Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 3, С. 77–88

УДК **517.98**

ОБОБЩЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ[1]

Б. Б. Тасоев

В работе построено обобщенное функциональное исчисление. Рассмотрена взаимосвязь с двойственностью Минковского, на основе которой установлены некоторые неравенства выпуклости.

Ключевые слова: векторная решетка, обобщенное функциональное исчисление, двойственность Минковского, суперлинейные и сублинейные операторы, неравенства выпуклости.

1. Введение

Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \ldots, x_N \in E$. Изучение непрерывных положительно однородных функций $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, для которых естественно можно определить $\varphi(x_1, \ldots, x_N) \in E$ называем *функциональным исчислением.* В работе [7] было показано, что естественным образом определяется положительно однородная функция от элементов равномерно полной векторной решетки, если эта функция определена на коническом множестве конечномерного пространства и непрерывна на некотором подконусе последнего.

Цель данной работы — показать, что конструктивным образом можно определить положительно однородную функцию от элементов равномерно полной векторной решетки, если эта функция со значениями в произвольной f-подалгебре идеального центра определена на коническом множестве конечномерного пространства и непрерывна на на некотором его подмножестве. Эта конструкция обобщает аналогичные результаты из [4, 6, 7]. Изучение вышеназванных функций будем называть *обобщенным функциональным исчислением.* Также рассмотрена связь обобщенного функционального исчисления с двойственностью Минковского, на основе которой доказываются некоторые классические неравенства выпуклости.

2. Вспомогательные леммы и определение

В этом параграфе дадим определение обобщенного функционального исчисления. Все рассматриваемые векторные решетки предполагаются архимедовыми.

Всюду далее E — равномерно полная векторная решетка, L — векторная подрешетка в E и Λ — f-подалгебра в идеальном центре $\mathscr{Z}(E)$ с равномерной топологией. Норма

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8210, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00623-а.

в $\mathscr{Z}(E)$ задается формулой $\|\pi\| := \inf\{\lambda > 0 : |\pi| \leqslant \lambda I\}$ $(\pi \in \Lambda)$, где I — тождественный оператор на E. Будем предполагать, что L является Λ-модулем. Это означает, что $\pi x \in L$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Обозначим через $\mathrm{Hom}(L)$ и $\mathrm{H_m}(\Lambda)$, соответственно, множество всех $\mathbb{R}$-значных решеточных гомоморфизмов на L и множество всех $\mathbb{R}$-значных мультипликативных решеточных гомоморфизмов на Λ.

Следующая лемма играет важную роль при построении обобщенного функционального исчисления.

Лемма 2.1. *Для любого $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ существует единственный $\widetilde{\omega} \in \mathrm{H_m}(\Lambda)$ такой, что $\|\widetilde{\omega}\| \leqslant 1$, $\omega(\pi x) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. При этом $\widetilde{\lambda\omega} = \widetilde{\omega}$ для всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$.*

$\lhd$ Если $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ равен нулю, то полагая $\widetilde{\omega}(\pi) = 0$ для всех $\pi \in \Lambda$, получим требуемое. Пусть $0 \neq \omega \in \mathrm{Hom}(L)$. Билинейное отображение $b : \Lambda \times L \to \mathbb{R}$, действующее по формуле $b(\pi, x) := \omega(\pi x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$, является решеточным биморфизмом. Согласно [1, теорема 3.2] существуют решеточные гомоморфизмы $S : \Lambda \to \mathbb{R}$ и $T : L \to \mathbb{R}$ такие, что
$$\omega(\pi x) = S(\pi)\,T(x) \tag{1}$$
для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Взяв в качестве π тождественный оператор I на E, получим $\omega(x) = S(I)T(x)$. Отсюда, ввиду $0 \neq \omega$ следует $S(I) > 0$ и $T(x) = \alpha\omega(x)$, где $\alpha = S(I)^{-1}$. Положим по определению $\widetilde{\omega}(\pi) := \alpha S(\pi)$ для всех $\pi \in \Lambda$. Тогда из равенства $T(x) = \alpha\omega(x)$ и формулы (1) следует $\omega(\pi x) = S(\pi)\alpha\omega(x) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Покажем мультипликативность гомоморфизма $\widetilde{\omega}$. Пусть $\pi, \rho \in \Lambda$. Тогда $\omega((\pi\rho)x) = \widetilde{\omega}(\pi\rho)\omega(x)$ для всех $x \in L$. С другой стороны $\omega((\pi\rho)x) = \omega(\pi(\rho x)) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(\rho x) = \widetilde{\omega}(\pi)\widetilde{\omega}(\rho)\omega(x)$ для всех $x \in L$. Поскольку $0 \neq \omega$, выполняется равенство $\widetilde{\omega}(\pi\rho) = \widetilde{\omega}(\pi)\widetilde{\omega}(\rho)$. Единственность $\widetilde{\omega}$ также следует из равенства $\omega(\pi x) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$.

Покажем, что $\widetilde{\lambda\omega} = \widetilde{\omega}$ для всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$. Предположим, что решеточный гомоморфизм $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ отличен от нуля, так как в противном случае доказывать нечего. Тогда $\lambda\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ и в силу определения $\widetilde{\lambda\omega}$ выполняются равенства $\lambda\omega(\pi x) = \widetilde{\lambda\omega}(\pi)\lambda\omega(x) = \widetilde{\lambda\omega}(\pi)\omega(\lambda x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. С другой стороны, $\lambda\omega(\pi x) = \lambda(\omega(\pi x)) = \lambda\widetilde{\omega}(\pi)\omega(x) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(\lambda x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Из условий $\omega \neq 0$ и $\lambda > 0$ выводим $\widetilde{\lambda\omega} = \widetilde{\omega}$. Соотношение $\|\widetilde{\omega}\| \leqslant 1$ следует из того, что $\widetilde{\omega}(I) = 1$, а единичный шар в Λ совпадает с порядковым интервалом $[-I, I]$. $\rhd$

Пусть $x_1, \dots, x_N \in E$ не равны нулю одновременно. Символом $\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle$ обозначим Λ-модульную подрешетку в E, порожденную набором $\mathfrak{x} := (x_1, \dots, x_N)$. Положим по определению
$$\Lambda[\mathfrak{x}] := \Lambda[x_1, \dots, x_N] := \big\{(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)) : \, 0 \neq \omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle)\big\}.$$

Лемма 2.2. *Пусть $\mathscr{S} := \{t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |t_1| + \ldots + |t_N| = 1\}$, $u := |x_1| + \ldots + |x_N|$, $\Omega := \{\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle),\, \omega(u) = 1\}$ и $\Omega(x_1, \dots, x_N) := \{(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)) : \omega \in \Omega\}$. Тогда $\Omega(x_1, \dots, x_N)$ компактное множество в $\mathbb{R}^N$, $\mathscr{S} \cap \Lambda[x_1, \dots, x_N] = \Omega(x_1, \dots, x_N)$ и $\Lambda[x_1, \dots, x_N] = \bigcup\{\lambda\Omega(x_1, \dots, x_N) : 0 < \lambda \in \mathbb{R}\}$.*

$\lhd$ В силу того, что для каждого гомоморфизма $\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle)$ выполняется равенство $|\omega(x_1)| + \ldots + |\omega(x_N)| = \omega(u)$ следует справедливость формулы $\mathscr{S} \cap \Lambda[x_1, \dots, x_N] = \Omega(x_1, \dots, x_N)$. Проверим компактность $\Omega(x_1, \dots, x_N)$ в $\mathbb{R}^N$. Обозначим через $L := \Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle$ и снабдим Ω топологией, индуцируемой из $\mathbb{R}^L$. Тогда Ω является компактным множеством в $\mathbb{R}^L$. В самом деле, замкнутость Ω в $\mathbb{R}^L$ очевидна.

