Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 2, С. 19–27

УДК **517.98, 512.667.7, 517.986.32**

СТРУКТУРА НЕКОТОРЫХ КОМПАКТНЫХ КВАНТОВЫХ ПОЛУГРУПП[1]

М. А. Аухадиев

В работе показывается невыполнение основных результатов теории мультипликативного унитария для компактных квантовых полугрупп, приводятся нетривиальные примеры. Предлагается новый способ задания структуры компактной квантовой полугруппы с использованием пентагонального соотношения, обобщающий теорию мультипликативного унитария.

Ключевые слова: квантовая полугруппа, квантовая группа, функционал Хаара, алгебра Теплица, мультипликативный унитарий, пентагональное соотношение.

1. Введение

После открытия двойственности Понтрягина для абелевых групп появилась серия теорем о двойственности для неабелевых групп: теорема Т. Таннаки [1], М. Г. Крейна [2], а также Стайнспринга, Татсуума. На основе теоремы двойственности Стайнспринга Г. И. Кац в 1963 г. ввел понятие «кольцевых групп» и с помощью этого объекта предложил подход к построению теории двойственности для унимодулярных локально компактных групп, используя алгебру измеримых по инвариантной мере существенно ограниченных функций на этой группе. Он ввел понятие таких гомоморфизмов как копроизведение, коединица и антипод. Алгебра с указанными гомоморфизмами была позже названа алгеброй Каца. В последствии М. Такесаки [3], используя подход Каца, определил групповую алгебру локально компактных групп в общем случае как инволютивную абелеву алгебру Хопфа — фон Неймана с левой инвариантной мерой. В этой теории большое значение имеет унитарный оператор, который был назван оператором Каца — Такесаки.

Пусть G — локально компактная группа с левой мерой Хаара ds. Обозначим H гильбертово пространство $L^2(G, ds)$. Определим унитарный оператор u на $H \otimes H$ равенством

$$(uf)(s,t) = f(st,t), \quad f \in H \otimes H,\ s,t \in G.$$

Этот оператор, названный оператором Каца — Такесаки, удовлетворяет уникальному свойству, которое называется пентагональным соотношением:

$$u_{12}u_{13}u_{23} = u_{23}u_{12}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-97016.

Пусть $\mathfrak{A}(G)$ — алгебра фон Неймана на H, состоящая из всех операторов умножения $\varrho(f)$ на $f \in L^\infty(G)$. Основным фактом данной теории двойственности групп является следующий. Отображение $\delta_G\colon x \to u(x \otimes 1)u^*$ является изоморфизмом $\mathfrak{A}(G)$ в $\mathfrak{A}(G)\bar{\otimes}\mathfrak{A}(G)$ таким, что $(\delta_G \otimes \mathrm{id})\delta_G = (\mathrm{id} \otimes \delta_G)\delta_G$. Пара $(\mathfrak{A}(G), \delta_G)$ является основным примером алгебры Хопфа — фон Неймана. Отображение δ_G было названо *копроизведением*.

После открытия В. Г. Дринфельдом в 1980-х гг. квантовых групп, сразу же приобретших широкую популярность, понтрягинскую двойственность стали обобщать и на этот класс. С. Л. Воронович [4], а также Л. Л. Ваксман и Я. С. Сойбельман предложили C^*-алгебраический подход к теории квантовых групп и построили пример квантовой группы $SU_q(2)$. Затем для этого подхода С. Л. Воронович сформулировал понятие компактной квантовой группы. Для изучения двойственности в новой теории прибегли к помощи оператора Каца — Такесаки. Бааж и Скандалис показали [5], что унитарный оператор, удовлетворяющий пентагональному соотношению, а также некоторым условиям регулярности, позволяет построить компактную квантовую группу. Они назвали этот оператор мультипликативным унитарием. Позже в работах А. Ван Даэля [6] возникло понятие, естественным образом обобщающее компактные квантовые группы — компактные квантовые полугруппы.

