongequal{\quad} & X_{s'} \end{array}$$

is commutative for all $s'' \xrightarrow{\omega_{s's''}} s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s$.

3°. If $(X_s)_{s \in |F|} \xrightarrow{q_{F'F}} (X_{s'})_{s' \in |F'|}$, then for each $X_{s'}$ ($s' \in |F'|$) there exists a unique morphism $h_{s's} : X_s \rightarrow X_{s'}$ ($s \in |F|$). The collection of morphisms $h_{s's}$ ($s' \in |F'|$) defines the morphism $q_{F'F}$ so that we shall write $q_{F'F} = (h_{s's})_{F'F}$. Each set $F \in \mathbf{F}$ is a filter base of subsets $T \subset |\mathbf{F}|$ and moreover for each $T \in F$ the class $(X_s, h_{s's})_T$ is directed in the category \mathbf{G}^0 .

DEFINITION 1. We shall call a class $(X_s, h_{s's})_{s, s' \in |F|}$ satisfying conditions 1°–3° a *Hausdorff spectrum over the category \mathbf{G}* and we shall denote it by $\{X_s, \mathbf{F}, h_{s's}\}$.

The direct and inverse spectra of a family of objects are particular cases of Hausdorff spectra: it suffices to put $\mathbf{F} = |\mathbf{F}|$, $h_{s's} = q_{F'F}$ in the direct case and $\mathbf{F} = \{|\mathbf{F}|\}$, $h_{s's} : X_s \rightarrow X_{s'}$ ($s' \rightarrow s$), $q_{F'F} = i_{|F|} = i_{|F|}$ in the inverse case.

Under a suitable definition of spectral mapping (see the structure of the category $\mathbf{D}(\mathbf{F})$) the set of Hausdorff spectra over \mathbf{G} forms a category which we denote by $\text{Spect } \mathbf{G}$. If $\mathbf{X} =$

$\{X_s, \mathbf{F}, h_{s's}\}$, $\mathbf{Y} = \{Y_p, \mathbf{F}^1, h_{p'p}\}$ are objects from $\text{Spect } \mathbf{G}$, then we shall say that two Hausdorff spectrum mappings $\omega_{YX} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ and $\omega'_{YX} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ are *equivalent* if for any $F \in \mathbf{F}$ there exists $F^* \in \mathbf{F}^1$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} X_s & \xrightarrow{\omega_{ps}} & Y_p \\ \omega'_{p's} \downarrow & & \downarrow h_{p^*p} \\ Y_{p'} & \xrightarrow{h_{p^*p'}} & Y_{p^*} \end{array}$$

is commutative for any $p^* \in |F^*|$.

Now let us consider a new category $\mathbf{H}(\mathbf{G})$ whose objects are the objects of the category $\text{Spect } \mathbf{G}$, but the set $\text{Hom}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ is formed by the equivalence classes of mappings $\omega_{YX} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$. We shall denote such classes by $\|\omega_{YX}\|$.

For any objects $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbf{H}$ the law of composition defines a bilinear mapping

$$\text{Hom}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \times \text{Hom}_H(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \rightarrow \text{Hom}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$$

($\text{Hom}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ is an abelian group).

DEFINITION 2. Let $\mathbf{X} = \{X_s, \mathbf{F}, h_{s's}\}$ be a Hausdorff spectrum over the category \mathbf{G} . We shall call an object Z of the category \mathbf{G} a *categorical H -limit of the Hausdorff spectrum \mathbf{X} over \mathbf{G}* if for any objects $A, B \in \mathbf{G}$ and spectral mappings $A \xrightarrow{a} X \xrightarrow{b} B$ there exists a unique sequence in \mathbf{G} $A \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} B$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow b \\ Z & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

is commutative in the category $\text{Spect } \mathbf{G}$.

The concepts of projective and inductive limits over the category \mathbf{G} are special cases of categorical H -limits. For example, let \mathbf{X} be the inverse spectrum of objects from \mathbf{G} . Then (Lim) holds and moreover any object X_s from \mathbf{X} can be taken for $B \in \mathbf{G}$ with the identity morphism $b_s : X_s \rightarrow X_s$ forming the spectral mapping $b^s : \mathbf{X} \rightarrow X_s$ ($s \in |F|$). Thus the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow b \\ Z & \xrightarrow{\beta} & X \end{array}$$

where $b = (b^s)$, $\beta = (\beta^s)$, $\beta^s : Z \rightarrow X_s$ ($s \in |F|$), b is the identity morphism of the category $\text{Spect } \mathbf{G}$. Therefore the diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ \alpha \downarrow & & \parallel \\ Z & \xrightarrow{\beta} & X \end{array}$$

is commutative for any object $A \in \mathbf{G}$.

