Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 3, С. 3–6

УДК **517.547+517.982**

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФРЕШЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ КОНЕЧНОГО ТИПА[1]

А. В. Абанин, П. С. Сергунин, Фам Чонг Тиен

Изучаются весовые пространства Фреше целых функций, задаваемые весовыми последовательностями общего вида. Получены достаточные условия на веса, при которых они обладают топологическими инвариантами Фогта — Вагнера, и, таким образом, относятся к классу пространств степенных рядов конечного типа.

Ключевые слова: весовые пространства целых функций, топологические инварианты.

В работах Д. Фогта [1] и М. Дж. Вагнера [2] (см. также [3, с. 368]) были введены классы пространств Фреше $(\underline{DN})$ и $(\overline{\Omega})$, пересечение которых совпадает с семейством всех пространств степенных рядов конечного типа. Отсюда, в частности, следует, что все пространства, относящиеся к данному семейству, обладают базисом. Отметим, что принято также говорить, что пространства класса $(\underline{DN})$ (или $(\overline{\Omega})$) обладают топологическим инвариантом $(\underline{DN})$ (соответственно $(\overline{\Omega})$). Инварианты $(\underline{DN})$ и $(\overline{\Omega})$ и их модификации имеют важное значение при исследовании ряда задач анализа, когда требуется использовать топологические свойства весовых функциональных пространств (см., например, [4–8]). В работах [4, 7] было установлено, что к классу пространств степенных рядов конечного типа относятся весовые пространства целых функций, задаваемые весовыми последовательностями выпуклых функций специального вида. В [8] была предложена общая схема проверки наличия инвариантов $(\underline{DN})$ и $(\overline{\Omega})$ у весовых пространств голоморфных функций, основанная на исследованиях Ф. Хаслингера из [4]. Недостатком этой схемы, равно как и результатов из [4] и [7], является то, что используемый метод проверки свойства $(\overline{\Omega})$ предполагает наличие нужного описания сопряженного пространства через преобразования Фурье — Лапласа функционалов и, таким образом, имеет достаточно узкую область применения.

В настоящей заметке предлагается применить для этой цели модификацию леммы о декомпозиции из работы [5], имеющую также и самостоятельное значение.

По непрерывной функции $\varphi : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$ (*весу*) образуем банахово пространство

$$E(\varphi) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) : \ |f|_\varphi := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi(z)}} < \infty \right\}.$$

Единичный шар этого пространства обозначим через $B(\varphi)$. Как известно (см., например, [9, 10]), всегда можно считать, что φ — плюрисубгармоническая (коротко, psh-функция) в $\mathbb{C}^N$ функция.

© 2013 Абанин А. В., Сергунин П. С., Фам Чонг Тиен

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8210, а также гранта ЮФУ № 213.01-24/2013-63 «Весовые пространства бесконечно дифференцируемых функций. Общая теория и приложения».

Пусть φ_1, φ_2, φ_3 — psh-функции в $\mathbb{C}^N$ функции, причем $\varphi_3(z) \leqslant \varphi_2(z) \leqslant \varphi_1(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}^N$ и $\varphi_k(z) - \varphi_{k+1}(z) \to +\infty$ при $z \to \infty$ $(k = 1, 2)$. При фиксированных A, α и β положим

$$\Omega^{2,3}_{\alpha,A} := \{z \in \mathbb{C}^N : \ \varphi_2(z) < \varphi_3(z) + \alpha A\},$$
$$\Omega^{1,2}_{\beta,A} := \{z \in \mathbb{C}^N : \ \varphi_2(z) > \varphi_1(z) - \beta A\}.$$

Ясно, что $\Omega^{2,3}_{\alpha,A}$ и $\Omega^{1,2}_{\beta,A}$ — относительно компактные открытые в $\mathbb{C}^N$ множества.

Образуем максимальную psh-функцию $u_{A,\alpha,\beta}$ в $\mathbb{C}^N$, которая не превосходит $\varphi_3(z)+\alpha A$ и $\varphi_1(z) - \beta A$. Напомним, что $u_{A,\alpha,\beta}$ — верхняя регуляризация функции

$$\sup\Big\{u(z) : \ u - \text{psh в } \mathbb{C}^N, \ u(\xi) \leqslant \min\big\{\varphi_3(\xi) + \alpha A, \varphi_1(\xi) - \beta A\big\} \ \big(\forall\, \xi \in \mathbb{C}^N\big)\Big\}.$$