С появлением примеров компактных квантовых полугрупп возник вопрос существования мультипликативного унитария для этих объектов. В данной работе мы изучаем возможность обобщения понятия мультипликативного унитария на компактные квантовые полугруппы. Оказывается, такой оператор u может не существовать для компактных квантовых полугрупп, что доказано в разделе 3 на примерах алгебры Теплица и алгебры непрерывных функций на компактной полугруппе с нулем. Но с помощью пентагонального соотношения в разделе 4 мы определяем оператор на C^*-алгебре, который задает нетривиальное копроизведение, и таким образом является обобщением мультипликативного унитария. Предлагаемый оператор, в отличие от мультипликативного унитария, хорошо подходит для тех компактных квантовых полугрупп, для которых функционал Хаара не является точным. А также мы доказываем существование такого оператора для некоторых компактных квантовых полугрупп.

Некоторые вопросы, рассмотренные в данной работе, обсуждались с А. Ван Даэлем на конференции в Варшаве, посвященной семидесятилетию С. Л. Вороновича, за что автор приносит ему свою благодарность. Автор признателен рецензенту за ряд полезных и конструктивных замечаний.

2. Необходимые сведения

Пусть $\mathscr{A}$ — C^*-алгебра. Обозначим через $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ минимальное C^*-тензорное произведение алгебры $\mathscr{A}$ на себя. Унитальный C^*-гомоморфизм $\Delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ называется *копроизведением* (или *коумножением*), если выполняется свойство *коассоциативности*:

$$(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta. \tag{1}$$

Тогда $(\mathscr{A}, \Delta)$ называется *компактной квантовой полугруппой* [6]. Если подпространства

$$\bigl\{\Delta(b)(a \otimes I);\, a, b \in \mathscr{A}\bigr\}, \tag{2}$$

$$\bigl\{\Delta(b)(I \otimes a);\, a, b \in \mathscr{A}\bigr\}, \tag{3}$$

являются линейно плотными в $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, то $(\mathscr{A}, \Delta)$ называется *компактной квантовой группой* [4].

Определение 1. *Коединицей* называется $*$-гомоморфизм $\epsilon\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ такой, что для любого $a \in \mathscr{A}$

$$(\epsilon \otimes id)\Delta(a) = a,$$

$$(id \otimes \epsilon)\Delta(a) = a.$$

Рассмотрим двойственное пространство $\mathscr{A}^*$. Копроизведение Δ естественным образом порождает умножение $*$ в $\mathscr{A}^*$, а именно, для любых $\rho, \varphi \in \mathscr{A}^*$ имеем

$$(\rho * \varphi)(a) = (\rho \otimes \varphi)\Delta(a).$$

Состояние $h \in \mathscr{A}^*$ называется функционалом Хаара в $\mathscr{A}^*$, если следующее условие выполняется для всякого $\rho \in \mathscr{A}^*$:

$$h * \rho = \rho * h = \lambda_\rho h, \tag{4}$$

где λ_ρ — некоторая комплексная константа, зависящая от ρ.

Очевидно (4) эквивалентно выполнению следующих двух условий для любого $a \in \mathscr{A}$:

$$(h \otimes id)\Delta(a) = h(a)I, \tag{5}$$

$$(id \otimes h)\Delta(a) = h(a)I. \tag{6}$$

В случае компактных квантовых групп хорошо известно следующее утверждение, доказанное С. Л. Вороновичем [4].

Теорема 1. *Для любой компактной квантовой группы $(\mathscr{A}, \Delta)$ существует единственный функционал Хаара h. Этот функционал является точным.*

Дадим краткое описание понятия мультипликативного унитария, введенного в [5], дополненное новым термином мультипликативной изометрии.

