Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 4, С. 76–81

УДК **512.54**

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С НЕЗАВИСИМЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. А. Цирхов

Дано полное описание конечных групп с независимыми абелевыми подгруппами.

Ключевые слова: группа, нильпотентная подгруппа, независимая подгруппа.

Подгруппа H группы G называется (нормально) независимой (в G) подгруппой, если $N_G(U) \leqslant N_G(H)$ для любой нетривиальной (нормальной) подгруппы U из H.

В [1] доказано, что в конечной группе G все неабелевы подгруппы независимы тогда и только тогда, когда G метагамильтонова, т. е. в ней все неабелевы подгруппы нормальны.

Ранее Л. И. Шидов [2] описал конечные группы, в которых нормально независимы все нильпотентные подгруппы. Обобщая этот результат, А. Х. Журтов и Цирхов А. А. в [3] показали, что конечная группа, в которой независима любая абелева подгруппа, является либо двустепенно нильпотентной группой, либо группой Фробениуса с нильпотентным дополнительным множителем, либо группой, изоморфной одной из следующих групп: S_4, A_6, $L_2(7)$, $L_2(2^m)$, $m \geqslant 2$.

Следующий результат дает полное описание нильпотентных конечных групп, в которых независимы все абелевы подгруппы.

Теорема 1. *В конечной нильпотентной группе G все абелевы подгруппы независимы тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

(1) *G — абелева или гамильтонова группа, т. е. группа, в которой все подгруппы нормальны;*

(2) *G — p-группа нечетного порядка, являющаяся центральным произведением экстраспециальной группы порядка p^3 на циклическую группу;*

(3) *G изоморфна*

$$\left\langle a, b :\ a^p = b^{p^m} = 1,\ a^{-1}ba = b^{1+p^{m-1}} \right\rangle$$

для некоторого $m \geqslant 2$. Здесь p — простое число;

(4) *G — центральное произведение группы диэдра порядка 8 на циклическую 2-группу или группу кватернионов порядка 8.*

Следующий результат завершает описание всех конечных групп с независимыми абелевыми подгруппами.

Скажем, что циклическая группа $\langle h \rangle$ действует скалярно на абелевой группе K, если найдется такое целое число α, что $k^h = k^\alpha$ для любого $k \in K$.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа Фробениуса с ядром K и дополнением H. В G тогда и только тогда все абелевы подгруппы независимы, когда выполнено одно из следующих условий:*

(1) $H = \langle h \rangle$, K — экстраспециальная группа периода p, т. е.

$$K = \Big\langle a, b : \, a^p = b^p = [[a,b], a] = [[a,b], b] = 1 \Big\rangle,$$

где p — нечетное простое число, и существует целое число α такое, что $a^h = a^\alpha$, $b^h = b^\alpha$;

(2) K — абелева группа, а H — циклическая подгруппа, действующая скалярно на K;

(3) $K = \langle k_1 \rangle \times \langle k_2 \rangle$ — элементарная абелева группа $H = \langle h \rangle$, $k_1^h = k_1^{\alpha_1}$, $k_2^h = k_2^{\alpha_2}$ для некоторых целых α_1, α_2;

(4) H — циклическая группа, K — нециклическая элементарная абелева группа, H действует неприводимо на K при сопряжении, а любая собственная подгруппа из H действует на K либо неприводимо, либо скалярно;

(5) K — элементарная абелева группа порядка p^2 для некоторого нечетного простого числа p, $H = Q \times H_0$, где Q — группа кватернионов порядка 8, H_0 — циклическая группа, действующая скалярно на K.

1. Предварительные сведения

На протяжении всей работы рассматриваются только конечные группы. Если G — группа, то $Z(G)$, G', $\Phi(G)$ и $F(G)$ обозначают соответственно ее центр, коммутант, подгруппу Фраттини (пересечение всех максимальных подгрупп) и подгруппу Фиттинга (наибольшую нильпотентную нормальную подгруппу). Если x и y — элементы, а H и K — подмножества группы, то $\langle H \rangle$ — подгруппа, порожденная H,

$$[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y = x^{-1} x^y, \quad [H, K] = \Big\langle [h, k] : \, h \in H, \, k \in K \Big\rangle.$$

Гамильтоновой группой называется неабелева группа, все подгруппы которой нормальны.