Из определения функции $u_{A,\alpha,\beta}$ и множеств $\Omega^{2,3}_{\alpha,A}$ и $\Omega^{1,2}_{\beta,A}$ следует, что $u_{A,\alpha,\beta}(z) \leqslant \varphi_2(z)$ в $\Omega^{1,2}_{\beta,A}$ и в дополнении $\Omega^{2,3}_{\alpha,A}$ до всей плоскости. Назовем тройку φ_1, φ_2, φ_3 (α, β)-*допустимой*, если $\overline{\Omega^{1,2}_{\beta,A}} \subset \Omega^{2,3}_{\alpha,A}$. Ясно, что это необходимое условие того, что $u_{A,\alpha,\beta}(z)$ может превосходить $\varphi(z)$ в некоторых точках z. Назовем (α, β)-допустимую тройку (α, β)-*сильно допустимой*, если существует такие постоянные $A_0 > 0$ и $D > 0$ и открытое множество $\Omega^{1,2}_{\beta,A} \subset \Omega \subset \Omega^{2,3}_{\alpha,A}$, что при всех $A \geqslant A_0$

$$\varphi_2(z + w) \leqslant u_{A,\alpha,\beta}(z + w) + D, \quad |w| \leqslant 1, \ z \in \partial\Omega.$$

Перед формулировкой леммы о декомпозиции напомним еще, что в соответствии с определением из [10] функция $\varphi : \mathbb{C}^N$ называется *ρ-медленно меняющейся*, где $\rho : \mathbb{C}^N \to (0, 1]$ — некоторая фиксированная функция, если имеется такая постоянная C_0, что

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \leqslant C_0 \quad \text{при всех} \ \ |z - w| \leqslant \rho(z).$$

Лемма о декомпозиции. *Для любой (α, β)-сильно допустимой тройки φ_1, φ_2, φ_3 psh ρ-медленно меняющихся функций, имеются такие $C > 0$ и r_0, что*

$$B(\overline{\varphi}_2) \subset C\left(r^\alpha B(\widetilde{\varphi}_3) + \frac{1}{r^\beta} B(\widetilde{\varphi}_1)\right) \quad (\forall r \geqslant r_0),$$

где $\overline{\varphi}_2(z) := \varphi_2(z) - \frac{N+1}{2}\log(1 + |z|^2)$, $\widetilde{\varphi}_k(z) := \varphi_k(z) + (N + 1)\log\frac{1+|z|^2}{\rho(z)}$, $k = 1, 3$. Другими словами, каждая функция $f \in B(\overline{\varphi}_2)$ при любом $r \geqslant r_0$ разлагается в сумму $f = g + h$ двух целых функций, удовлетворяющих оценкам

$$|g(z)| \leqslant C r^\alpha e^{\widetilde{\varphi}_3(z)}, \quad |h(z)| \leqslant \frac{C}{r^\beta}\, e^{\widetilde{\varphi}_1(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

$\lhd$ Утверждение леммы следует из леммы 2.1 работы [5] за счет процедуры перехода от интегральных оценок к равномерным. $\rhd$

Весовые пространства Фреше целых функций задаются по убывающим последовательностям весов $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ равенством $P(\Phi) := \bigcap_{n=1}^\infty E(\varphi_n)$ и наделяются топологией, определяемой нормами $(|\cdot|_{\varphi_n})_{n=1}^\infty$. Мы будем предполагать, что Φ *разделена функцией* $\log\frac{1+|z|^2}{\rho(z)}$, т. е. при некоторых постоянных $C_n > 0$

$$\varphi_{n+1}(z) + \log\frac{1 + |z|^2}{\rho(z)} \leqslant \varphi_n(z) + C_n, \quad n \in \mathbb{N}, \ z \in \mathbb{C}^N.$$

В соответствии с [3, следствие 29.14] E обладает инвариантом $\overline{\Omega}$ (определение $\overline{\Omega}$ см. в [3, с. 368]) в том и только в том случае, когда

$$(\forall\, p)\,(\exists\, q)\,(\forall\, n)\,(\exists\, C>0)\quad B_q\subset rB_n+\frac{C}{r}B_p\quad (\forall\, r>0),$$

где $B_s:=\{x\in E:\ \|x\|_s\leqslant 1\}$ — единичный шар в E, соответствующий норме $\|\cdot\|_s$.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы.

Теорема. *Пусть упорядоченная по убыванию весовая последовательность Φ разделена функцией $(1+|z|^2)/\rho(z)$, состоит из ρ-медленно меняющихся psh-функций и для любого $p\in\mathbb{N}$ существует такое $q\in\mathbb{N}$, что при всех $n\in\mathbb{N}$ тройка φ_p, φ_q, φ_n является $(1/2,1/2)$-сильно допустимой. Тогда $P(\Phi)$ обладает свойством $\overline{\Omega}$.*

$\lhd$ В самом деле, по лемме о декомпозиции имеются такие $A_0>0$, $C>0$ и $r_0>0$, что

$$B(\overline{\varphi}_q)\subset C\Big(\sqrt{r}B(\widetilde{\varphi}_n)+\frac{1}{\sqrt{r}}B(\widetilde{\varphi}_p)\Big),\quad r\geqslant r_0.$$