The categorical H -limit of a Hausdorff spectrum (the functor Haus) exists in any semi-abelian category \mathbf{G} with direct sums and products (for example, the category of vector

spaces L , the category TLC of topological vector groups, the category TLC of locally convex spaces).

Let Ω be a countable set and $\mathbf{X} = \{X_s, \mathbf{F}, h_{s's}\}$ a regular Hausdorff spectrum in the category TLC ; such a spectrum is said to be countable. A continuous linear image in the category TLC of an H -limit $X = \varprojlim_{\mathcal{F}} h_{s's} X_s$ of Banach spaces X_s ($s \in |\mathbf{F}|$) is called an H -space. The class of H -spaces contains the Fréchet spaces and is stable with respect to the operations of passage to countable inductive and projective limits, closed subspaces and factor spaces. Moreover, a strengthened variant of the closed graph theorem holds for H -spaces. The class of H -spaces is the broadest of all the analogous classes known at this time, namely those of Rajkov, De Wilde, Hakamura, Zabrejko–Smirnov. A countable separated regular H -limit of a Hausdorff spectrum of H -spaces in the category TLC is an H -space [7].

Throughout this chapter Hausdorff spectra are assumed to be countable unless the contrary is explicitly stated.

2. Let $\text{Haus} : \mathbf{H}(TLC) \rightarrow L$ be the covariant additive Hausdorff limit functor from the semiabelian category $\mathbf{H}(TLC)$ to the abelian category L of vector spaces (over \mathbb{R} or \mathbb{C}). We recall [11] that by an *injective resolvent* \mathbf{I} of an object $\mathbf{X} \in \mathbf{H}(TLC)$ we mean any sequence

$$0 \longrightarrow \mathbf{I}_0 \xrightarrow{i_0} \mathbf{I}_1 \xrightarrow{i_1} \dots,$$

formed by injective objects and exact in its members \mathbf{I}_k , $k \geq 1$, with $\ker i_0 \cong \mathbf{X}$. Any two injective resolvents of the same object are homotopic to each other. Since there are many injective objects in the category $\mathbf{H}(TLC)$ [3], each object of this category has at least one injective resolvent. The right derivatives of the Hausdorff limit functor Haus are defined by the formula

$$\text{Haus}^k(\mathbf{X}) = H^k(\text{Haus}(\mathbf{I})) \quad (k = 0, 1, \dots),$$

where $\mathbf{X} \in \mathbf{H}(TLC)$, \mathbf{I} is any injective resolvent of \mathbf{X} , $\text{Haus}(\mathbf{I})$ is the complex of morphisms of the category L obtained by application of the functor Haus to each morphism of the complex \mathbf{I} , and $H^k(\text{Haus}(\mathbf{I}))$ ($k = 0, 1, \dots$) are the homologies of the complex $\text{Haus}(\mathbf{I})$. Each morphism $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ of the category $\mathbf{H}(TLC)$ is covered by a morphism $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Y}$ of the injective resolvents of the objects \mathbf{X} and \mathbf{Y} (see [11, Chapter V, § 1]). From this follows the existence of morphisms $\text{Haus}^k(\mathbf{X}) \rightarrow \text{Haus}^k(\mathbf{Y})$ so that the objects of $\text{Haus}^k(\mathbf{X})$ do not depend on the choice of injective resolvent. On the other hand the functor Haus has injective type [3, p. 88], therefore the canonical isomorphism of functors holds:

$$\text{Haus} \cong \text{Haus}^0.$$

Proposition 3. For every free Hausdorff spectrum $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(L)$

$$\text{Haus}^i(\mathbf{E}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

We now compute the derived functors Haus^i ($i \geq 1$) in the following way (see [2, 10]). Let $\mathbf{X} = \{X_s, \mathbf{F}, h_{s's}\}$ be an arbitrary Hausdorff spectrum and \mathbf{E} the free Hausdorff spectrum with generators X_s ($s \in |\mathbf{F}|$). Let us consider the sequence of Hausdorff spectrum mappings