Так как u сильная порядковая единица в L, то для каждого $x \in L$ найдется такое число $\mu_x \geqslant 0$, что $|x| \leqslant \mu_x u$. Поэтому $\Omega \subset \prod_{x\in L}[-\mu_x, \mu_x]$. По теореме Тихонова $\prod_{x\in L}[-\mu_x, \mu_x]$ является компактным множеством в $\mathbb{R}^L$. Следовательно, Ω является замкнутым подмножеством компактного множества. Заметим, что $\Omega(x_1 \dots, x_N)$ служит образом Ω при непрерывном отображении $\omega \mapsto (\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))$ из $\mathbb{R}^L$ в $\mathbb{R}^N$. Поэтому $\Omega(x_1, \dots, x_N)$ — компактное множество в $\mathbb{R}^N$.

Справедливость формулы $\Lambda[x_1, \dots, x_N] = \bigcup\{\lambda\Omega(x_1 \dots, x_N) : 0 < \lambda \in \mathbb{R}\}$ следует из равенства $\mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle) \setminus \{0\} = \bigcup\{\lambda\Omega : 0 < \lambda \in \mathbb{R}\}$. $\rhd$

Множество $C \subset \mathbb{R}^N$ называется *коническим*, если $\lambda C \subset C$ для всех $\lambda \geqslant 0$. Функция $\varphi : C \to \Lambda$, заданная на коническом множестве C, называется *положительно однородной*, если $\varphi(\lambda t) = \lambda\varphi(t)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ и $t \in C$.

Пусть коническое множество $C \subset \mathbb{R}^N$ содержит K. Символом $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ будем обозначать векторную решетку, состоящую из всех положительно однородных функций $\varphi : C \to \Lambda$, непрерывных на K.

Определение 2.1. Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \dots, x_N, y \in E$, Λ — f-подалгебра в $\mathscr{Z}(E)$. Предположим, что K содержит $\Lambda[x_1 \dots, x_N]$ и $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$. Будем писать $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, если выполняется равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle)$.

Всюду далее в этом параграфе будем предполагать, что $x_1, \dots, x_N, y \in E$ и $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$.

Лемма 2.3. *Пусть $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, L — некоторая Λ-модульная подрешетка в E, содержащая $y, x_1, \dots, x_N$. Тогда $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$.*

$\lhd$ Пусть $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$. Обозначим через ω' сужение ω на $\Lambda\langle x_1 \dots, x_N, y\rangle$. Предположим сначала, что $\omega(x_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, N$. Тогда $\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)) = 0$ и справедливы равенства $\omega(y) = \omega'(y) = \widetilde{\omega'}(\varphi(\omega'(x_1), \dots, \omega'(x_N))) = \widetilde{\omega'}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) = 0 = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$. Пусть теперь $\omega(x_j) \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, \dots, N\}$. Тогда в силу леммы 2.2 выполняются равенства $\widetilde{\omega}(\pi)\omega(x_j) = \omega(\pi x_j) = \omega'(\pi x_j) = \widetilde{\omega'}(\pi)\omega'(x_j) = \widetilde{\omega'}(\pi)\omega(x_j)$ для всех $\pi \in \Lambda$, поэтому $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega'}$. Следовательно, $\omega(y) = \omega'(y) = \widetilde{\omega'}(\varphi(\omega'(x_1), \dots, \omega'(x_N))) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$. $\rhd$

Лемма 2.4. *Существует единственный элемент $y \in E$ такой, что $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$.*

$\lhd$ Предположим, что для некоторых $y, y_1 \in E$ выполняются $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ и $y_1 = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$. Обозначим через $L := \Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y, y_1\rangle$. В силу леммы 2.3 справедливы равенства $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) = \omega(y_1)$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$. Поскольку в L имеется сильная порядковая единица, то по теореме Крейнов — Какутани $L \subset C(Q)$, где Q — подходящий компакт. Следовательно, $\mathrm{Hom}(L)$ различает точки из L, что влечет справедливость леммы. $\rhd$

Лемма 2.5. *Пусть подмножество $G \subset \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle)$ различает точки из $\Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle$. Если для всех $\omega \in G$ выполняется равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$, то $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$.*

$\lhd$ Введем обозначения $u := |x_1| + \ldots + |x_N| + |y|$, $L := \Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle$, $\Omega := \{\omega \in \mathrm{Hom}(L) : \omega(u) = 1\}$ и $\Omega' := \Omega \cap G$. Так как $\mathrm{Hom}(L) \setminus \{0\} = \bigcup\{\lambda\Omega : 0 < \lambda \in \mathbb{R}\}$, то в силу леммы 2.1 и положительной однородности φ достаточно установить $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \Omega$. По условию леммы Ω' различает точки из L, и для всех $\omega \in \Omega'$ справедливо равенство

$$\omega(y) = \widetilde{\omega}\big(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))\big). \tag{2}$$

Снабдим Ω топологией поточечной сходимости, индуцируемой из $\mathbb{R}^L$. Тогда Ω замкнуто в $\mathbb{R}^L$ и L является векторной подрешеткой в $C(\Omega)$. Так как u сильная порядковая единица в L, то для каждого $x \in L$ найдется такое число $\mu_x \geqslant 0$, что $|x| \leqslant \mu_x u$. Поэтому $\Omega \subset \prod_{x\in L}[-\mu_x, \mu_x]$. По теореме Тихонова $\prod_{x\in L}[-\mu_x, \mu_x]$ является компактным множеством в $\mathbb{R}^L$. Следовательно, Ω — компактное множество. По теореме Вейерштрасса L плотна по норме в $C(\Omega)$. Поэтому в силу [5, лемма 1.2] L порядково плотна в $C(\Omega)$. Отсюда вытекает плотность множества Ω' в Ω. Действительно, если это не так, то по лемме Урысона существует ненулевая функция $x : \Omega \to [0, 1]$, обращающаяся в нуль на Ω'. В силу порядковой плотности L в $C(\Omega)$ подберем $x_0 \in L_+$ так, чтобы $0 \neq x_0 \leqslant |x|$. Тогда $\omega(x_0) = 0$ для всех $\omega \in \Omega'$, что противоречит условию Ω' различает точки из L.

Покажем, что для произвольного $\omega \in \Omega$ выполняется равенство (2). Возьмем сеть $(\omega_\alpha) \subset \Omega'$, сходящуюся к ω. Тогда $\omega_\alpha(\pi x) \to \omega(\pi x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Полагая в этом соотношении $x = u$, ввиду леммы 2.1 получим $\widetilde{\omega}_\alpha(\pi) \to \widetilde{\omega}(\pi)$ для всех $\pi \in \Lambda$. Полагая $\pi = I$, из последнего соотношения вытекает

$$\|\widetilde{\omega}_\alpha - \widetilde{\omega}\| \to 0. \tag{3}$$

Если $\omega(|x_1|+\ldots+|x_N|) \neq 0$, то ввиду формулы (3), непрерывности φ и леммы 2.1 следует справедливость соотношений

$$\begin{aligned} &\bigl|\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega_\alpha(x_1), \ldots, \omega_\alpha(x_N))) - \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)))\bigr| \\ &\leqslant \bigl|\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega_\alpha(x_1), \ldots, \omega_\alpha(x_N))) - \widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)))\bigr| \\ &\quad + \bigl|\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N))) - \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)))\bigr| \\ &\leqslant \bigl\|\varphi(\omega_\alpha(x_1), \ldots, \omega_\alpha(x_N)) - \varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N))\bigr\| \\ &\quad + \bigl\|\widetilde{\omega}_\alpha - \widetilde{\omega}\bigr\|\bigl\|\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N))\bigr\| \to 0. \end{aligned}$$

Мы получили, что $\omega_\alpha(y) \to \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)))$. С другой стороны, по определению топологии на Ω верно $\omega_\alpha(y) \to \omega(y)$, поэтому $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)))$.