Пусть H — гильбертого пространство. Обозначим через $\sigma\colon H \otimes H \to H \otimes H$ переставляющее отображение:

$$\sigma(x \otimes y) = (y \otimes x), \quad x, y \in H. \tag{7}$$

Для любого оператора $a \in B(H \otimes H)$ введем обозначения

$$a_{12} = a \otimes I, \quad a_{23} = I \otimes a, \quad a_{13} = \sigma_{12} a_{23} \sigma_{12} = \sigma_{23} a_{12} \sigma_{23}. \tag{8}$$

Определение 2. Оператор $u \in B(H \otimes H)$ назовем *мультипликативной изометрией*, если он изометрический и удовлетворяет пентагональному соотношению

$$u_{12} u_{13} u_{23} = u_{23} u_{12}. \tag{9}$$

Если u, кроме этого, унитарен, то он называется *мультипликативным унитарием.*

Рассмотрим ГНС-представление (H_φ, π_φ) алгебры $\mathscr{A}$, соответствующее состоянию φ. Обозначим через N_φ левый идеал $\{a \in \mathscr{A} : \ \varphi(a^* a) = 0\}$. Для всякого элемента $a \in \mathscr{A}$ обозначим через $\overline{a}$ соответствующий класс эквивалентности в фактор-пространстве $\mathscr{A}/N_\varphi$.

Следующий результат хорошо известен в теории компактных квантовых групп и впервые был получен Баажом и Скандалисом [5].

Теорема 2. *Пусть $(\mathscr{A}, \Delta)$ — компактная квантовая группа с функционалом Хаара h и (H_h, π_h) — ГНС-представление, соответствующее h. Тогда существует мультипликативный унитарий $u \in B(H_h \otimes H_h)$ такой, что*

$$(\pi_h \otimes \pi_h)\Delta(a) = u(\pi_h(a) \otimes I)\, u^*. \tag{10}$$

3. Мультипликативный унитарий и компактные квантовые полугруппы

Как доказал С. Л. Воронович [4], с каждой компактной квантовой группой связан единственный точный функционал Хаара. Отметим, что в доказательстве этого утверждения используется условие плотности множеств (2) и (3). Поэтому для компактных квантовых полугрупп это утверждение может оказаться неверным. Однако, из условия (4) немедленно следует, что если функционал Хаара существует, то он непременно единственный. Условие же точности для некоторых компактных квантовых полугрупп не выполняется, как будет показано далее.

Следующее утверждение известно как часть результата о существовании мультипликативного унитария, порождающего копроизведение для компактной квантовой группы [5]. Однако, мы выделяем его в отдельную теорему, верную для всех компактных квантовых полугрупп.

Теорема 3. *Пусть $(\mathscr{A}, \Delta)$ — компактная квантовая полугруппа с функционалом Хаара h, и (H_h, π_h) — ГНС-представление, соответствующее h. Тогда существует мультипликативная изометрия $u \in B(H_h \otimes H_h)$ такая, что*

$$u^*(\pi_h \otimes \pi_h)(\Delta(a))u = \pi_h(a) \otimes I. \tag{11}$$

$\lhd$ Для любых $a, b \in \mathscr{A}$ определим

$$u(\overline{a} \otimes \overline{b}) = \overline{\Delta(a)(I \otimes b)}. \tag{12}$$

Так как h — функционал Хаара, используя (5), получим

$$\begin{aligned}\big\langle u(\overline{a} \otimes \overline{b}), u(\overline{a} \otimes \overline{b})\big\rangle &= (h \otimes h)((I \otimes b^*)\Delta(a^*)\Delta(a)(I \otimes b)) \\ = h\big((h \otimes id)((I \otimes b^*)\Delta(a^*a)(I \otimes b))\big) &= h\big(b^*(h \otimes id)\Delta(a^*a)b\big) \\ = h(b^*b)h(a^*a) &= \big\langle \overline{a} \otimes \overline{b}, \overline{a} \otimes \overline{b}\,\big\rangle.\end{aligned}$$