$$0 \longrightarrow \mathbf{X} \xrightarrow{\omega_{EX}} \mathbf{E} \xrightarrow{\omega_{EE}} \mathbf{E} \longrightarrow 0, \quad (D)$$

in which the components of the mapping ω_{EX} (i.e. the collection $(\omega_{TsT})_{T \in |\varphi(\mathbf{F})|}$, where $s_T \in T$ is the unique maximal element in T with respect to the direction relation) act

according to the formula $\omega_{T s_T} : x_{s_T} \mapsto (\hat{h}_{s' s_T} x_{s_T})_{s' \in T}$, while the Hausdorff spectrum mapping $\omega_{EE} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ is formed by means of the morphisms (T_n is a cofinal right-filtering sequence)

$$\omega_{T^* T_n} : (x_s)_{s \in T_n} \mapsto (x_{s^*} - \hat{h}_{s^* s_{T_n}} X_{s_{T_n}})_{s^* \in T^*}$$

for any $T^*, T_n \in F, F \in \mathbf{F}, T_0 = \emptyset, T_{n-1} \subset T^* \subset T_n, s_{T_n} \notin T^* (n = 1, 2, \dots)$.

It is now clear that the sequence (D) is exact; following V. P. Palamodov [2] we shall call the sequence (D) the *canonical resolvent of the Hausdorff spectrum X*.

Applying the functor Haus to the canonical resolvent (D) we obtain the sequence of locally convex spaces

$$0 \rightarrow \text{Haus}(\mathcal{X}) \rightarrow \bigoplus_{\mathcal{F}} \prod_F X_s \rightarrow \bigoplus_{\mathcal{F}} \prod_F X_s,$$

where $\bigoplus_{\mathcal{F}} \prod_F X_s$ is the direct sum of the products of the $X_s (s \in |\mathbf{F}|)$ under the natural inductive limit topology; this sequence is acyclic and moreover exact from the left.

Proposition 4. *Let Haus : H(TLC) → L and let*

$$0 \longrightarrow \mathbf{X} \xrightarrow{\omega_{YX}} \mathbf{Y} \xrightarrow{\omega_{ZY}} \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \tag{D'}$$

be an exact sequence of Hausdorff spectra. Then the following exact connecting sequence is defined in the category L ($\delta^i (i = 1, 2, \dots)$ are the connecting morphisms):

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Haus}(\mathbf{X}) \longrightarrow \text{Haus}(\mathbf{Y}) \longrightarrow \text{Haus}(\mathbf{Z}) \longrightarrow \text{Haus}^1(\mathbf{X}) \\ &\longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Haus}^{i-1}(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta^{i-1}} \text{Haus}^i(\mathbf{X}) \xrightarrow{\bar{\omega}_{YX}^i} \text{Haus}^i(\mathbf{Y}) \xrightarrow{\bar{\omega}_{ZY}^i} \text{Haus}^i(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta^i} \dots \end{aligned}$$

3. In [1] and [2] V. P. Palamodov established the fundamental Theorems 11.1 and 11.2 giving necessary and sufficient conditions for the vanishing at zero $\text{Pro}^1(\mathbf{X}) = 0$ for the functor Pro of the projective limit of a countable family of locally convex spaces. We aim to establish analogous conditions for the vanishing at zero $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$ for the Hausdorff limit functor and for the not necessarily countable case.

We recall that in questions concerning the stability of the class of H -spaces with respect to Hausdorff limits and also in the theorem about the representation of H -spaces by means of Banach spaces the assumption of regularity of the Hausdorff spectrum was an important condition. Here it will be necessary to impose the following condition. Let $\mathbf{X} = \{X_s, \mathbf{F}, h_{s' s}\}_T$ be a Hausdorff spectrum of locally convex spaces and for each $T \in F$ let $V_F^T \subset \prod_F X_s$ be defined by

$$V_F^T = \left\{ x = (x_s) \in \prod_F X_s : x_{s'} = \hat{h}_{s' s} x_s, s, s' \in T \right\},$$

equipped with the projective topology with respect to the preimages $\pi_s^{-1} \tau_s (s \in T)$, where $\pi_s : \prod_F X_s \rightarrow X_s$ is the canonical projection. The corresponding base of neighborhoods of zero for the projective topology generates the $TVG(\prod_F X_s, \sigma_{(T)}) (T \in F)$.