Покажем, что $\omega(|x_1| + \ldots + |x_N|)$ не может равняться нулю. В самом деле, если $\omega(|x_1| + \ldots + |x_N|) = 0$, то $\omega(|y|) = \omega(u) = 1$. Поэтому для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется индекс α_0 такой, что $\omega_\alpha(y) > 1 - \varepsilon$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Отсюда, ввиду формулы (2) $\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega_\alpha(x_1), \ldots, \omega_\alpha(x_N))) > 1 - \varepsilon$, что влечет $\omega_\alpha(|x_1| + \ldots + |x_N|) \neq 0$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Обозначим через $x_0 := |x_1| + \ldots + |x_N|$. Тогда в силу положительной однородности φ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \omega_\alpha(y) &= \widetilde{\omega}_\alpha\bigl(\varphi(\omega_\alpha(x_1), \ldots, \omega_\alpha(x_N))\bigr) \\ &= \omega_\alpha(x_0)\,\widetilde{\omega}_\alpha\left(\varphi\left(\frac{\omega_\alpha(x_1)}{\omega_\alpha(x_0)}, \ldots, \frac{\omega_\alpha(x_N)}{\omega_\alpha(x_0)}\right)\right) \end{aligned} \tag{4}$$

для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Так как φ непрерывная функция и $\left(\frac{\omega_\alpha(x_1)}{\omega_\alpha(x_0)}, \ldots, \frac{\omega_\alpha(x_N)}{\omega_\alpha(x_0)}\right) \in \mathscr{S} := \bigl\{t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |t_1| + \ldots + |t_N| = 1\bigr\}$, то из компактности $\mathscr{S}$ и формулы (4) следует существование числа $M > 0$, удовлетворяющего неравенству

$$1 - \varepsilon < \omega_\alpha(y) \leqslant M \cdot \omega_\alpha(x_0)$$

для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Переход к пределу в последнем неравенстве влечет $1-\varepsilon \leqslant M\omega(x_0) = 0$ — противоречие. Следовательно, формула (2) справедлива для всех $\omega \in \Omega$. $\rhd$

Лемма 2.6. *Пусть L_1 — Λ-модульная подрешетка в E, $x_1, \ldots, x_N, y \in L_1$ и $\mathrm{Hom}(L_1)$ различает точки из L_1. Если равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)))$ выполняется для всех $\omega \in L_1$, то $y = \varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)$.*

$\lhd$ Пусть $L := \Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle$. Обозначим через $G := \{\omega|_L : \omega \in \mathrm{Hom}(L_1)\}$. Тогда G разделяет точки из L и справедливо равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in G$. По лемме 2.5 $y = \varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N)$. $\rhd$

3. Основной результат

Далее мы сформулируем результат, в котором устанавливается Λ-модульный гомоморфизм из класса $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ в E. Образ этого гомоморфизма равномерно замкнут и конечно порожден, если f-подалгебра Λ замкнута по норме.

Обозначим символом $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ множество всех функций $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$, для которых существует $\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N) \in E$. В силу леммы 2.4 существует отображение $\widehat{\mathfrak{x}} : \varphi \mapsto \varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N)$ из $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ в E. В векторной решетке $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ введем структуру модуля над кольцом Λ следующим образом:

$$(\pi\varphi)(t) := \pi \circ \varphi(t), \tag{5}$$

где $\pi \in \Lambda$, $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$, $t = (t_1, \dots, t_N) \in C$. Введем функции $dt_i \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ по формуле $dt_i(t) = t_i I$, где $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$. Обозначим через $e := |dt_1| + \ldots + |dt_N| \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$. Из положительной однородности следует $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ e-равномерно полно и $e(t) = \|t\| I$ для всех $t \in \mathbb{R}^N$.

Определение 3.1. Пусть E, F — векторные решетки, Λ, Λ' — f-подалгебры соответственно в $\mathscr{L}(E)$ и $\mathscr{L}(F)$, $\iota : \Lambda \to \Lambda'$ — мультипликативный порядковый изоморфизм. Будем говорить, что решеточный гомоморфизм $h : E \to F$ Λ-*модульный*, если выполняется равенство $h(\pi x) = \iota\pi(hx)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in E$. При отождествлении Λ с Λ' будем писать $h(\pi x) = \pi(hx)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in E$.

Лемма 3.1. *Множество $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ является Λ-модульной решеткой и отображение $\widehat{\mathfrak{x}} : \varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ является Λ-модульным решеточным гомоморфизмом из $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ в E таким, что $\widehat{\mathfrak{x}}(dt_i) = x_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$.*

$\lhd$ Возьмем $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$, и пусть $y_1 = \varphi_1(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ и $y_2 = \varphi_2(\cdot, x_1, \dots, x_N)$. Обозначим через $L := \Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y_1, y_2\rangle$. В силу леммы 2.3 для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ справедливы равенства $\omega(y_1) = \widetilde{\omega}(\varphi_1(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ и $\omega(y_2) = \widetilde{\omega}(\varphi_2(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$. Складывая эти равенства, получим $\omega(y_1 + y_2) = \widetilde{\omega}[(\varphi_1 + \varphi_2)(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))]$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$. Отсюда, в силу леммы 2.6 $y_1 + y_2 = (\varphi_1 + \varphi_2)(\cdot, x_1, \dots, x_N)$. Аналогично можно показать $\widehat{\mathfrak{x}}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \widehat{\mathfrak{x}}(\varphi_1) \vee \widehat{\mathfrak{x}}(\varphi_2)$ и $\widehat{\mathfrak{x}}(\lambda\varphi_1) = \lambda\widehat{\mathfrak{x}}(\varphi_1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Докажем, что $\widehat{\mathfrak{x}}$ Λ-модульный гомоморфизм. Возьмем $\pi \in \Lambda$, $\varphi \in \mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ и пусть $y = \widehat{\mathfrak{x}}(\varphi)$. В силу мультипликативности $\widetilde{\omega}$ имеем $\omega(\pi y) = \widetilde{\omega}(\pi) \cdot \omega(y) = \widetilde{\omega}(\pi) \cdot \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) = \widetilde{\omega}[(\pi\varphi)(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))]$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle)$. Следовательно, применив лемму 2.6, получим $\pi y = (\pi\varphi)(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, что означает $\pi(\widehat{\mathfrak{x}}(\varphi)) = \widehat{\mathfrak{x}}(\pi\varphi)$. $\rhd$

Лемма 3.2. *Λ-модульная решетка $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ e-равномерно замкнута в $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$, где $e = |dt_1| + \ldots + |dt_N|$.*