Поэтому u — изометрия. Проверим равенство (9):

$$\begin{aligned}u_{12}u_{13}u_{23}(\overline{a} \otimes \overline{b} \otimes \overline{c}) &= u_{12}u_{13}(\overline{a} \otimes u(\overline{b} \otimes \overline{c})) = u_{12}u_{13}\big(\overline{a} \otimes \overline{\Delta(b)(I \otimes c)}\,\big) \\ = u_{12}u_{13}\overline{((a \otimes \Delta(b))(I \otimes I \otimes c))} &= \overline{(\Delta \otimes id)(\Delta(a))(id \otimes \Delta)(I \otimes b)(I \otimes I \otimes c)} \\ = \overline{(id \otimes \Delta)(\Delta(a)(I \otimes b))(I \otimes I \otimes c)} &= u_{23}u_{12}(\overline{a} \otimes \overline{b} \otimes \overline{c}).\end{aligned}$$

Это означает, что u — мультипликативная изометрия. Равенство (11) проверяется прямым вычислением. $\rhd$

Поскольку для компактной квантовой полугруппы условие плотности множеств (2), (3) может не выполняться, то оператор u из теоремы 2 может не быть унитарным, что подтверждается следующим примером. Таким образом, теорема 2 не верна в общем случае компактных квантовых полугрупп. При этом в силу теоремы 3 всегда существует мультипликативная изометрия, необходимо лишь наличие функционала Хаара.

Пример 1. Рассмотрим алгебру Теплица $\mathscr{T}$ — минимальную C^*-алгебру, порожденную изометрическим оператором правостороннего сдвига T и T^* на гильбертовом пространстве H с базисом $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$. В алгебре $\mathscr{T}$ плотны по норме конечные линейные комбинации операторов вида T^nT^{*m}, где n, m — неотрицательные целые числа. Такие операторы мы обозначим через $T_{n,m}$. В [7] было показано, что на этой алгебре можно ввести копроизведение Δ и соответствующий ему функционал Хаара h, задаваемые следующим образом:

$$\Delta(T) = T \otimes T, \tag{13}$$

$$h(I) = 1, \quad h(T_{n,m}) = 0 \tag{14}$$

для любых $m, n \in \mathbb{N}$, кроме $m = n = 0$.

Очевидно, что функционал h, заданный равенством (14), не является точным на $\mathscr{T}$.

Лемма 1. *ГНС-представление алгебры $\mathscr{T}$, соответствующее функционалу Хаара h, является снова алгеброй Теплица, порожденной оператором сдвига $\pi_h(T)$ на H_h.*

$\lhd$ Легко проверяется, что N_h порождено семейством операторов $\{T_{n,m}\}_{m\neq 0}$. Пусть H — гильбертово пространство с базисом $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $e_k = [T^k] = T^k + N_h$. Тогда соответствующее ГНС-представление π_h действует следующим образом:

$$\pi_h(T^n)e_k = \pi_h(T^n)\big[T^k\big] = \big[T^{n+k}\big] = e_{n+k}.$$

Таким образом, $\pi_h(\mathscr{T}) \cong \mathscr{T}$. $\rhd$

Теорема 4. *Не существует мультипликативного унитария для $(\mathscr{T}, \Delta)$, удовлетворяющего* (10).

$\lhd$ Предположим, что $u \in B(H \otimes H)$ — унитарный оператор, удовлетворяющий (10). В частности, выполняются следующие равенства:

$$u(T \otimes I) = (T \otimes T)u, \tag{15}$$

$$u(T^* \otimes I) = (T^* \otimes T^*)u, \tag{16}$$

$$u^*(T^* \otimes T^*) = (T^* \otimes I)u^*. \tag{17}$$

Из равенства (17) следует, что в пространстве H существует ортонормированная система векторов $\{x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots\}$ такая, что $u^*(e_0 \otimes e_i) = e_0 \otimes x_i$. Пусть для оператора u выполняется пентагональное соотношение. Тогда для u^* верно следующее:

$$u_{23}^* u_{13}^* u_{12}^* = u_{12}^* u_{23}^*. \tag{18}$$

Применим левую часть этого равенства к вектору $(e_0 \otimes e_0 \otimes e_i)$, где $i \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} u_{23}^* u_{13}^* u_{12}^* (e_0 \otimes e_0 \otimes e_i) &= u_{23}^* u_{13}^* (e_0 \otimes x_0 \otimes e_i) \\ &= u_{23}^* (e_0 \otimes x_0 \otimes x_i) = e_0 \otimes u^*(x_0 \otimes x_i). \end{aligned}$$