Группой Фробениуса называется полупрямое произведение $F = K \cdot C$, где $1 \neq K \trianglelefteq F$, $C \neq 1$, $C_K(c) \leqslant C$ для любого нетривиального элемента $c \in C$; K называется *ядром*, а C — *дополнением группы Фробениуса* F.

Лемма 1.1 [4, теорема 12.5.4]**.** *Если G — гамильтонова группа, то $G = Q \times V \times R$, где Q изоморфна группе кватернионов Q_8, V — элементарная абелева 2-группа и R — абелева группа нечетного порядка.*

Лемма 1.2 [5, теоремы V8.7, V8.18]**.** *Пусть F — группа Фробениуса с ядром K и дополнением C. Тогда $(|K|, |C|) = 1$, K — нильпотентная группа, все силовские p-подгруппы H при $p > 2$ циклические, а при $p = 2$ циклические или (обобщенные) группы кватернионов. Если t — элемент порядка 2 из C, то $k^t = k^{-1}$ для любого $k \in K$.*

Следующая лемма является частным случаем теоремы I.17.4 из [5].

Лемма 1.3. *Пусть $F = K \cdot C$ — полупрямое произведение K на C, где $(|K|, |C|) = 1$. Если $K = K_1 \times K_2$, где K_1 инвариантна относительно C, то $K = K_1 \times K_0$, где K_0 — также C-инвариантна.*

В дальнейшем, для краткости, группу, в которой абелевы подгруппы независимы, будем называть AI-группой, а соответствующее свойство группы — свойством AI. Очевидно, свойство AI наследуется подгруппами. Пару (X, Y) подгрупп группы G будем называть запрещенной, если Y — абелева, $1 \neq X \leqslant Y$ и $N_G(X) \nleqslant / N_G(Y)$.

Понятно, что в AI-группе нет запрещенных пар подгрупп.

Лемма 1.4 [3]**.** *Для конечной неабелевой AI-группы G справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *G — двустепенно нильпотентная группа с коммутантом простого порядка;*

(2) *G — группа Фробениуса с нильпотентным дополнением;*

(3) *G изоморфна S_4, A_6, $L_2(7)$ или $L_2(2^m)$ для некоторого натурального числа $m \geqslant 2$.*

Лемма 1.5. *Циклическая группа $\langle h\rangle$ действует скалярно на абелевой группе K тогда и только тогда, когда любая подгруппа из K является $\langle h\rangle$-инвариантной.*

$\lhd$ Пусть любая подгруппа из K является $\langle h\rangle$-инвариантной.

Так как K коммутативна, то K — прямое произведение циклических подгрупп. Пусть $k_1,\dots,k_m$ — порождающие этих подгрупп.

Так как циклические подгруппы $\langle k_1\rangle,\dots,\langle k_m\rangle$, $\langle k_1\cdot\ldots\cdot k_m\rangle$ инвариантны относительно $\langle h\rangle$, найдутся целые числа $\alpha_1,\dots,\alpha_m,\beta$ такие, что $k_1^h = k_1^{\alpha_1},\dots,k_m^h = k_m^{\alpha_m}$, $(k_1\cdot\ldots\cdot k_m)^h = (k_1\cdot\ldots\cdot k_m)^p$. Из равенств

$$k_1^p\cdot\ldots\cdot k_m^\beta = (k_1\cdot\ldots\cdot k_m)^p = (k_1\cdot\ldots\cdot k_m)^h = k_1^h\cdot\ldots\cdot k_m^h = k_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot k_m^{\alpha_m}$$

вытекает, что $k_1^{\alpha_1} = k_1^\beta,\dots,k_m^{\alpha_m} = k_m^\beta$.