$\lhd$ Пусть последовательность $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ сходится к $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ с регулятором e. Тогда $y_n := \widehat{\mathfrak{x}}(\varphi_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ будет r-фундаментальной последовательностью в E с регулятором $u := \widehat{\mathfrak{x}}(e) = |x_1| + \ldots + |x_N|$. В силу полноты E существует $y \in E$ такой, что $y_n \to y$ с регулятором u. Пусть L обозначает идеал в E, порожденный элементом $|y| + u$. Тогда последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержится в L и $\mathrm{Hom}(L)$ различает точки из L. Для каждого $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ выполняется $\omega(y_n) \to \omega(y)$. В свою очередь, в силу леммы 2.3 $\omega(y_n) = \widetilde{\omega}(\varphi_n(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и так как $\varphi_n \to \varphi$ в каждой точке из конического множества C, то $\widetilde{\omega}(\varphi_n(\omega(x_1),\dots,\omega(x_N))) \to \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1),\dots,\omega(x_N)))$. Таким образом, $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1),\dots,\omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$. В силу леммы 2.6 $y = \varphi(\cdot,\, x_1,\dots,x_N)$, т. е. $\varphi \in \mathscr{F}(\cdot,\mathfrak{x})$. $\rhd$

Теорема 3.1. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, Λ — f-подалгебра в $\mathscr{Z}(E)$, $x_1,\dots,x_N \in E$. Предположим, что $K \subset \mathbb{R}^N$ содержит $\Lambda[x_1,\dots,x_N]$. Тогда отображение $\widehat{\mathfrak{x}} : \varphi \mapsto \varphi(\cdot,x_1,\dots,x_N)$ единственный Λ-модульный решеточный гомоморфизм из $\mathscr{H}(C,K,\Lambda)$ в E такой, что $\widehat{\mathfrak{x}}(dt_i) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$. Более того, $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C,K,\Lambda))$ содержится в u-равномерном замыкании Λ-модульной подрешетки, порожденной $x_1,\dots,x_N$, т.е. $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C,K,\Lambda)) \subset \overline{\Lambda\langle x_1,\dots,x_N\rangle}$, где замыкание вычисляется в E равномерно относительно $u = |x_1| + \ldots + |x_N|$. Если Λ замкнута по норме в $\mathscr{Z}(E)$, то $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C,K,\Lambda)) = \overline{\Lambda\langle x_1,\dots,x_N\rangle}$.*

$\lhd$ Предположим сначала, что $K = \Lambda[\mathfrak{x}]$ и $C = \Lambda[\mathfrak{x}] \cup \{0\}$. Пусть F_N является Λ-модульной подрешеткой в $\mathscr{H}(C,K,\Lambda)$, порожденная функциями $dt_1,\dots,dt_N$, т. е. $F_N := \Lambda\langle dt_1,\dots,dt_N\rangle$. Покажем, что гомоморфизм $\widehat{\mathfrak{x}} : \mathscr{F}(\cdot,\mathfrak{x}) \to E$ из леммы 3.1 распространяется на $\mathscr{H}(C,K,\Lambda)$. Для этого в силу леммы 3.2 и соотношения $F_N \subset \mathscr{F}(\cdot,\mathfrak{x})$ достаточно доказать e-равномерную плотность F_N в $\mathscr{H}(C,K,\Lambda)$, где $e = |dt_1|+\ldots+|dt_N|$.

По лемме 2.2 множество $P := \Lambda[x_1,\dots,x_N] \cap \mathscr{S}$, где $\mathscr{S} := \{t \in \mathbb{R}^N : \|t\| = 1\}$, компактно в $\mathbb{R}^N$. Ввиду положительной однородности каждая функция из $\mathscr{H}(C,K,\Lambda)$ однозначно определяется своими значениями на P. Поэтому $\mathscr{H}(C,K,\Lambda)$ отождествляется с $C(P,\Lambda)$. В силу [5, предложение 2.1] существует компакт Q и решеточный изоморфизм σ из Λ на плотную по норме векторную подрешетку в $C(Q)$, при котором мультипликативная единица $I \in \Lambda$ переходит в тождественную единицу $\mathbf{1}_Q$. Отсюда в силу [3, теорема 2.58] выполняется равенство

$$\sigma(\pi_1 \circ \pi_2) = \sigma(\pi_1) \cdot \sigma(\pi_2) \tag{6}$$

для всех $\pi_1, \pi_2 \in \Lambda$. Построим отображение $\nu : C(P,\Lambda) \to C(P \times Q)$ по формуле $\nu(\varphi)(p,q) := \sigma(\varphi(p))(q)$ для всех $(p,q) \in P \times Q$. Тогда ν является инъективным решеточным гомоморфизмом, и ввиду формулы (6) выполняется равенство

$$\nu(\pi\varphi)(p,q) = \sigma(\pi)(q) \cdot \nu(\varphi)(p,q) \tag{7}$$

для всех $\pi \in \Lambda$, $\varphi \in C(P,\Lambda)$ и $(p,q) \in P \times Q$. Так как $\nu(e)$ есть тождественная единица на $P \times Q$, то e-равномерная плотность F_N в $C(P,\Lambda)$ следует из плотности по норме $\nu(F_N)$ в $C(P \times Q)$. Покажем, что $\nu(F_N)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Стоуна — Вейерштрасса (см., например, [10, теорема 2.1.1]). Так как $e = |dt_1| + \ldots + |dt_N| \in F_N$ и $\nu(e) = \mathbf{1}_{P\times Q}$ следует $\nu(F_N)$ содержит константы. Пусть $(p,q_1), (t,q_2) \in P \times Q$. Если $p \neq t$, то $p_j \neq t_j$ для некоторого $j \in \{1,\dots,N\}$. Тогда ввиду $\sigma(I) = \mathbf{1}_Q$ выполняются равенства $\nu(dt_j)(t,q_1) = \sigma(t_j I)(q_1) = t_j \neq p_j = \nu(dt_j)(p,q_2)$. Если $q_1 \neq q_2$, то ввиду плотности $\sigma(\Lambda)$ в $C(Q)$ найдется элемент $\pi \in \Lambda$ такой, что $\sigma(\pi)(q_1) \neq \sigma(\pi)(q_2)$. Тогда в силу (7) будут справедливы соотношения $\nu(\pi e)(t,q_1) = \sigma(\pi)(q_1) \cdot 1 \neq \sigma(\pi)(q_2) = \nu(\pi e)(t,q_2)$. Мы получили, что $\nu(F_N)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Стоуна — Вейерштрасса, поэтому $\nu(F_N)$ плотна по норме в $C(P \times Q)$, что влечет e-равномерную плотность F_N в $C(P,\Lambda)$. Таким образом, $\mathscr{F}(\cdot,\mathfrak{x}) = \mathscr{H}(C,K,\Lambda)$. Равномерная плотность F_N в $C(P,\Lambda)$ также влечет $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C,K,\Lambda)) \subset \overline{\Lambda\langle x_1,\dots,x_N\rangle}$.

Покажем единственность гомоморфизма $\widehat{\mathfrak{x}}$. Пусть $T : \mathscr{H}(C,K,\Lambda) \to E$ — Λ-модульный решеточный гомоморфизм и $T(dt_i) = x_i$ для всех $i = 1,2,\dots,N$. Тогда множество $G := \{\varphi \in F_N : \widehat{\mathfrak{x}}(\varphi) = T(\varphi)\}$ является Λ-модульной подрешеткой в F_N, содержащей dt_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$. Следовательно, $F_N = G$ и в силу плотности F_N в $\mathscr{H}(C,K,\Lambda)$ получим $T = \widehat{\mathfrak{x}}$.