Вычислим правую часть (18) на том же векторе:

$$u_{12}^* u_{23}^* (e_0 \otimes e_0 \otimes e_i) = u_{12}^* (e_0 \otimes e_0 \otimes x_i) = e_0 \otimes x_0 \otimes x_i.$$

Следовательно,

$$u^*(x_0 \otimes x_i) = x_0 \otimes x_i \quad (\forall\, i \geqslant 0). \tag{19}$$

В силу (15) мы имеем

$$u(e_j \otimes x_i) = e_j \otimes e_{j+i} \quad (\forall\, i, j \geqslant 0).$$

Далее, пусть $x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i$. Применив левую часть (16) к вектору $x_0 \otimes x_0$, мы получим

$$u(T^* \otimes I)(x_0 \otimes x_0) = u\bigg(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+1} e_j \otimes x_0\bigg) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+1} u(e_j \otimes x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+1} e_j \otimes e_j.$$

Вычислим значение правой части равенства (16) на векторе $x_0 \otimes x_0$, используя (19):

$$(T^* \otimes T^*)u(x_0 \otimes x_0) = (T^* \otimes T^*)(x_0 \otimes x_0)$$
$$= (T^* \otimes T^*)\Bigg(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i \otimes \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e_j\Bigg) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{i+1}\alpha_{j+1} e_i \otimes e_j.$$

Отсюда следует, что $\alpha_i^2 = \alpha_i$, $\alpha_i\alpha_j = 0$ для любых $i, j \geqslant 1$ таких, что $i \neq j$. Так как $\|x_0\| = 1$, то возможны два случая: $x_0 = e_0$ либо $x_0 = e_n$ для некоторого $n \geqslant 1$.

Пусть $x_0 = e_n$ для некоторого $n \geqslant 1$. Тогда в силу (19), применяя (15) к вектору $e_0 \otimes x_i$, мы получим

$$x_i = e_{n+i} \quad (\forall\, i \geqslant 0).$$

Следовательно, $u(e_0 \otimes e_{n+i}) = e_0 \otimes e_i$ или, что то же самое, $u^*(e_0 \otimes e_i) = e_0 \otimes e_{n+i}$ для любого $i \geqslant 0$. В силу (17) в H существует ортонормированная система векторов $\{y_j,\, j = 1, 2, \ldots\}$ такая, что $u^*(e_j \otimes e_0) = e_0 \otimes y_j$. Поскольку $e_j \otimes e_0 \perp e_0 \otimes e_i$ для любых $i, j \geqslant 1$, то все вектора y_j лежат в конечномерном подпространстве, натянутом на вектора $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$. Это противоречит бесконечности системы $\{y_j,\, j = 1, 2, \ldots\}$. Значит, в этом случае u — не унитарный.

Пусть $x_0 = e_0$, т. е. $u(e_0 \otimes e_0) = e_0 \otimes e_0$, $u(e_0 \otimes e_i) = e_0 \otimes e_i$ для каждого $i \geqslant 0$. Используя (15), для любых $i, k \geqslant 0$ получим

$$u(e_k \otimes e_i) = u(T^k \otimes I)(e_0 \otimes e_i) = (T^k \otimes T^k)(e_0 \otimes e_i) = e_k \otimes e_{k+i}.$$

Следовательно, оператор u отображает пространство $H \otimes H$ в подпространство, порожденное системой векторов $\{e_i \otimes e_j |\, j \geqslant i\}$. Таким образом, u не может быть унитарным. $\rhd$

Итак, существуют компактные квантовые полугруппы без мультипликативного унитария. На первый взгляд, мультипликативная изометрия могла бы служить его заменой. Однако, следующий пример покажет почему это суждение не состоятельно.