В силу разделенности Φ функцией $(1+|z|^2)/\rho(z)$ отсюда следует, что и для исходных шаров выполнено подобное условие:

$$(\forall\, p)\,(\exists\, q)\,(\forall\, n)\,(\exists\, A_0,C,r_0>0)\quad B(\varphi_q)\subset C\Big(\sqrt{r}B(\varphi_n)+\frac{1}{\sqrt{r}}B(\varphi_p)\Big)\quad (r\geqslant r_0).$$

Поскольку мы можем считать без ограничения общности, что $n>q>p$, то $B(\varphi_n)\subset B(\varphi_q)\subset B(\varphi_p)$. Поэтому, увеличив C должным образом, получим требуемое (см. выше) вложение

$$B(\varphi_q)\subset rB(\varphi_n)+\frac{C}{r}B(\varphi_p),\quad r>0. \rhd$$

Напомним еще, что пространство Фреше числовых последовательностей $x=(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$\Lambda_r(\alpha):=\bigg\{x\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}:\ \|x\|_n:=\bigg(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^2|e^{2r_n\alpha_j}\bigg)^{1/2}<\infty\ \ (\forall\, n\in\mathbb{N})\bigg\},$$

где $r_n\uparrow r<\infty$, $\alpha=(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, называется *пространством степенных рядов конечного типа.* Ясно, что орты образуют в этом пространстве абсолютный базис. Класс всех пространств степенных рядов конечного типа образуют пространства, изоморфные $\Lambda_r(\alpha)$ $(r<\infty)$.

Следствие. *Пусть Φ удовлетворяет всем требованиям теоремы и дополнительно известно, что*

$$\begin{gathered}(\exists\, n)\ (\forall\, m)\ (\exists\, k)\ (\exists\, \alpha\in(0,1))\ (\exists\, C>0)\\ \alpha\varphi_n(z)+(1-\alpha)\varphi_k(z)\leqslant\varphi_m(z)+C\quad (z\in\mathbb{C}^N).\end{gathered}\tag{1}$$

Тогда пространство $P(\Phi)$ является пространством степенных рядов конечного типа и, в частности, обладает абсолютным базисом.

$\lhd$ В самом деле, по теореме пространство $P(\Phi)$ обладает свойством $\overline{\Omega}$, а условие (1) влечет в соответствии с результатами [8] наличие у него свойства $(\underline{DN})$. Остается применить предложение 29.18 из [3], которое утверждает, что класс пространств степенных пространств конечного типа образуют пространства, обладающие инвариантами $\overline{\Omega}$ и $(\underline{DN})$. $\rhd$

Литература

1. *Vogt D.* Charakterisierung der Potenzreihenräume von endlichem Typ // Stud. Math.—1982.—Vol. 71.—P. 251–270.
2. *Wagner M. J.* Quotienten von stabilen Potenzreihenräumen endlichen Typs // Manuscripta Math.—1980.—Vol. 31.—P. 269–301.
3. *Meise R., Vogt D.* Introduction to Functional Analysis.—New York: Oxford Univ. Press, 1997.—448 p.
4. *Haslinger F.* Weighted spaces of entire functions // Indiana Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, № 1.—P. 193–208.
5. *Meise R., Taylor B. A.* A decomposition lemma for entire functions and its applications to spaces of ultradifferentiable functions // Math. Nachr.—1989.—Vol. 142.—P. 45–72.
6. *Tidten M.* A geometric characterization for the property $(\underline{DN})$ of $\mathscr{E}(K)$ for arbitrary compact subset K of $\mathbb{R}$ // Arch. Math.—2001.—Vol. 77.—P. 247–252.
7. *Ахтямов Н. Т., Мусин И. Х.* О существовании базиса в весовом пространстве целых функций // Уфимский мат. журн.—2009.—Т. 1, № 1.—С. 3–15.
8. *Абанин А. В., Сергунин П. С.* Топологические инварианты весовых пространств голоморфных функций и их приложения // Порядковый анализ и смежные вопросы мат. моделирования: тез. докл. междунар. науч. конф. (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2013.—С. 40–41.
9. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Associated weights and spaces of holomorphic functions // Stud. Math.—1998.—Vol. 127.—P. 137–168.
10. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some of its applications // Stud. Math.—2010.—Vol. 200, № 3.—P. 279–295.

Статья поступила 23 апреля 2013 г.

Абанин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
заведующий отделом математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: abanin@math.rsu.ru

Сергунин Павел Сергеевич
Южный федеральный университет,
ассистент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: paviol88@mail.ru

Фам Чонг Тиен
Южный федеральный университет,
аспирант кафедры математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: phamtien@mail.ru

WEIGHTED FRÉCHET SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS FROM THE CLASS OF POWER SERIES SPACES OF FINITE TYPE

Abanin A. V., Sergunin P. S., Pham Trong Tien

We study weighted Fréchet spaces of entire functions given by weighted sequences of a general kind. We obtain some sufficient conditions under which they have Vogt–Wagner topological invariants and thus belong to the class of power series spaces of finite type.

Key words: weighted spaces of entire functions, topological invariznts.