Покажем справедливость равенства $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C,K,\Lambda)) = \overline{\Lambda\langle x_1,\dots,x_N\rangle}$ при условии, что Λ замкнута по норме в $\mathscr{Z}(E)$. Включение $\subset$ установлена выше. Так как образ $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C,K,\Lambda))$ содержит $x_1\dots,x_N$, является модулем над Λ и равномерно полон (см. [9, теорема 59.3]), то $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C,K,\Lambda)) \supset \overline{\Lambda\langle x_1,\dots,x_N\rangle}$. Таким образом, мы доказали теорему для $C = \Lambda[\mathfrak{x}]\cup\{0\}$.

Возьмем теперь произвольное коническое множество $C\subset\mathbb{R}^N$, содержащее K. Обозначим через $C_1 := \Lambda[\mathfrak{x}]\cup\{0\}$. Оператор сужения $\rho:\varphi\mapsto\varphi|_{C_1}$ осуществляет Λ-модульный решеточный гомоморфизм из $\mathscr{H}(C,K,\Lambda)$ в $\mathscr{H}(C_1,\Lambda[\mathfrak{x}],\Lambda)$. Поэтому, $\widehat{\mathfrak{x}}\circ\rho$ — требуемый Λ-модульный гомоморфизм. $\rhd$

Предложение 3.1. *Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки, $\iota:\Lambda\to\Lambda'$ — изоморфизм f-алгебр $\Lambda\subset\mathscr{Z}(E)$ и $\Lambda'\subset\mathscr{Z}(F)$, $h:E\to F$ — Λ-модульный решеточный гомоморфизм. Предположим, что $x_1,\dots,x_N\in E$, $\Lambda[x_1,\dots,x_N]\subset K$ и $\varphi\in\mathscr{H}(C,K,\Lambda)$. Тогда $\Lambda'[h(x_1),\dots,h(x_N)]\subset\Lambda[x_1,\dots,x_N]$ и справедливо равенство*

$$h(\varphi(\cdot,{}_1,\dots,x_N)) = \iota\circ\varphi(\cdot,h(x_1),\dots,h(x_N)). \tag{8}$$

$\lhd$ Положим $y_i := h(x_i)$ $(i=1,\dots,N)$, $u := |x_1|+\ldots+|x_N|$. Возьмем $0\neq\omega\in\mathrm{Hom}(\Lambda'\langle y_1,\dots,y_N\rangle)$. Тогда $\bar\omega := \omega\circ h\in\mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1,\dots,x_N\rangle)$ и поэтому $\Lambda'[h(x_1),\dots,h(x_N)]\subset\Lambda[x_1,\dots,x_N]$. Отсюда видно, что $\iota\circ\varphi\in\mathscr{H}(C,K,\Lambda')$.

Предположим, что $h(u)=0$. Тогда в силу теоремы 3.1 $\varphi(\cdot,x_1,\dots,x_N)$ принадлежит главному идеалу E_u в E, порожденному элементом u. Следовательно, $h(\varphi(\cdot,x_1,\dots,x_N))=0$. С другой стороны, $hx_i=0$ для всех $i=1,\dots,N$, поэтому $\iota\circ\varphi(\cdot,h(x_1),\dots,h(x_N))=0$.

Пусть $h(u)\neq0$. Из леммы 2.1 известно, что $\widetilde\omega\in\mathrm{H_m}(\Lambda')$ и $\widetilde{\bar\omega}=\widetilde{\omega\circ h}\in\mathrm{H_m}(\Lambda)$. Покажем, что $\widetilde\omega(\iota\pi)=\widetilde{\bar\omega}(\pi)$ для всех $\pi\in\Lambda$. Действительно, пусть $\pi\in\Lambda$. Тогда по лемме 2.1 $\omega(\iota\pi(hu))=\widetilde\omega(\iota\pi)\omega(hu)=\widetilde\omega(\iota\pi)\bar\omega(u)$. С другой стороны, в силу Λ-модульности h следует $\omega(\iota\pi(hu))=\omega(h(\pi u))=\bar\omega(\pi u)=\widetilde{\bar\omega}(\pi)\bar\omega(u)$. Отсюда, так как $\bar\omega(u)\neq0$, выводим

$$\widetilde\omega(\iota\pi)=\widetilde{\bar\omega}(\pi)\quad(\pi\in\Lambda). \tag{9}$$

Положим $x:=\varphi(\cdot,x_1,\dots,x_N)$, $y:=\iota\circ\varphi(\cdot,y_1,\dots,y_N)$, и пусть $\omega\in\mathrm{Hom}(\Lambda'\langle y,y_1,\dots,y_N\rangle)$. Тогда $\bar\omega:=\omega\circ h\in\mathrm{Hom}(\Lambda\langle x,x_1,\dots,x_N\rangle)$, и ввиду (9) выполняются равенства $\omega(y)=\widetilde\omega(\iota\circ\varphi(\omega(y_1),\dots,\omega(y_N)))=\widetilde{\bar\omega}(\varphi(\bar\omega(x_1),\dots,\bar\omega(x_N)))=\bar\omega(x)=\omega(hx)$. Следовательно, так как $\mathrm{Hom}(\Lambda'\langle y,y_1,\dots,y_N\rangle)$ различает точки, $y=h(x)$. $\rhd$

Замечание 3.1. В условиях предложения 3.1 при отождествлении Λ с Λ' формула (8) примет вид $h(\varphi(\cdot,x_1,\dots,x_N))=\varphi(\cdot,h(x_1),\dots,h(x_N))$.

4. Метод огибающих

В этом параграфе покажем, что обобщенное функциональное исчисление позволяет перенести двойственность Минковского на Λ-модульные решетки.

Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1,\dots,x_N\in E$, Λ — f-подалгебра в $\mathscr{Z}(E)$, K — замкнутый конус в $\mathbb{R}^N$, содержащий $\Lambda[x_1,\dots,x_N]$. Обозначим через $\mathscr{H}_\vee(K,\Lambda)$ ($\mathscr{H}_\wedge(K,\Lambda)$) множество всех сублинейных (суперлинейных) непрерывных операторов из K в Λ, $L(\mathbb{R}^N,\Lambda)$ — пространство линейных операторов из $\mathbb{R}^N$ в Λ. Пусть $\langle\pi,\cdot\rangle$ обозначает линейный оператор $t\mapsto\langle\pi,t\rangle=\sum_{i=1}^N t_i\pi_i$ из $\mathbb{R}^N$ в Λ, где $t=(t_1,\dots,t_N)\in\mathbb{R}^N$, $\pi=(\pi_1\dots,\pi_N)\in\Lambda^N$. Ясно, что отображение $\pi\mapsto\langle\pi,\cdot\rangle$ осуществляет решеточный изоморфизм из Λ^N на $L(\mathbb{R}^N,\Lambda)$.

Для сублинейного оператора $\varphi : K \to \Lambda \cup \{+\infty\}$ (суперлинейного оператора $\psi : K \to \Lambda \cup \{-\infty\}$) положим по определению

$$\begin{aligned} \underline{\partial}\varphi &:= \big\{\pi \in \Lambda^N : \langle \pi, t\rangle \leqslant \varphi(t)\ (t \in K)\big\}, \\ \overline{\partial}\psi &:= \big\{\pi \in \Lambda^N : \langle \pi, t\rangle \geqslant \varphi(t)\ (t \in K)\big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Следующая лемма используется в доказательстве основного результата параграфа. Заметим, что если Q — компакт и $\Lambda \subset \mathscr{Z}(C(Q))$, то в силу [3, теорема 2.62] $\Lambda \subset C(Q)$.