Let us form the $TVG(\prod_F X_s, \sigma_{(F)})$ with base of neighborhoods of zero $V_F^T (T \in F)$. The Hausdorff spectrum \mathbf{X} is said to be *regular* if $(\prod_F X_s, \sigma_{(F)})$ satisfies the condition: convergence of a net $(a_\gamma)_{\gamma \in P}$ in the $TVG_s(\prod_F X_s, \sigma_{(T)}) (T \in F)$ implies its convergence in the $TVG(\prod_F X_s, \sigma_{(F)})$. If every $X_s (s \in |\mathbf{F}|)$ has the indiscrete topology, then it is not difficult to see that the first part of the condition for regularity is equivalent to completeness of $(\prod_F X_s, \sigma_{(F)})$.

Theorem 1. *Let X be a regular Hausdorff spectrum of nonseparated parts over the category TLC. Then Haus¹(X) = 0.*

If \mathbf{Y} is a regular Hausdorff spectrum over TLC and \mathbf{X} is the Hausdorff spectrum of nonseparated parts, then it is easy to see that \mathbf{X} is also a regular spectrum. In fact, bearing in mind the remark before the theorem, it is sufficient to establish the completeness of $(\prod_F X_s, \sigma_{(F)})$; this TVG is embedded in the corresponding $TVG(\prod_F Y_s, \sigma_{(F)}^1)$. If $(a_\gamma)_{\gamma \in P}$ is fundamental under $\sigma_{(F)}$, then $a_\gamma \in a_{\gamma_0} + V_F^T$ ($\forall T \in F, \gamma \succ \gamma(T), \gamma_0 \succ \gamma(T)$) and because of the closedness of V_F^T in the latter TVG we obtain the inclusion $(a^* = \lim_P a_\gamma)$

$$a^* - a_{\gamma_0} \in V_F^T \quad (\forall T \in F, \gamma_0 \succ \gamma(T)),$$

which also implies the convergence of (a_γ) to a^* in $(\prod_F X_s, \sigma_{(F)})$.

Thus, in the enunciation of Theorem 1 regularity of the Hausdorff spectrum \mathbf{X} can be replaced by regularity of the Hausdorff spectrum \mathbf{Y} .

Theorem 2. *Let \mathbf{Y} be a regular Hausdorff spectrum, \mathbf{X} the Hausdorff spectrum of nonseparated parts of \mathbf{Y} and $0 \rightarrow \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}/\mathbf{X} \rightarrow 0$ an exact sequence of Hausdorff spectra. Then the sequence $0 \rightarrow \text{Haus}(\mathbf{X}) \rightarrow \text{Haus}(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{Haus}(\mathbf{Y}/\mathbf{X}) \rightarrow 0$ is exact in the category L .*

Let us continue our consideration of the question of exactness of the functor $\text{Haus} : \mathbf{H}(TLC) \rightarrow L$ for an arbitrary exact sequence of Hausdorff spectra $0 \rightarrow \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$. From the proofs given above it is clear that a sufficient condition for the vanishing at zero $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$ is the completeness of the $TVG(\prod_F X_s, \sigma_{(F)}^*)$ for each $F \in \mathbf{F}$ (see Proposition 7.1 of [3]), where $\mathbf{I}_{(F)}^*$ is formed by the filtering V_F^T with respect to T . At the same time each space V_F^T is endowed with the linear topology defined by the inverse image $\sup_T \pi_s^{-1} \tau_s$ ($T \in F$) forming at the same time the $TVG(\prod_F X_s, \sigma_{(F)})$ so that the $TVG(\prod_F X_s, \sigma_{(F)})$ is not in general metrizable. It turns out that completeness of the $TVG(\prod_F X_s, \sigma_{(F)}^*)$ is also a necessary condition for the vanishing at zero $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$.