Пример 2. Для некоторых компактных квантовых полугрупп ГНС-представление, соответствующее функционалу Хаара, а следовательно, и мультипликативная изометрия, являются тривиальными и не дают информации об исходном объекте. В качестве примера рассмотрим алгебру $C(\mathscr{S})$ непрерывных функций на компактной полугруппе $\mathscr{S}$ с нулем. На ней зададим естественное копроизведение, согласованное с полугрупповой операцией:

$$(\Delta(f))(x, y) = f(xy). \tag{20}$$

Тогда $(C(\mathscr{S}), \Delta)$ является компактной квантовой полугруппой в силу ассоциативности умножения в $\mathscr{S}$. Нулевой элемент $\mathscr{S}$ позволяет задать функционал Хаара h для $(C(\mathscr{S}), \Delta)$:

$$h(f) = f(0).$$

Очевидно, h не является точным. Так как h — чистое состояние, то соответствующее ГНС-представление одномерно. В теории компактных квантовых групп мультипликативный унитарий служит для изучения различных свойств квантовой структуры посредством оператора на гильбертовом пространстве. Приведенные выше примеры показывают, что в случае компактных квантовых полугрупп мультипликативный унитарий может не выполнять эту функцию (пример 2), либо вообще может не существовать (пример 1). На эту роль не подходит и мультипликативная изометрия. В следующем разделе мы дадим новое определение оператора, основанное на понятии мультипликативного унитария. Мы покажем, что этот оператор имеет существенное значение для компактных квантовых полугрупп, и в частности для этих двух примеров.

4. Способ задания копроизведения

Понятие мультипликативного унитария, приведенное в предыдущем разделе, основано на ГНС-представлении, соответствующем функционалу Хаара h. Поскольку π_h является точным представлением для компактной квантовой группы, Δ порождает копроизведение Δ' на $\pi_h(\mathscr{A})$, определенное следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \xrightarrow{\Delta} & \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \\ {\scriptstyle \pi_h}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_h \otimes \pi_h} \\ \pi_h(\mathscr{A}) & \xrightarrow{\Delta'} & \pi_h(\mathscr{A}) \otimes \pi_h(\mathscr{A}). \end{array}$$

Тогда мультипликативный унитарий из теоремы 2 удовлетворяет условию

$$\Delta'(a) = u(a \otimes 1)u^* \tag{21}$$

для любого $a \in \pi_h(\mathscr{A})$.

Правая часть (21) есть результат вычисления унитарного оператора $W : \pi_h(\mathscr{A}) \otimes \pi_h(\mathscr{A}) \to \pi_h(\mathscr{A}) \otimes \pi_h(\mathscr{A})$ на элементе $a \otimes I$, где W определен как умножение слева на u и справа на u^*. При этом, как легко видеть, пентагональное соотношение для u зашифровано в аналогичном уравнении для W. В случае компактной квантовой группы мы можем отождествить $\mathscr{A}$ с $\pi_h(\mathscr{A})$. Тогда W есть линейный унитарный оператор на $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, содержащий в себе всю информацию о квантовой структуре $(\mathscr{A}, \Delta)$:

$$\Delta(a) = W(a \otimes 1). \tag{22}$$

Как показано в предыдущем разделе, в случае компактной квантовой полугруппы не всегда возможно получить оператор W описанным выше образом. Тем не менее, все же может существовать оператор, обладающий теми же свойствами, что и W, за исключением унитарности. Предлагаемое понятие приведено ниже с использованием обозначений предыдущего раздела.

Пусть $\mathfrak{L}(\mathscr{A})$ — алгебра всех линейных непрерывных операторов на C^*-алгебре $\mathscr{A}$. Через $\Sigma \in \mathfrak{L}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{A})$ обозначим переставляющий оператор, $\Sigma(a \otimes b) = b \otimes a$ для $a, b \in \mathscr{A}$.