Лемма 4.1. *Пусть Q — произвольный компакт, $x_1, \dots, x_N \in C(Q)$, $\Lambda \subset C(Q)$, $\Lambda[x_1, \dots, x_N] \subset K$ и $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$. Тогда $\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N) \in C(Q)$ и справедливо равенство $\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N)(q) = \varphi(x_1(q), \dots, x_N(q))(q)$ для всех $q \in Q$.*

$\lhd$ Пусть E_u обозначает порядковый идеал в $C(Q)$, порожденный элементом $u := |x_1| + \ldots + |x_N|$. Тогда E_u равномерно замкнут в $C(Q)$ относительно u и является модулем над Λ (см. [3, теорема 2.62]). Поэтому из теоремы 3.1 получим $\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N) \in E_u$.

Всякий элемент $q \in Q$ отождествляется с решеточным гомоморфизмом $\omega_q \in \mathrm{Hom}(E_u)$ по формуле $\omega_q(x) := x(q)$ $(x \in E_u)$. Пусть $q \in Q$ и $u(q) \neq 0$. Тогда из леммы 2.1 выводим $\pi(q)u(q) = \omega_q(\pi u) = \widetilde{\omega_q}(\pi)u(q)$ для всех $\pi \in \Lambda$. Сократив на $u(q)$, получим $\pi(q) = \widetilde{\omega_q}(\pi)$ $(\pi \in \Lambda)$. Отсюда из определения $\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N)$ следует $\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N)(q) = \omega_q(\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N)) = \widetilde{\omega_q}(\varphi(\omega_q(x_1), \dots, \omega_q(x_N)) = \varphi(x_1(q), \dots, x_N(q))(q)$.

Пусть теперь $u(q) = 0$. Тогда $x(q) = 0$ для всех $x \in E_u$. В частности, $\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N)(q) = 0$. С другой стороны, ввиду положительной однородности φ следует $0 = \varphi(x_1(q), \dots, x_N(q))(q)$. Таким образом, $\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N)(q) = \varphi(x_1(q), \dots, x_N(q))(q)$ для всех $q \in Q$. $\rhd$

Теорема 4.1. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \dots, x_N \in E$, $\varphi \in \mathscr{H}_\vee(K, \Lambda)$ и $\psi \in \mathscr{H}_\wedge(K, \Lambda)$. Тогда справедливы равенства*

$$\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i :\ (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi\right\},$$

$$\psi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i :\ (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}\psi\right\}.$$

Более того, $\varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N)$ $(\psi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N))$ есть равномерный предел возрастающей (убывающей) сети, каждый член которой есть супремум (инфимум) конечного набора элементов вида $\sum_{i=1}^N \pi_i x_i$, где $(\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi$ $((\pi_1 \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}\psi)$.

$\lhd$ Напомним, что оператор $dt_i \in L(\mathbb{R}^N, \Lambda) \subset \mathscr{H}(K, \Lambda)$ действует по формуле $dt_i(t) := t_i I$, где $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$, I — тождественный оператор на E, $i = 1, \dots, N$. Распространим оператор φ на все пространство $\mathbb{R}^N$, полагая $\varphi(t) := +\infty$ для всех $t \in \mathbb{R}^N \setminus K$. Обозначим через $y = \varphi(\cdot,\, x_1, \dots, x_N)$, и пусть $v \in E$ такой, что $v \geqslant \sum_{i=1}^N \pi_i x_i$ для всех $(\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi$. По теореме Крейнов — Какутани существует компакт Q и решеточный изоморфизм $x \mapsto \widetilde{x}$ из главного идеала E_u, порожденного элементом $u = |x_1| + \ldots + |x_N| + |v|$, на $C(Q)$. При этом u переходит в тождественную единицу. Таким образом, можно считать, что $E_u = C(Q)$, Λ — f-подалгебра в $C(Q)$ и $\varphi : \mathbb{R}^N \to C(Q) \cup \{+\infty\}$. Ввиду леммы 4.1 для всех $q \in Q$ выполняются равенства

$$\widetilde{y}(q) = \varphi(\widetilde{x_1}(q), \dots, \widetilde{x_N}(q))(q), \quad \widetilde{v}(q) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \widetilde{\pi}_i(q)\widetilde{x}_i(q). \tag{11}$$

Так как конус K замнут, то в силу [2, гл. 1, п. 8] справедлива формула

$$(\varphi(t))(q) = \sup\big\{(At)(q) : A \in \partial\varphi\big\}, \tag{12}$$

где $t \in \mathbb{R}^N$, $q \in Q$, $\partial\varphi$ — множество линейных операторов из $\mathbb{R}^N$ в $C(Q)$, опорных к оператору φ. Так как всякий линейный оператор $A \in \partial\varphi$ однозначно определяется набором $\pi_1, \dots, \pi_N \in C(Q)$ по формуле $At = \sum_{i=1}^N t_i\pi_i$, где $t = (t_1 \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$, то ввиду формул (11) и (12) для всех $q \in Q$ справедливы соотношения $\widetilde{y}(q) = \varphi(\widetilde{x_1}(q), \dots, \widetilde{x_N}(q))(q) = \sup\big\{\sum_{i=1}^N \widetilde{x}_i(q)\widetilde{\pi}_i(q) : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi\big\} \leqslant \widetilde{v}(q)$. Таким образом, $y \leqslant v$. С другой стороны, так как для каждого набора $(\pi_1, \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi$ выполняются соотношения $\big(\sum_{i=1}^N \pi_i dt_i\big)(t) = \sum_{i=1}^N t_i\pi_i \leqslant \varphi(t)$ $(t \in K)$, то в силу теоремы 3.1 $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \geqslant \sup\big\{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi\big\}$. Следовательно, $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) = \sup\big\{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi\big\}$.

Пусть $U := \big\{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi\big\}$. Символом $U^\vee$ обозначим множество в E, состоящее из супремумов конечных подмножеств множества U. Тогда $U^\vee \subset E_u$, сеть $\widetilde{U^\vee} := \{\widetilde{v} : v \in U^\vee\}$ направлена вверх в $C(Q)$ и ее поточечный супремум равен $\widetilde{y}$. По теореме Дини $\widetilde{U^\vee}$ сходится равномерно к $\widetilde{y}$. Следовательно, $U^\vee$ также сходится равномерно к y в E.

Заметим, что если $\psi \in \mathscr{H}_\wedge(K, \Lambda)$, то $-\psi \in \mathscr{H}_\vee(K, \Lambda)$ и $\overline{\partial}\psi = \underline{\partial}(-\psi)$. Отсюда вытекает справедливость формулы для ψ. $\rhd$

5. Неравенства выпуклости

Согласно теореме 4.1 непрерывные сублинейные и суперлинейные операторы из $K \subset \mathbb{R}^N$ в Λ являются соответственно верхними и нижними огибающими линейных операторов. Мы будем пользоваться этим фактом в доказательстве неравенств типа Йенсена, Гёльдера и Минковского в равномерно полных векторных решетках.

В этом параграфе E — равномерно полная векторная решетка, Λ — f-подалгебра в идеальном центре $\mathscr{Z}(E)$, C, K — конусы в $\mathbb{R}^N$ и K замкнут. Предположим, что $\mathbb{R}^N$ упорядочено конусом C, т. е. $s \geqslant t$ означает $s - t \in C$. Оператор $\phi : K \to \Lambda \cup \{\pm\infty\}$ называется *возрастающим*, если из неравенства $s \geqslant t$ следует $\phi(s) \geqslant \phi(t)$ для всех $s, t \in K$. Обозначим через C^* множество всех линейных положительных операторов из $\mathbb{R}^N$ в Λ, т. е. $T \in C^*$, если $T \in L(\mathbb{R}^N \Lambda)$ и $T(s) \geqslant 0$ для всех $s \in C$.