Proposition 5. *Let $\mathbf{X} = \{X_s, \mathbf{F}, h_{s's}\}$ be a countable Hausdorff spectrum over the category L . Then in order that $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$ it is necessary and sufficient that the $TVG(\prod_F X_s, \sigma_{(F)}^*)$ is complete for each $F \in \mathbf{F}$.*

Theorem 3. *Let $\mathbf{X} = \{X_s, \mathbf{F}, h_{s's}\}$ be a countable Hausdorff spectrum over the category L . Then in order that $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$ it is necessary and sufficient that for each $F \in \mathbf{F}$ it is possible to define in $\prod_F X_s$ a quasinorm $\mu = \mu_F \geq 0$ such that*

- (i) *the associated topological group $(\prod_F X_s, \tau_{(F)})$ is complete, $\tau_F \geq \sigma_{(F)}^*$,*
- (ii) *μ_F^* is continuous on $(\prod_F X_s, \sigma_{(F)}^*)$.*

\triangleleft *Necessity.* This follows from the argument before the theorem, since on putting $\tau_F = \sigma_{(F)}^*$ and

$$\mu_F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} d_{T_k}(x),$$

where $d_{T_k}(x) = 0$ for $x \in V_F^{T_k}$ and $d_{T_k}(x) = 1$ for $x \in \prod_F X_s \setminus V_F^{T_k}$ ($k \in \mathbf{N}$), we obtain (i) and (ii).

Sufficiency. Let $Z_F = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_F^{T_k}$ and let the factor space $\prod_F X_s / Z_F$ be endowed with the images of the topologies $\sigma_{(F)}^*$ and τ_F , so that, if

$$d_F(\xi) = \inf_{x \in \xi} \mu_F(x) \quad \text{and} \quad \tilde{d}_F(\xi) = \inf_{x \in \xi} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} d_{T_k}(x),$$

the $MVG(\prod_F X_s/Z_F, d_F)$ is separated and complete and the $MVG(\prod_F X_s/Z_F, \tilde{d}_F)$ is separated. Thus on the $MVG(\prod_F X_s/Z_F, \tilde{d}_F)$ the functional d_F is countably semiadditive and

$$d_F^*(\xi) = \inf_{\xi_n \rightarrow \xi} \lim_{n \rightarrow \infty} d_F(\xi_n) = \inf_{x \in \xi} \mu_F^*(x)$$

is continuous on it. Hence by the Lemma on a countably semiadditive functional [8] we obtain $d_F = d_F^*$ and, consequently, the $MVG(\prod_F X_s/Z_F, \tilde{d}_F)$ is complete. But this means that the $TVG(\prod_F X_s, \sigma_{(F)}^*)$ will be complete, which allows us to conclude on considering all $F \in \mathbf{F}$ that $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$. The Theorem is proved. \triangleright

In the case of a countable inverse spectrum, in particular, we obtain the first part of Theorem 11.1.1 of [1]; in the case of a direct spectrum \mathbf{X} the topology τ_F is indiscrete for each singleton set $F \in \mathbf{F}$. Moreover, the famous lemma of V. P. Palamodov [1], which makes up the main part of the proof, is a special case of the lemma about a countably semiadditive functional [8].

In what follows φ_F^s denotes the filter topology on X_s ($s \in |F|$), which is formed by the spaces $\{\hat{h}_{ss'} X_{s'}\}$ ($s' \in |F|$). We note, however, that the product topology on $\prod_F X_s$ obtained from the topologies φ_F^s ($s \in |F|$) does not in general coincide with the topology $\sigma_{(F)}^*$.

Sufficient conditions for the vanishing at zero $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$, which are more convenient for applications, are given in the following proposition.

Theorem 4. *Let $\mathbf{X} = \{X_s, \mathbf{F}, h_{s's}\}$ be a countable Hausdorff spectrum over the category L . In order that $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$ it is sufficient that for each $s \in |F|$ it is possible to define in X_s a family of quasinorms $\{\rho_{\beta_s}\}$ which determines a complete separated pseudotopological vector space (X_s, ρ_{β_s}) , preserves the continuity of the morphisms $\hat{h}_{s's}$ and is such that for each $s \in |F|$, $F \in \mathbf{F}$ the following condition is satisfied:*

(A) *for some $\beta_s = \beta_s(F)$ the functional $\rho_{\beta_s}^*$ is continuous in the filter topology (X_s, φ_F^s) .*

In particular, in the case of an inverse spectrum \mathbf{X} we obtain Theorem 5.1 of [2] and moreover our assertion is even stronger in this case.

Theorem 5. *Let $\mathbf{X} = \{X_s, \mathbf{F}, h_{s's}\}$ be a countable Hausdorff spectrum of separated H -spaces over the category TLC . Then in order that $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$ it is necessary and sufficient that the spaces (X_s, φ_F^s) ($s \in |F|$) are complete TVG s for each $F \in \mathbf{F}$.*

In the case of an inverse spectrum of Fréchet spaces Theorem 5 extends the criteria (F) and (R) of V. P. Palamodov's Corollary 11.4 in [1]. We note that in Theorem 5 it is separatedness of the pseudotopology which is actually required, therefore in general the H -space may be nonseparated.