Пусть $k = k_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot k_m^{n_m}$ — произвольный элемент из K. Тогда

$$k^h = (k_1^{n_1})^h\cdot\ldots\cdot(k_m^{n_m})^h = \left(k_1^h\right)^{n_1}\cdot\ldots\cdot\left(k_m^h\right)^{n_m} = \left(k_1^\beta\right)^{n_1}\cdot\ldots\cdot\left(k_m^\beta\right)^{n_m} = k^\beta,$$

т. е. $\langle h\rangle$ действует скалярно на K.

Справедливость обратного утверждения очевидна. $\rhd$

2. Строение нильпотентных AI-групп

Пусть G — нильпотентная AI-группа. Если в G нормальна любая подгруппа простого порядка, то по условию в G нормальна любая абелева подгруппа и, поскольку любая группа порождается своими абелевыми подгруппами, G — абелева или гамильтонова группа, т. е. выполнен пункт (1) теоремы 1. Наоборот, любая абелева или гамильтонова группа является, очевидно, AI-группой.

В дальнейшем будем предполагать, что в G есть неинвариантная подгруппа простого порядка p.

Лемма 2.1. *G — p-группа.*

$\lhd$ По условию G нильпотентна, поэтому $G = P\times N$, где P — силовская p-подгруппа группы G, а N — p-дополнение. Предположим, что $N\neq 1$. Пусть $1\neq z\in Z(N)$. Тогда пара $(\langle z\rangle, \langle c,z\rangle)$ является запрещенной, поскольку $P\leqslant N_G(\langle z\rangle)$, но $P\nleqslant /N_G(\langle c,z\rangle)$.

Полученное противоречие доказывает лемму. $\rhd$

Пусть $d\in G\backslash N_G(\langle c\rangle)$. Тогда $z = [c,d]\neq 1$ и по лемме 1.4 $G' = \langle z\rangle$. Обозначим $\langle c,d\rangle$ через D.

Лемма 2.2. *Подгруппа D изоморфна либо экстраспециальной группе порядка p^3 (при нечетном p), либо группе*

$$\left\langle c,d:\, c^p = d^{p^m} = 1,\ c^{-1}dc = d^{1+p^{m-1}}\right\rangle,$$

где $m\geqslant 2$.

$\lhd$ Если $d^p = 1$ и p — нечетно, то D, очевидно, имеет порядок p^3 и ее период равен p. Если же $p = 2$ и $d^2 = 1$, то $\langle c, d\rangle$ — группа диэдра порядка 8. В этом случае, после замены d на cd, получим, что D удовлетворяет заключению леммы с $m = 2$.

Если же порядок d равен p^m, где $m \geqslant 2$, то $c \in N_G(d^p)$ и поэтому $c \in N_G(\langle d\rangle)$, иначе пара $(\langle d^p\rangle, \langle d\rangle)$ является запрещенной. Поэтому $z \in [c, d] \in \langle d\rangle$ и после замены d на подходящую степень можно считать, что $z = d^{m-1}$.

Таким образом, $c^{-1}dc = d^{1+p^{m-1}}$. Это доказывает лемму. $\rhd$

Лемма 2.3. *$G = DC$, где $C = C_G(D)$.*

$\lhd$ Если $g \in G$, то по лемме 1.4 $c^g = cz^\alpha$, $d^g = dz^\beta$, где $z = [c, d] = c^{-1}d^{-1}cd$; α, β — целые. Другими словами, $c^{-1}dc = dz^{-1}$, $d^{-1}cd = cz$. Поэтому $c^{gd^\alpha c^{-\beta}} = c$, $d^{gd^\alpha c^{-\beta}} = d$, откуда $gd^\alpha c^{-\beta} \in C$, $g \in CD = DC$. $\rhd$

Лемма 2.4. *Если $x \in C$ и $x^p = 1$, то $x \in \langle z\rangle$.*

$\lhd$ Предположим противное. Тогда пара $(\langle x\rangle, \langle x, c\rangle)$ является запрещенной: $d \in N_G(\langle x\rangle)$, но $d \notin N_G(\langle x, c\rangle)$, поскольку $z = [c, d] \notin \langle x, c\rangle$. $\rhd$

Таким образом, C — циклическая группа или группа кватернионов.