Лемма 5.1. *Если сублинейный (суперлинейный) оператор $\phi : \mathbb{R}^N \to \Lambda \cup \{+\infty\}$ возрастает, то $\underline{\partial}\phi \subset C^*$ ($\overline{\partial}\phi \subset C^*$).*

$\lhd$ Пусть сублинейный оператор ϕ возрастает, $\pi \in \underline{\partial}\phi$ и $t \in C$. Тогда $\langle\pi, -t\rangle \leqslant \phi(-t) \leqslant \phi(0) = 0$, т. е. $\pi \in C^*$. Пусть теперь суперлинейный оператор $\phi : \mathbb{R}^N \to \Lambda \cup \{-\infty\}$ возрастает, $\pi \in \overline{\partial}\phi$ и $t \in C$. Тогда $\langle\pi, t\rangle \geqslant \phi(t) \geqslant \phi(0) = 0$. Следовательно, $\pi \in C^*$. $\rhd$

Лемма 5.2. *Пусть $\varphi \in \mathscr{H}_\vee(K, \Lambda)$, $\psi \in \mathscr{H}_\wedge(K, \Lambda)$ и выполнено условие $K - C = C - K$. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *φ возрастает тогда и только тогда, когда $\varphi(s) = \sup\{\langle\pi, s\rangle : \pi \in \underline{\partial}\varphi \cap C^*\}$ $(s \in K)$;*

(2) *ψ возрастает тогда и только тогда, когда $\psi(s) = \inf\{\langle\pi, s\rangle : \pi \in \overline{\partial}\psi \cap C^*\}$ $(s \in K)$.*

$\lhd$ Достаточность в обоих утверждениях очевидна. Покажем необходимость утверждения (1). Пусть $\iota : \Lambda \to \widehat{\Lambda}$ обозначает вложение векторной решетки Λ в свое порядковое пополнение $\widehat{\Lambda}$. Так как Λ является мажорирующей порядково плотной подрешеткой в $\widehat{\Lambda}$, то ιI — сильная порядковая единица в $\widehat{\Lambda}$. Поэтому можно считать, что $\widehat{\Lambda} = C(Q)$, где Q — экстремальный компакт. Обозначим через $\widehat{\varphi} := \iota \circ \varphi$. Тогда $\widehat{\varphi}$ —

непрерывный сублинейный возрастающий оператор из K в порядково полную решетку $C(Q)$. Пусть P обозначает проектор на подпространство $K - C$. Тогда P — положительный оператор, так как $P(s) = s$ для любого $s \in C$. Положим по определению $\widehat{\varphi}^*(s) := \inf\{\widehat{\varphi}(t) : t \in K,\ t \geqslant P(s)\}$ $(s \in \mathbb{R}^N)$. Тогда $\widehat{\varphi}^*$ — сублинейный возрастающий оператор из $\mathbb{R}^N$ в $C(Q)$, и выполняются равенства

$$\widehat{\varphi}^*(s) = \widehat{\varphi}(s) = \varphi(s) \quad (s \in K). \tag{13}$$

Отсюда, ввиду леммы 5.1 вытекает справедливость соотношения $\underline{\partial}\widehat{\varphi}^* = \underline{\partial}\widehat{\varphi} \cap \iota(C^*)$, где $\iota(C^*)$ — множество положительных линейных операторов из $\mathbb{R}^N$ в $C(Q)$. Следовательно, в силу [2, гл. 1, п. 8] и формулы (13), получим

$$\varphi(s) = \sup\left\{\langle\widehat{\pi}, s\rangle : \widehat{\pi} \in \underline{\partial}\widehat{\varphi} \cap \iota(C^*)\right\} \quad (s \in K), \tag{14}$$

где $\widehat{\pi} = (\widehat{\pi}_1, \dots, \widehat{\pi}_N)$, $0 \leqslant \widehat{\pi}_1, \dots, \widehat{\pi}_N \in C(Q)$, $s = (s_1, \dots, s_N)$, $\langle\widehat{\pi}, s\rangle = \sum_{i=1}^N s_i\widehat{\pi}_i$. Пусть $s = (s_1, \dots, s_N) \in K$ и $\widehat{\pi} \in \underline{\partial}\widehat{\varphi} \cap \iota(C^*)$. Существует сеть $(\pi_\alpha) = (\pi_{\alpha,1}, \dots, \pi_{\alpha,N})$ из Λ^N такая, что $\pi_\alpha \uparrow \widehat{\pi}$ и выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\langle\widehat{\pi}, s\rangle &= \sum_{i=1}^N s_i\widehat{\pi}_i = \sum_{i=1}^N s_i \sup_\alpha \pi_{\alpha,i} = \sum_{i=1}^N s_i \lim_\alpha \pi_{\alpha,i} \\ &= \lim_\alpha \sum_{i=1}^N s_i\pi_{\alpha,i} \leqslant \sup\left\{\langle\pi, s\rangle : \pi \in \underline{\partial}\varphi \cap C^*\right\}.\end{aligned}$$

Отсюда, ввиду формул (13) и (14) следует $\varphi(s) \leqslant \sup\{\langle\pi, s\rangle : \pi \in \underline{\partial}\varphi \cap C^*\}$. Противоположное неравенство очевидно. Таким образом, $\varphi(s) = \sup\{\langle\pi, s\rangle : \pi \in \underline{\partial}\varphi \cap C^*\}$. Утверждение (2) доказывается аналогично. $\rhd$

Следствие 5.3. *Пусть $\varphi \in \mathscr{H}_\vee(K, \Lambda)$ и $\psi \in \mathscr{H}_\wedge(K, \Lambda)$ возрастают, $K - C = C - K$. Тогда справедливы соотношения*

$$\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) = \sup\left\{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i : \ (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi \cap C^*\right\},$$

$$\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N) = \inf\left\{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i : \ (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}\psi \cap C^*\right\}.$$

$\lhd$ Следует из леммы 5.2 и теоремы 4.1. $\rhd$

Обозначим через $\mathscr{H}_\curlyvee(K, \Lambda)$ ($\mathscr{H}_\curlywedge(K, \Lambda)$) множество всех непрерывных возрастающих относительно $\mathbb{R}^N_+$ сублинейных (суперлинейных) операторов из K в Λ, и $K - \mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^N_+ - K$. Как обычно, положительные операторы будем обозначать символом $L(\mathbb{R}^N, \Lambda)_+$.

Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки, и $\mathscr{Z}(E)$, $\mathscr{Z}(F)$ — идеальные центры E и F соответственно, Λ, Λ' — изоморфные f-подалгебры в $\mathscr{Z}(E)$ и $\mathscr{Z}(F)$ соответственно. Оператор $f : E \to F \cup \{\pm\infty\}$ называется *возрастающим*, если $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ для всех x_1, $x_2 \in E$, $x_2 \geqslant x_1$. Скажем, что сублинейный (суперлинейный) оператор $f : E \to F \cup \{\pm\infty\}$ Λ-*сублинейный* (Λ-*суперлинейный*), если $f(\pi x) = \pi(fx)$ для всех $0 \leqslant \pi \in \Lambda$ и $x \in E$.