Theorem 6. *Let $\mathbf{X} = \{X_s, \mathbf{F}, h_{s's}\}$ be a countable Hausdorff spectrum of H -spaces over the category TLC with separated associated pseudotopology $\{(\rho_s^{P_s})^*\}$ which preserves the continuity of the morphisms $h_{s's}$. Then in order that $\text{Haus}^1(\mathbf{X}) = 0$ it is necessary and sufficient that for each $s \in |F|$ there exists a quasinorm $\rho_s^{P_s}(F)$ ($s \in |F|$) in X_s such that*

(A') *$(\rho_s^{P_s})^*$ is continuous in the filter topology φ_F^s and the system $\{\rho_s^{P_s}\}$ preserves the continuity of the morphisms $h_{s's}$.*

In particular the theorem by Retakh [9] follows from Theorem 6.

References

1. Palamodov V. P. Functor of projective limit in the category of topological linear spaces // Math. Collect.—1968.—Vol. 75, № 4.—P. 567–603.

2. Palamodov V. P. Homological methods in the theory of locally convex spaces // Russian Math. Surveys.—1971.—Vol. 26, № 1.—P. 3–65.
3. Smirnov E. I. Homological spectra in functional analysis.—London: Springer Verlag, 2002.—209 p.
4. Zabreiko P. P., Smirnov E. I. On the closed graph theorem // Siberian Math. J.—1977.—Vol. 18, № 2.—P. 305–316.
5. Rajkov D. A. On the closed graph theorem for topological linear spaces // Siberian Math. J.—1966.—Vol. 7, № 2.—P. 353–372.
6. Smirnov E. I. On continuity of semiadditive functional // Math. Notes.—1976.—Vol. 19, № 4.—P. 541–548.
7. de Wilde M. Reseaux dans les espaces lineaires a seminormes // Mem. Soc. Roi. Sci. Liege.—1969.—Vol. 19, № 4.—P. 1–104.
8. Smirnov E. I. The theory of Hausdorff spectra in the category of locally convex spaces // Functiones et Approximatio.—1996.—Vol. 24.—P. 17–33.
9. Retakh V. S. On dual homomorphism of locally convex spaces // Funct. Anal. and its Appl.—1969.—Vol. 3, № 4.—P. 63–71.
10. Nobeling C. Uber die derivierten des inversen und des directen limes einer modulfamilie // Topology I.—1962.—P. 47–61.
11. Cartan A., Heilenberg C. Homological Algebra.—M.: Mir, 1960.—510 p.
12. Smirnov E. I. Hausdorff spectra and the closed graph theorem // Pitman Research Notes in Math. Series. Proceedings Volume.—England: Longman, 1994.—P. 37–50.

Received September 12, 2012.

SMIRNOV EUGENY IVANOVICH
 Pedagogical University, Department of Mathematics,
 Professor, Ph. D. Hab., Head of Calculus Department
 108 Respublikanskaya Avenue, Yaroslavl, 150000, Russia;
 Southern Mathematical Institute
 Vladikavkaz Science Center of the RAS,
 Leading Researcher of Laboratory of Educational Technologies
 22 Markus street, Vladikavkaz, 362027, Russia
 E-mail: e.smirnov@yspu.yar.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГОМОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ НА БАЗЕ ИТЕРИРОВАННЫХ СПЕКТРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ

Смирнов Е. И.

В статье вводятся новые понятия функционального анализа: хаусдорфов спектр и хаусдорфов предел или H -предел хаусдорфова спектра в категории локально выпуклых пространств (или даже, в более общих полуабелевых категориях). Частными случаями регулярного хаусдорфова предела являются проективный и индуктивный пределы отделимых локально выпуклых пространств. Новый класс H -пространств содержит пространства Фреше и замкнут относительно операций взятия счетного индуктивного и проективного пределов, перехода к замкнутому подпространству и факторпространству. Более того, для H -пространств справедлив усиленный вариант теоремы о замкнутом графике. Доказаны теоремы об обращении в нуль первой производной функтора хаусдорфова предела средствами гомологической алгебры.

Ключевые слова: топология, спектр, замкнутый график, дифференциальные уравнения, гомологические методы, категория.