Пусть элемент d выбран так, что его порядок наименьший из возможных. Если порядок d равен p, то справедлив один из пунктов (2) или (4) теоремы 1.

Пусть порядок d есть p^m, где $m \geqslant 2$. По лемме 2.2 $C \cap D = Z(D) = \langle d^p\rangle$.

Если C содержит элемент x, не лежащий в $\langle d\rangle$, то $\langle d, x\rangle$ — циклическая группа и, следовательно, содержит элемент g порядка p, не лежащий в $\langle z\rangle$. Если y перестановочен с c, то $y \in C$ вопреки лемме 2.4. Поэтому d можно заменить на y вопреки выбору d. Таким образом, справедлив пункт (3) теоремы 1.

Без труда проверяется, что все группы из пунктов (1)–(4) теоремы 1 являются AI-группами.

3. Строение групп Фробениуса, являющихся AI-группами

Пусть G — группа Фробениуса с ядром K и дополнением H, являющаяся AI-группой. По лемме 1.4 H — нильпотентная группа. Так как по лемме 1.2 в дополнении Фробениуса каждая силовская p-подгруппа циклическая или (при $p = 2$) группа кватернионов, то $H = C \times Q$, где C — циклическая группа, а Q — либо тривиальная группа, либо группа кватернионов. Так как по лемме 1.2 Q двуступенно нильпотентна, то $|Q| = 1$ или $|Q| = 8$.

Лемма 3.1. *Если K неабелева, то выполнен пункт* 1 *теоремы* 2.

$\lhd$ Так как порядок коммутанта K не может равняться двум, то по теореме 1 K — p-группа нечетного порядка и либо K — центральное произведение экстраспециальной группы

$$E = \Big\langle a, b : \ a^p = b^p = [a, [a, b]] = [b, [a, b]] = 1 \Big\rangle$$

простого периода и порядка p^3 на циклическую группу C, либо K изоморфна

$$\Big\langle a, b : \ a^p = b^{p^m} = 1, \ a^{-1}ba = b^{1+p^{m-1}} \Big\rangle$$

для некоторого $m \geqslant 2$.

Рассмотрим вначале первую возможность. Так как H действует точно на коммутанте $[K, K]$ группы K, имеющем простой порядок, то $H = \langle h\rangle$ — циклическая группа.

Пусть $C = \langle c\rangle$. Так как $C = Z(K)$, то C инвариантна относительно H. Поскольку $d = [a, b] \in C$, то $d^h = d^\gamma$, где γ — целое число, $\gamma \neq 1 (\operatorname{mod} p)$. Пусть $y = \langle a, d\rangle$. Так как

$\langle d\rangle \triangleleft G$, то $N_G(y) = G$ и, в частности, y инвариантна относительно H. То же самое верно для $V = \langle b, d\rangle$. Поэтому, $a^h\langle d\rangle = a^\alpha\langle d\rangle$, $b^h\langle d\rangle = b^\beta\langle d\rangle$, где α и β — целые числа.

Отсюда $a^\alpha = d^h = [a,b]^h = [a^h, b^h] = [a^\alpha, b^\beta] = d^{\alpha\beta}$ и $\alpha\beta \equiv \gamma(\operatorname{mod} p)$. Так как $\alpha \not\equiv 1 \not\equiv \beta(\operatorname{mod} p)$, то $\alpha \not\equiv \gamma(\operatorname{mod} p)$ или $\beta \not\equiv \gamma(\operatorname{mod} p)$.

Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha \not\equiv \gamma(\operatorname{mod} p)$. Если $|C| > p$, то пара $(\langle d\rangle, \langle a, c\rangle)$ является запрещенной: $d \in \langle a, c\rangle$, но $\langle a, c\rangle$ не является H-инвариантной подгруппой, поскольку, если $(ac)^h = ac^\delta$ для некоторого целого числа δ, то $a^\delta c^\delta = (ac)^\delta = a^\alpha c^\gamma d_1$, где $d_1 \in \langle d\rangle$, откуда $\alpha \equiv \delta \equiv \gamma(\operatorname{mod} p)$, вопреки $\alpha \not\equiv \gamma(\operatorname{mod} p)$. Итак, $|C| = \langle d\rangle$ и $K = E$.