Теорема 5.4 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки, $f : E \to F \cup \{+\infty\}$ — возрастающий Λ-сублинейный оператор,*

$g : E \to F \cup \{-\infty\}$ — *возрастающий* Λ*-суперлинейный оператор. Предположим, что* $\varphi \in \mathscr{H}_{\curlyvee}(K, \Lambda)$, $\psi \in \mathscr{H}_{\curlywedge}(K, \Lambda)$, $\Lambda[x_1 \dots, x_N] \subset K$, $\Lambda[f(x_1) \dots, f(x_N)] \subset K$ *и* $\Lambda[g(x_1) \dots, g(x_N)] \subset K$. *Если* $x_1, \dots x_N \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, *то* $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in \mathrm{dom}(g)$, $\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in \mathrm{dom}(f)$ *и выполняются неравенства*

$$f(\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \leqslant \psi(\cdot, f(x_1), \dots, f(x_N)),$$

$$g(\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \geqslant \varphi(\cdot, g(x_1), \dots, g(x_N)).$$

$\lhd$ Возьмем произвольный $\pi \in \overline{\partial}\psi \cap L(\mathbb{R}^N, \Lambda)_+$. Ввиду следствия 5.3 выполняется неравенство $\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \leqslant \sum_{i=1}^N \pi_i x_i$. Так как f Λ-сублинейный возрастающий оператор, то $\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in \mathrm{dom}(f)$ и справедливы соотношения

$$f(\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \leqslant \inf\left\{ f\left(\sum_{i=1}^N \pi_i x_i\right) : \ (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}\varphi \cap L\big(\mathbb{R}^N, \Lambda\big)_+ \right\}$$

$$\leqslant \inf\left\{ \sum_{i=1}^N \pi_i f(x_i) : \ (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}\varphi \cap L(\mathbb{R}^N, \Lambda)_+ \right\} = \psi(\cdot, f(x_1), \dots, f(x_N)).$$

Утверждение для оператора g доказывается аналогично. $\rhd$

Возьмем $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N_+$ и конечный набор положительных элементов $\pi_1 \dots, \pi_N \in \Lambda$. Отождествим Λ с пространством непрерывных функций $C(Q)$ на некотором компакте Q и определим функцию $\prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i} \in C(Q)$ по формуле

$$\left(\prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i}\right)(q) := \prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i(q)} \quad (q \in Q).$$

Функцию $\prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i}$ мы будем отождествлять с соответствующим положительным элементом из Λ_+. Тогда для каждого фиксированного набора $(\pi_1 \dots, \pi_N) \in \Lambda^N_+$ мы можем определить оператор $\psi \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^N_+, \Lambda)$ по формуле $\psi(t) := \prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i}$ $(t \in \mathbb{R}^N_+)$.

Теорема 5.5 (Неравенство Гёльдера). *Пусть* E, F — *равномерно полные векторные решетки,* $f : E \to F \cup \{+\infty\}$ — *возрастающий* Λ*-сублинейный оператор и* $\mathrm{dom}(f) = E_+$. *Тогда для любых* $x_1, \dots, x_N \in E$ *и* $0 \leqslant \pi_1, \dots, \pi_N \in \Lambda$, $\pi_1 + \ldots + \pi_N = I$ *выполняется неравенство*

$$f\left(\prod_{i=1}^N |x_i|^{\pi_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^N f(|x_i|)^{\pi_i}.$$

$\lhd$ Если $0 \leqslant \pi_1, \dots, \pi_N \in \Lambda$, $\pi_1 + \ldots + \pi_N = I$, то $\psi(t) := \prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i}$ — непрерывный положительный суперлинейный оператор из $\mathbb{R}^N_+$ в Λ_+, следовательно, он возрастает на $\mathbb{R}^N_+$. Таким образом, $\psi \in \mathscr{H}_{\curlywedge}(\mathbb{R}^N_+, \Lambda)$, и остается применить теорему 5.4. $\rhd$

Возьмем $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N_+$ и элемент $\pi \in \Lambda$. Предположим, что существует такое число $\delta > 0$, что $\delta I \leqslant \pi$. Отождествим Λ с подпространством в $C(Q)$ и определим функцию $(\Sigma_{i=1}^N |t_i|^{\pi})^{1/\pi} \in C(Q)$ по формуле

$$\left(\sum_{i=1}^N |t_i|^{\pi}\right)^{1/\pi}(q) := \left(\sum_{i=1}^N |t_i|^{\pi(q)}\right)^{1/\pi(q)} \quad (q \in Q).$$

Функцию $(\Sigma_{i=1}^N |t_i|^\pi)^{1/\pi}$ мы будем отождествлять с соответствующим положительным элементом из Λ_+. Тогда мы можем определить оператор $\psi : \mathbb{R}_+^N \to \Lambda_+$ по формуле $\psi(t) := (\Sigma_{i=1}^N |t_i|^\pi)^{1/\pi}$ $(t \in \mathbb{R}_+^N)$.

Теорема 5.6 (Неравенство Минковского). *Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки, $f : E \to F \cup \{+\infty\}$ — возрастающий Λ-сублинейный оператор и* $\mathrm{dom}(f) = E_+$. *Предположим, что существуют числа $0 < \delta \leqslant 1$ и $\pi \in \Lambda$ такие, что $\delta I \leqslant \pi \leqslant I$. Тогда для любых $x_1, \dots, x_N \in E$ выполняется неравенство*

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^N |x_i|^\pi\right)^{1/\pi}\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^N f(|x_i|)^\pi\right)^{1/\pi}.$$

Обратное неравенство имеет место, если $f : E \to F \cup \{-\infty\}$ — Λ-суперлинейный оператор, $\mathrm{dom}(f) = E_+$ *и* $\pi \geqslant I$.

$\lhd$ Оператор $\psi(t) := (t_1^\pi + \ldots + t_N^\pi)^{1/\pi}$ из $\mathbb{R}_+^N$ в Λ супералинеен, если $\delta I \leqslant \pi \leqslant I$, и сублинеен при $\pi \geqslant I$. Таким образом, из теоремы 5.4 следуют требуемые неравенства. $\rhd$

Литература

1. Кусраев А. Г., Табуев С. Н. О мультипликативном представлении билинейных операторов // Сиб. мат. журн.—2008.—Т. 49, № 2.—С. 357–366.
2. Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.—250 с.
3. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—N. Y.: Academic Press, 1985.—xvi+367 p.
4. Buskes G., de Pagter. B., van Rooij. A. Functional calculus on Riesz spaces // Indag. Math. (N. S.).—1991.—Vol. 4, № 2.—P. 423–436.
5. Fremlin D. H. Tensor products of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math.—1972.—Vol. 94.—P. 778–798.
6. Haydon R., Levy M., Raynaud Y. Randomly Normed Spaces.—Paris: Hermann, 1991.—138 p.
7. Kusraev A. G. Homogeneous Functional Calculus on Vector Lattices.—Vladikavkaz, 2008.—34 p.—(Preprint № 1).
8. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—243 p.
9. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam, London: North-Holland, 1971.—514 p.
10. Meyer-Nieberg P. Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—xvi+395 p.

Статья поступила 15 июля 2013 г.

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший научный сотрудник отдела функцион. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
аспирант математического факультета
РОССИЯ , 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46

E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

GENERALIZED FUNCTIONAL CALCULUS ON VECTOR LATTICES

Tasoev B. B.

Generalized functional calculus on vector lattices is constructed. An interplay between Minkowski duality and generalized functional calculus is investigated and some convexity inequalities are proved.

Key words: vector lattices, generalized functional calculus, Minkowski duality, convexity inequalities.