Для $V \in \mathfrak{L}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{A})$, $a \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ обозначим

$$V_{12} = V \otimes id, \quad V_{23} = id \otimes V, \quad V_{13} = \Sigma_{12} V_{23} \Sigma_{12} = \Sigma_{23} V_{12} \Sigma_{23},$$
$$a_{12} = a \otimes 1, \quad a_{23} = 1 \otimes a, \quad a_{13} = (\Sigma \otimes id)(a_{23}) = \Sigma_{12} a_{23}.$$

Определение 3. Пусть $\mathscr{A}$ — C^*-алгебра. Будем говорить, что $W : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ *удовлетворяет пентагональному соотношению*, если выполняется равенство

$$W_{12} W_{13} W_{23} = W_{23} W_{12}. \tag{23}$$

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2. *$\Delta^L : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, $a \mapsto a \otimes 1$ и $\Delta^R : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, $a \mapsto 1 \otimes a$ задают копроизведение на $\mathscr{A}$. Эти копроизведения называются тривиальными.*

Оператор W с некоторыми дополнительными условиями позволяет задать копроизведение на $\mathscr{A}$.

Теорема 5. *Для унитальной C^*-алгебры $\mathscr{A}$ и унитального C^*-гомоморфизма $W \in \mathfrak{L}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{A})$, удовлетворяющего пентагональному соотношению, определим операторы $\Delta, \widehat{\Delta} : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$:*

$$\Delta = W\Delta^L, \quad \widehat{\Delta} = \Sigma W \Sigma \Delta^R.$$

Тогда $(\mathscr{A}, \Delta)$ и $(\mathscr{A}, \widehat{\Delta})$ — компактные квантовые полугруппы.

$\lhd$ Достаточно проверить условие коассоциативности (1) для отображений Δ, $\widehat{\Delta}$. Для любого $a \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ мы имеем

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)a = \big(W\Delta^L \otimes id\big)a = (W \otimes id)\big(\Delta^L \otimes id\big)a \\ = (W \otimes id)a_{13} = W_{12}(a_{13})\end{aligned}$$

Используя это равенство и условие (23), получаем

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)\Delta(a) = W_{12}(\Delta(a))_{13} = W_{12}(W(a \otimes 1))_{13} = W_{12}W_{13}(a \otimes 1)_{13} \\ = W_{12}W_{13}(a \otimes 1 \otimes 1) = W_{12}W_{13}(id \otimes W)(a \otimes 1 \otimes 1) = W_{12}W_{13}W_{23}(a \otimes 1 \otimes 1) \\ = W_{23}W_{12}(a \otimes 1 \otimes 1) = W_{23}(W(a \otimes 1))_{12} = W_{23}(\Delta(a))_{12} = (id \otimes \Delta)\Delta(a).\end{aligned}$$

Аналогичным способом получим коассоциативность $\widehat{\Delta}$. $\rhd$

Итак, для нетривиальной структуры компактной квантовой полугруппы на $\mathscr{A}$ достаточно иметь оператор W на $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, удовлетворяющий пентагональному соотношению. И наоборот, для компактной квантовой полугруппы найдется оператор W, удовлетворяющий пентагональному соотношению при некоторых условиях.

Теорема 6. *Для любой компактной квантовой полугруппы $(\mathscr{A}, \Delta)$ с коединицей ϵ существуют C^*-гомоморфизмы $W^L, W^R \in \mathfrak{L}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{A})$, удовлетворяющие пентагональному соотношению, такие, что*

$$\Delta = W^L\Delta^L = W^R\Delta^R. \tag{24}$$

$\lhd$ Рассмотрим операторы $W^L = \Delta(id \otimes \epsilon)$, $W^R = \Delta(\epsilon \otimes id)$. Условие (24) немедленно следует из определения коединицы. $\rhd$

Замечание 1. В условиях теоремы 6 W^L, W^R являются проекторами и удовлетворяют следующим условиям:

$$W^LW^R = W^R, \quad W^RW^L = W^L.$$

Кроме того, существуют также C^*-гомоморфизмы $W^{L'}, W^{R'} \in \mathfrak{L}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{A})$:

$$W^{L'} = (id \otimes \epsilon(\cdot)I), \quad W^{R'} = (\epsilon(\cdot)I \otimes id),$$