Если теперь $\alpha \not\equiv \beta(\operatorname{mod} p)$, то пара $(\langle d\rangle, \langle d, ab\rangle)$ является запрещенной, поэтому можно считать, что $\alpha = \beta$, т. е. выполнен пункт 3 теоремы 2.

Аналогичные рассуждения показывают, что вторая возможность не реализуется. $\triangleright$

Лемма 3.2. *Если K — абелева группа, то выполнен один из пунктов* 2–5 *теоремы* 2.

$\triangleleft$ Индукция по порядку G. Пусть K_0 — минимальная H-инвариантная подгруппа в K. Тогда K_0 — элементарная абелева p-группа, на которой H действует неприводимо.

Предположим вначале, что $K_0 = K$. Если K — циклическая группа, то выполнен пункт 2 теоремы 2. Поэтому K — нециклическая группа.

Рассмотрим случай, когда H неабелева, т. е. $H = Q \times H_0$, где Q — группа кватернионов порядка 8, а H_0 — циклическая группа нечетного порядка. Если $H_0 \neq 1$, то по индукции, примененной к подгруппе KQ, порядок K равен p^2, где p нечетно и H можно отождествить с подгруппой из $GL_2(p)$.

Так как централизатор Q в $GL_2(p)$ состоит из скалярных матриц, то выполнен пункт 5 теоремы 2.

Если $H_0 = 1$, то пусть a, b — элементы порядка 4, порождающие Q. Если при этом $\langle a\rangle$ действует неприводимо на K, то по лемме 1.2 $k^{a^2} = k^{-1}$, поскольку a^2 — инволюция и поэтому $\langle k, k^a\rangle$ инвариантна относительно $\langle a\rangle$, т. е. $K = \langle k, k^a\rangle$ — группа порядка p^2, и снова выполнен пункт 5 теоремы 2. Если же $\langle a\rangle$ действует приводимо на K, то по индукции, примененной к $K \cdot \langle a\rangle$, в K найдется a-инвариантная нетривиальная циклическая подгруппа $\langle k\rangle$, и $\langle k, k^b\rangle$ инвариантна относительно $\langle a, b\rangle = H$, откуда снова следует, что G удовлетворяет пункту 5 теоремы 2.

Итак, можно считать, что H — циклическая группа. Если какая-то подгруппа $H_0 \neq 1$ из H действует приводимо на K, то по индукции, примененной к $K \cdot H_0$, подгруппа H_0 действует скалярно на K и выполнен пункт 4 теоремы 2.

Таким образом, K не является минимальной H-инвариантной подгруппой. Покажем, что любая минимальная H-инвариантная подгруппа $K_0 \leqslant K$ является циклической.

Предположим противное. Пусть K_0 — циклическая минимальная H-инвариантная подгруппа из K.

Если $K_0 \nleqslant \Phi(K)$, то $K_0 \cap \Phi(K) = 1$ и поэтому $K = K_0 \times K_1$, где по лемме 1.3 K_1 можно выбрать H-инвариантной.

Пусть $k \in K_0$. Тогда $\langle k\rangle$ не является H-инвариантной подгруппой и пара $(k_1, \langle k, k\rangle)$ является запрещенной.

Если же $K_0 \leqslant \Phi(K)$, то существует элемент $k \in K$ порядка p^2, где p — некоторое простое число, такой, что $1 \neq k^2 \in K_0$. Так как в K/K_0 по условию AI любая подгруппа является H-инвариантной, то $\langle k_0, k\rangle$, а вместе с ней и $\langle k^2\rangle = \Phi(\langle K_0, k\rangle)$ является H-инвариантной, что противоречит нецикличности K_0.

Пусть V — подгруппа, порожденная всеми элементами простого порядка из K, и V_1 — минимальная H-инвариантная подгруппа из K. Тогда $V_1 \leqslant V$ и, в силу вышесказанного,

V_1 — циклическая группа простого порядка. По лемме 1.3 $V = V_1 \times V_0$, где V_0 инвариантна относительно H. Повторное применение леммы 1.3 позволяет представить V в виде $V = V_1 \times \cdots \times V_m$, где все V_i $(i = 1, \ldots, m)$ — инвариантные относительно H циклические группы простых порядков. Если все подгруппы простых порядков из V инвариантны относительно H, то по условию AI все подгруппы из K инвариантны относительно H и по лемме 1.5 выполнен пункт 2 теоремы 2.

Предположим, что $\langle v \rangle$ — подгруппа простого порядка p из V, не являющаяся H-инвариантной. Так как $\langle v, v_1 \rangle$ по условию AI является H-инвариантной подгруппой, то $\langle v^h \rangle = \langle v, v_1 \rangle$. Если $m > 2$, то найдется $v_i \notin \langle v, v_1 \rangle$, откуда следует, что пара $(v_i, \langle v, v_i \rangle)$ является запрещенной.

Таким образом, $m = 2$ и V — группа порядка p^2. В частности, K — прямое произведение двух циклических p-групп.

Если $V \leqslant \Phi(K)$, то существует элемент x из K порядка p^2 такой, что $x^p = v$ и подгруппа $\langle v \rangle = \Phi(\langle v, x \rangle)$ является H-инвариантной вопреки выбору v. Поэтому $V \nleqslant \Phi(K)$.

Если $V = K$, то выполнен пункт 3 теоремы 2. Предположим, $V \neq K$. Так как $V \leqslant \Phi(K)$, то v_1 или v_2 не содержатся в $\Phi(K)$. Можно считать, что $v_2 \notin \Phi(K)$, а $v_1 \in \Phi(K)$, т. е. $K = K_1 \times \langle v_2 \rangle$ для некоторой циклической подгруппы $K_1 \leqslant K$, содержащей $\langle v_1 \rangle$. По условию AI любая подгруппа из $K/\langle v_1 \rangle$ инвариантна относительно H. По лемме 1.5 H действует скалярно на $K/\langle v_1 \rangle$, т. е. $k_1^h = k_1^\alpha a$, $v_2^h = v_2^\alpha b$, где k_1 — порождающий элемент циклической подгруппы K_1, а $a, b \in \langle v_1 \rangle$. Поскольку $\langle v_2 \rangle$ инвариантна относительно H, то $b = 1$. Далее, $(k_1^p)^h = (k_1^p)^\alpha a^p = (k_1^p)^\alpha$, откуда вытекает, что $v_1^h = v_1^\alpha$. Это означает, что $v^h = v^\alpha$, что противоречит выбору v. $\triangleright$

Нетрудно проверить, что все группы, перечисленные в теореме 2, действительно являются AI-группами. Это доказывает теорему 2.

Литература

1. *Журтов А. Х., Цирхов А. А.* О некоторых группах с независимыми подгруппами // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, № 7.—С. 15–20.
2. *Шидов Л. И.* О некоторых группах с нормализаторным условием // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 6.—С. 141–145.
3. *Журтов А. Х., Цирхов А. А.* Конечные группы с независимыми абелевыми подгруппами // Тр. Института математики и механики УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 4.—С. 88–91.
4. *Холл М.* Теория групп.—М: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
5. *Huppert B.* Endlishe Gruppen I.—Berlin: Springler-Verlag, 1979.

Статья поступила 27 декабря 2012 г.

Цирхов Аубекир Ахметханович
Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова,
ассистент кафедры геометрии и высшей алгебры
РОССИЯ, 360000, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 165
E-mail: `tsirkhov1948@mail.ru`

CHARACTERIZATION OF FINITE GROUPS WITH INDEPENDENT ABELIAN SUBGROUPS

Tsirkhov A. A.

A complete description of finite groups in which all abelian subgroups are independent is given.

Key words: group, nilpotent subgroup, independent subgroup.