которые являются проекторами, и выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}W^{L'}\Delta = \Delta^L, \quad W^{R'}\Delta = \Delta^R, \\ W^LW^{L'} = W^L, \quad W^RW^{R'} = W^R.\end{aligned}$$

Вернемся к примерам предыдущего раздела, и покажем, что копроизведения на этих алгебрах задаются при помощи операторов, удовлетворяющих пентагональному соотношению.

Для компактной квантовой полугруппы из примера 1 было доказано в [7] существование коединицы ϵ:

$$\epsilon(T_{n,m}) = 1$$

для всех $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому в силу теоремы 6 существуют гомоморфизмы W^L и W^R на $\mathscr{T} \otimes \mathscr{T}$ такие, что выполняются равенства (24). Эти операторы действуют на порождающей алгебре $\mathscr{T} \otimes \mathscr{T}$ следующим образом:

$$W^L(T_{n,m} \otimes T_{k,l}) = T_{n,m} \otimes T_{n,m},$$

$$W^R(T_{n,m} \otimes T_{k,l}) = T_{k,l} \otimes T_{k,l}.$$

На алгебре непрерывных функций $C(\mathscr{S} \times \mathscr{S})$ на компактной полугруппе $\mathscr{S}$ рассмотрим оператор W:

$$W(f)(x, y) = f(xy, y)$$

для $f \in C(\mathscr{S} \times \mathscr{S})$, $x, y \in \mathscr{S}$. Тогда копроизведение Δ, заданное в примере 2, можно получить из тривиального копроизведения Δ^L, применив W: $\Delta = W\Delta^L$.

Итак, приведенные примеры подтверждают, что теория мультипликативного унитария, построенная для компактных квантовых групп, не подходит в общем случае для компактных квантовых полугрупп. В то же время мы определили понятие оператора, которое обобщает понятие мультипликативного унитария, и показали, что с помощью предложенного оператора можно задать структуру компактной квантовой полугруппы на любой C^*-алгебре.

Литература

1. *Tannaka T.* Uber den Dualitatssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen // Tohoku Math. J.—1939.—Vol. 45.—P. 1–12.
2. *Крейн М. Г.* Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры // Докл. АН СССР.—1949.—Т. 69.—С. 725–728.
3. *Takesaki M.* Duality and von Neumann algebras // Bull. Amer. Math. Soc.—1971.—Vol. 77, № 4.—P. 553–557.
4. *Woronowicz S. L.* Compact quantum groups // Symétries quantiques (Les Houches, 1995).—Amsterdam: North-Holland, 1998.—P. 845–884.
5. *Baaj S., Skandalis G.* Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*-algébres // Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. Ser. 4.—1993.—Vol. 26, № 4.—P. 425–488.
6. *Maes A., Van Daele A.* Notes on Compact Quantum Groups // Nieuw Arch. Wisk. Ser. 4.—1998.—Vol. 16, № 1–2.—P. 73–112.
7. *Аухадиев М. А., Григорян С. А., Липачева Е. В.* Компактная квантовая полугруппа, порожденная изометрией // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 10.—С. 89–93.

Статья поступила 8 декабря 2011 г.

Аухадиев Марат Альфредович
Казанский государственный энергетический университет,
старший преподаватель
РОССИЯ, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, 51
E-mail: m.aukhadiev@gmail.com

STRUCTURE OF SOME COMPACT QUANTUM SEMIGROUPS

Aukhadiev M. A.

We show that the main results of multuplicative unitary theory do not hold for compact quantum semigroups and give examples. We suggest a new method to provide compact quantum semigroup structure by the use of pentagon equation, which gives a generalization of multiplicative unitary theory.

Key words: quantum semigroup, quantum group, Haar functional, Toeplitz algebra, multiplicative unitary, pentagon equation.